

IPhO 2000

理论题与解答 · 英国莱斯特 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iphO/2000/

题目 1：五个短题：蹦极者、热机、利用 U-Pb 定年法测定地球年龄、均匀带电球体、在地磁场中转动的铜环

A

一名蹦极者系在一根长弹性绳的一端。弹性绳的另一端固定在一座高桥上。蹦极者从桥上迈出，由静止开始向下方的河流下落。他不会碰到水面。蹦极者的质量为 m ，绳的原长为 L ，绳的劲度系数（使绳伸长 1 m 所需的力）为 k ，重力场强度为 g 。

可以假设：

- 蹦极者视为系在绳端的质量为 m 的质点，
- 与 m 相比，绳的质量可以忽略，
- 绳遵循胡克定律，
- 在蹦极者下落的整个过程中，空气阻力可以忽略。

求出下列各量的表达式，并填在答题纸上：

- 蹦极者第一次瞬时静止之前下落的距离 y ，
- 蹦极者在此次下落过程中达到的最大速率 v ，
- 从开始下落到第一次静止所经历的时间 t 。

B

一台热机在温度分别为 T_A 和 T_B ($T_A > T_B$) 的两个相同物体之间工作，每个物体的质量均为 m ，比热容均为常量 s 。两个物体均保持恒定压强，且不发生相变。

- 如果热机从该系统中输出理论上可能的最大机械功，求两个物体 A 和 B 达到的最终温度 T_0 的表达式，并写出完整的推导过程。

将最终温度 T_0 的表达式写在答题纸上。

- 由此求出可获得的最大功的表达式，并写在答题纸上。

这台热机在两箱水之间工作，每箱水的体积均为 2.50 m^3 。一箱水的温度为 350 K ，另一箱为 300 K 。

- 计算可获得的最大机械能。将数值填在答题纸上。

水的比热容 $= 4.19 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

水的密度 $= 1.00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

C

假设地球形成时存在同位素 ^{238}U 和 ^{235}U ，但不存在它们的衰变产物。利用 ^{238}U 和 ^{235}U 的衰变来确定地球的年龄 T 。

(a) 同位素 ^{238}U 的衰变半衰期为 4.50×10^9 年。由此形成的放射性衰变系中，各衰变产物的半衰期与之相比都很短；在一级近似下，可以忽略它们的存在。该衰变系最终生成稳定的铅同位素 ^{206}Pb 。

求出经过时间 t 的放射性衰变所产生的 ^{206}Pb 原子数（记为 ^{206}n ）的表达式，用现存的 ^{238}U 原子数（记为 ^{238}N ）以及 ^{238}U 的半衰期表示，并填在答题纸上。（以 10^9 年为单位进行计算可能会有所帮助。）

(b) 类似地， ^{235}U 的衰变半衰期为 0.710×10^9 年，它经过一系列半衰期较短的产物，最终生成稳定同位素 ^{207}Pb 。

在答题纸上写出联系 ^{207}n 、 ^{235}N 和 ^{235}U 的半衰期的方程。

(c) 用质谱仪分析一份混有铅矿石的铀矿石。测得三种铅同位素 ^{204}Pb 、 ^{206}Pb 和 ^{207}Pb 的相对含量，发现其原子数之比分别为 $1.00 : 29.6 : 22.6$ 。同位素 ^{204}Pb 被用作参照，因为它不是由放射性衰变产生的。对纯铅矿石进行分析，得到的比例为 $1.00 : 17.9 : 15.5$ 。

已知 $^{238}N : ^{235}N$ 为 $137 : 1$ ，推导一个含有 T 的方程，并填在答题纸上。

(d) 假设 T 远大于两种铀同位素的半衰期，由此求出 T 的近似值。

(e) 这个近似值显然并不显著大于较长的那个半衰期，但可用它求得精确得多的 T 值。利用这一点或其他方法，估算地球年龄，要求误差在 2% 以内。

D

电荷 Q 在真空中均匀分布于半径为 R 的球形体积内。

(a) 分别对 $r \leq R$ 和 $r > R$ ，推导距球心 r 处的电场强度表达式。

(b) 求出这一电荷分布所具有的总电能的表达式。

将 (a) 和 (b) 的答案填在答题纸上。

E

一个由细铜丝制成的圆环，在地磁场中的某处绕一条竖直直径转动。该处地磁场的磁感应强度为 $44.5 \mu\text{T}$ ，方向与水平面成 64° 角并指向下方。已知铜的密度为 $8.90 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ，电阻率为 $1.70 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ ，计算圆环的角速度减半需要多长时间。写出计算步骤，并将时间的数值填在答题纸上。这一时间远长于圆环转一圈所需的时间。

可以假设支架摩擦和空气阻力的影响可以忽略。为解答本题，应忽略自感效应，尽管实际上自感效应并不可忽略。

题目译自官方英文原文。

答案

- A(a):

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

- A(b):

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

- A(c):

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

- B(a):

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

- B(b):

$$W_{\max} = ms \left(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B} \right) = ms \left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B} \right)^2.$$

- B(c):

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

- C(a): 记 $h_{238} = 4.50 \times 10^9 \text{ yr}$,

$$^{206}_{\text{n}} = ^{238}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right).$$

- C(b): 记 $h_{235} = 0.710 \times 10^9 \text{ yr}$,

$$^{207}_{\text{n}} = ^{235}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right).$$

- C(c):

$$\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7}, \quad T > 0.$$

- C(d):

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}.$$

- C(e):

$$T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr}.$$

- **D(a):** 电场的径向分量为

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3}, & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

当 $Q > 0$ 时, 电场指向外; 当 $Q < 0$ 时, 电场指向内; 在球心处电场为零。

- **D(b):**

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

- **E:**

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

解答

A(a)

设 z 为从桥面向下量起的距离。在 $z = L$ 之前, 绳处于松弛状态; 此后, 绳的伸长量为 $x = z - L$, 张力为 kx 。

由于没有耗散, 机械能守恒。在最低点 $z = y$ 处, 蹦极者瞬时静止。因此

$$mgy = \frac{1}{2}k(y - L)^2.$$

等价地, 令 $x = y - L$, 则有

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mgL}{k} = 0.$$

符合物理意义的根对应正的伸长量:

$$x = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgL}{k}}.$$

所以

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

A(b)

当向下的加速度为正时, 速率增大。绳绷紧后,

$$m\ddot{z} = mg - k(z - L).$$

因此, 加速度第一次变为零时, 速率达到最大:

$$z = L + \frac{mg}{k}.$$

在绳绷紧后的任意位置, 由能量守恒有

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz - \frac{1}{2}k(z - L)^2.$$

在速率最大的位置,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(L + \frac{mg}{k}\right) - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = mgL + \frac{m^2g^2}{2k}.$$

由此得到

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

A(c)

在最初下落距离 L 的自由落体过程中, 所经历的时间及末速率分别为

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}, \quad v_1 = \sqrt{2gL}.$$

取绳刚绷紧的时刻为 $\tau = 0$, 并定义

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{mg}{k}.$$

此后的运动方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g.$$

在初始条件 $x(0) = 0$ 和 $\dot{x}(0) = v_1$ 下, 其解为

$$x(\tau) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega_0 \tau) + \frac{v_1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau,$$

所以

$$\dot{x}(\tau) = x_{\text{eq}}\omega_0 \sin \omega_0 \tau + v_1 \cos \omega_0 \tau.$$

该速度第一次为零时, 满足 $\pi/2 < \omega_0 \tau < \pi$ 。因此,

$$\omega_0 \tau = \pi - \arctan\left(\frac{v_1}{x_{\text{eq}}\omega_0}\right) = \pi - \arctan\sqrt{\frac{2kL}{mg}}.$$

加上自由落体时间, 得到

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan\sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

B(a)

让热机在两个物体的瞬时温度之间可逆地工作, 直到它们达到相同温度, 就能获得最大功。下文所有温度均为绝对温度。

每个物体的定压热容均为常量 ms 。因此, 其熵变为

$$\Delta S = ms \int \frac{dT}{T}.$$

热机循环工作, 所以其净熵变为零。可逆工作时, 两个物体的总熵变也为零:

$$ms \int_{T_A}^{T_0} \frac{dT}{T} + ms \int_{T_B}^{T_0} \frac{dT}{T} = 0.$$

因此

$$\ln \frac{T_0}{T_A} + \ln \frac{T_0}{T_B} = 0,$$

由此得到

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

为说明这为何给出最大功，考虑不可逆过程：它会产生正的总熵变，因而要求

$$T_0 \geq \sqrt{T_A T_B}.$$

最终温度越高，留在物体中的热能越多，因而能够输出的功越少。

B(b)

从初始温度较高的物体中吸取的热量为

$$Q_H = ms(T_A - T_0),$$

传给初始温度较低的物体的热量为

$$Q_C = ms(T_0 - T_B).$$

对循环工作的热机应用能量守恒，得到

$$W = Q_H - Q_C = ms(T_A + T_B - 2T_0).$$

代入可逆过程的最终温度，

$$W_{\max} = ms(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B}) = ms(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B})^2.$$

B(c)

每箱水的质量为

$$m = \rho V = (1.00 \times 10^3)(2.50) = 2.50 \times 10^3 \text{ kg}.$$

可逆过程的最终温度为

$$T_0 = \sqrt{350 \times 300} = 324.037 \dots \text{ K}.$$

使用这一数值，并避免过早舍入，得到

$$\begin{aligned} W_{\max} &= (2.50 \times 10^3)(4.19 \times 10^3) \left[350 + 300 - 2\sqrt{350 \times 300} \right] \\ &= 2.0174 \dots \times 10^7 \text{ J}. \end{aligned}$$

所以

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

C(a)

对于半衰期为 h 的放射性母体同位素，

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{h}.$$

因此，母体原子的初始数量可用其现存数量表示为

$$N(0) = N(t)e^{\lambda t} = N(t)2^{t/h}.$$

忽略中间产物的寿命，每个发生衰变的铀原子最终产生一个铅原子。由于初始时不存在衰变产物，

$$n(t) = N(0) - N(t) = N(t) \left(2^{t/h} - 1 \right).$$

对于 ^{238}U 衰变系,

$$\boxed{{}^{206}\text{n} = {}^{238}\text{N} \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right)}, \quad h_{238} = 4.50 \times 10^9 \text{ yr.}$$

C(b)

对 ^{235}U 衰变系应用相同的推理,

$$\boxed{{}^{207}\text{n} = {}^{235}\text{N} \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right)}, \quad h_{235} = 0.710 \times 10^9 \text{ yr.}$$

C(c)

纯铅矿石给出了背景同位素比例。必须从混合样品中扣除这些背景含量, 才能求得由铀衰变产生的铅的数量。

设混合样品中 ^{204}Pb 的原子数为 N_{204} 。由于这种同位素不是放射成因的,

$${}^{206}\text{n} = (29.6 - 17.9)N_{204} = 11.7N_{204},$$

并且

$${}^{207}\text{n} = (22.6 - 15.5)N_{204} = 7.1N_{204}.$$

因此

$$\frac{{}^{207}\text{n}}{{}^{206}\text{n}} = \frac{7.1}{11.7}.$$

利用衰变方程和现存的铀同位素比例,

$$\frac{7.1}{11.7} = \frac{{}^{235}\text{N}}{{}^{238}\text{N}} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = \frac{1}{137} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1}.$$

所以, 所求方程为

$$\boxed{\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7} = 83.13675 \dots}, \quad T > 0.$$

C(d)

在题目所给的近似条件 $T \gg h_{238}, h_{235}$ 下,

$$2^{T/h} - 1 \simeq 2^{T/h}.$$

定年方程化为

$$2^{T(1/h_{235} - 1/h_{238})} \simeq 137 \frac{7.1}{11.7}.$$

取对数, 得到

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})}.$$

代入数值,

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(83.13675 \dots)}{(\ln 2)(1/0.710 - 1/4.50)} \times 10^9 \text{ yr},$$

所以

$$T_{\text{approx}} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}.$$

这仅约为 $1.19h_{238}$, 因此, 若要求精确结果, 就不能忽略 ^{238}U 表达式中减去的 1。

C(e)

保留两处减去的 1。令

$$u = \frac{T}{10^9 \text{ yr}},$$

则须解方程

$$F(u) \equiv \frac{2^{u/0.710} - 1}{2^{u/4.50} - 1} = 83.13675 \dots$$

在邻近数值处计算, 得到

$$F(4.55) = 82.666 \dots, \quad F(4.56) = 83.232 \dots$$

因此, 所求年龄介于 4.55 和 4.56 十亿年之间。更精确的数值解为 $u = 4.5583157 \dots$, 由此得到

$$T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr},$$

误差远小于所要求的 2%。

D(a)

均匀的体电荷密度为

$$\rho_q = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3}.$$

由球对称性可知, 电场沿径向, 且在同心球形高斯面上大小处处相同。

对于 $r \leq R$, 高斯面包围的电荷为

$$Q_{\text{enc}} = \rho_q \frac{4\pi r^3}{3} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

由高斯定律,

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0},$$

因而

$$E_r = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (r \leq R).$$

对于 $r > R$, 高斯面包围的电荷为 Q , 所以

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R).$$

电场在球心处为零, 在球面处连续, 球面处的电场为

$$E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

D(b)

真空中的静电场能量密度为

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

总能量包括带电球体内部和外部的电场能量：

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\int_0^R E^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty E^2 4\pi r^2 dr \right].$$

代入上面求得的电场，

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right].$$

因此

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right),$$

从而

$$\boxed{U = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}}.$$

E

设圆环半径为 a ，铜丝的横截面积为 S 。用 ρ_m 表示铜的质量密度，用 ρ_e 表示其电阻率。

圆环的质量和电阻分别为

$$M = 2\pi a S \rho_m, \quad \mathcal{R} = \rho_e \frac{2\pi a}{S}.$$

细圆环绕一条直径转动时，其转动惯量为

$$I = \frac{1}{2} M a^2 = \pi \rho_m S a^3.$$

圆环所在平面始终竖直，因此其法线始终水平。只有地磁场的水平分量对磁通量有贡献：

$$B_h = B \cos 64^\circ.$$

设 θ 为圆环法线与该水平磁场之间的夹角。磁通量为

$$\Phi = B_h \pi a^2 \cos \theta.$$

由 $\dot{\theta} = \omega$ ，根据法拉第电磁感应定律，

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B_h \pi a^2 \omega \sin \theta.$$

按题意忽略自感，电流为

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}}.$$

因此，瞬时焦耳热功率为

$$P = i^2 \mathcal{R} = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{\mathcal{R}} \omega^2 \sin^2 \theta.$$

题目给出的阻尼时间远长于转动一圈所需的时间，因此每转一圈， ω 只发生很小的变化。于是可以使用

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2},$$

得到

$$\langle P \rangle = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2\mathcal{R}} \omega^2.$$

没有摩擦时，这些热量来自转动动能：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = -\langle P \rangle.$$

因此，平均角速度满足

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2I\mathcal{R}} \omega.$$

又因为

$$I\mathcal{R} = (\pi \rho_m S a^3) \left(\rho_e \frac{2\pi a}{S} \right) = 2\pi^2 \rho_m \rho_e a^4,$$

所以几何量相互约去：

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2}{4\rho_m \rho_e} \omega.$$

由此得到

$$\omega(t) = \omega(0) \exp \left(-\frac{B_h^2 t}{4\rho_m \rho_e} \right).$$

令 $\omega(t_{1/2}) = \omega(0)/2$ ，得到

$$t_{1/2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B_h^2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B^2 \cos^2 64^\circ}.$$

代入数值，

$$B_h = (44.5 \times 10^{-6}) \cos 64^\circ = 1.95075 \dots \times 10^{-5} \text{ T},$$

并且

$$t_{1/2} = \frac{4(8.90 \times 10^3)(1.70 \times 10^{-8}) \ln 2}{(44.5 \times 10^{-6})^2 \cos^2 64^\circ}.$$

所以

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 2：电子的荷质比（阴极射线管中的磁聚焦；带电平板之间的贝塔粒子）

(a) 将一个由电子枪和荧光屏组成的阴极射线管（CRT）置于大小为 $\mathbf{B}$ 的匀强恒定磁场中，使磁场方向与电子枪的束流轴线平行，如图 2.3 所示。

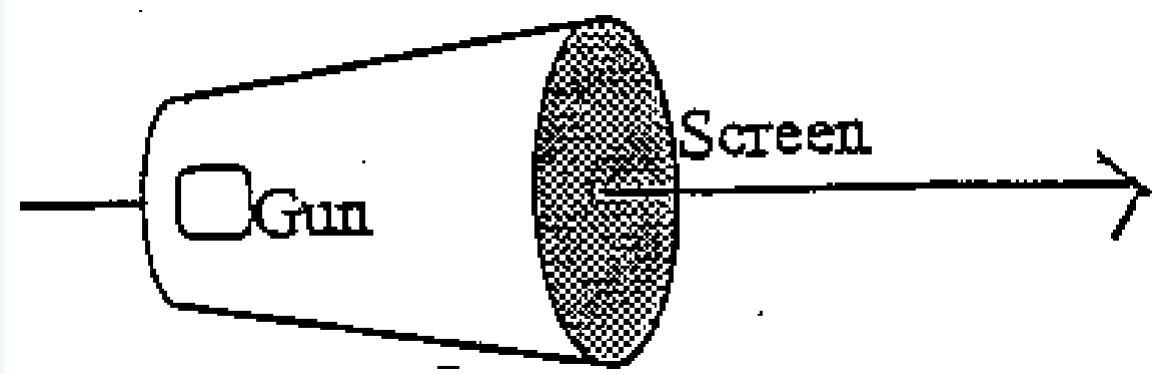


图 2.3

电子束从电子枪阳极的轴线上射出，但相对于轴线的发散角最大可达 5° ，如图 2.4 所示。一般情况下，荧光屏上会形成一个弥散的光斑，但在磁场取某些值时，会得到一个清晰聚焦的光斑。

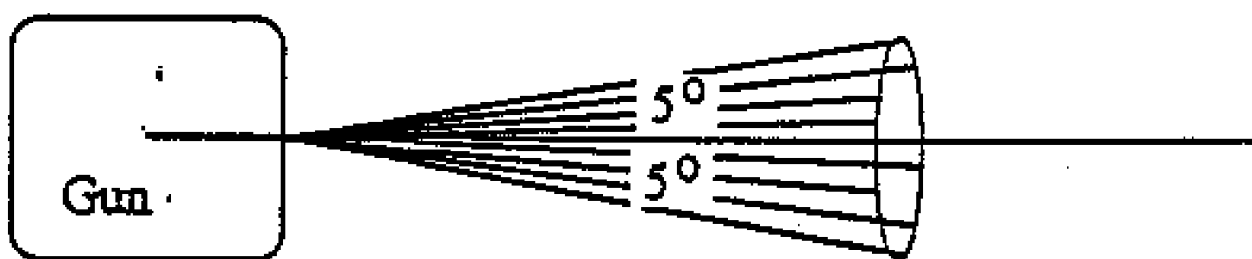


图 2.4

考虑一个离开电子枪时初速度方向与轴线成 β 角（其中 $0 \leq \beta \leq 5^\circ$ ）的电子，分析其平行于轴线和垂直于轴线的分运动，推导电子荷质比 e/m 用下列各量表示的表达式：

能够得到聚焦光斑的最小磁场，

电子枪两端的加速电势差 V

（注意 $V < 2 \text{ kV}$ ），

以及阳极到荧光屏的距离 D 。

将你的表达式写在答题纸第 2a 节所提供的方框内。

(b) 考虑另一种测定电子荷质比的方法。图 2.5 给出了实验装置的侧视图和俯视图（从上方观察），其中磁场方向标为 $\mathbf{B}$ 。在这个匀强磁场 $\mathbf{B}$ 中，放置两块半径为 ρ 的黄铜圆板，两板之间的距离 t 很小。两板之间保持电势差 V 。两板相互平行且共轴，但其轴线垂直于磁场。在一个半径为 $\rho + s$ 的圆柱面的内侧覆上感光胶片，并使该圆柱面与两板共轴。换言之，胶片与两板边缘之间的径向距离为 s 。整个装置置于真空中。注意， t 远小于 s 和 ρ 。

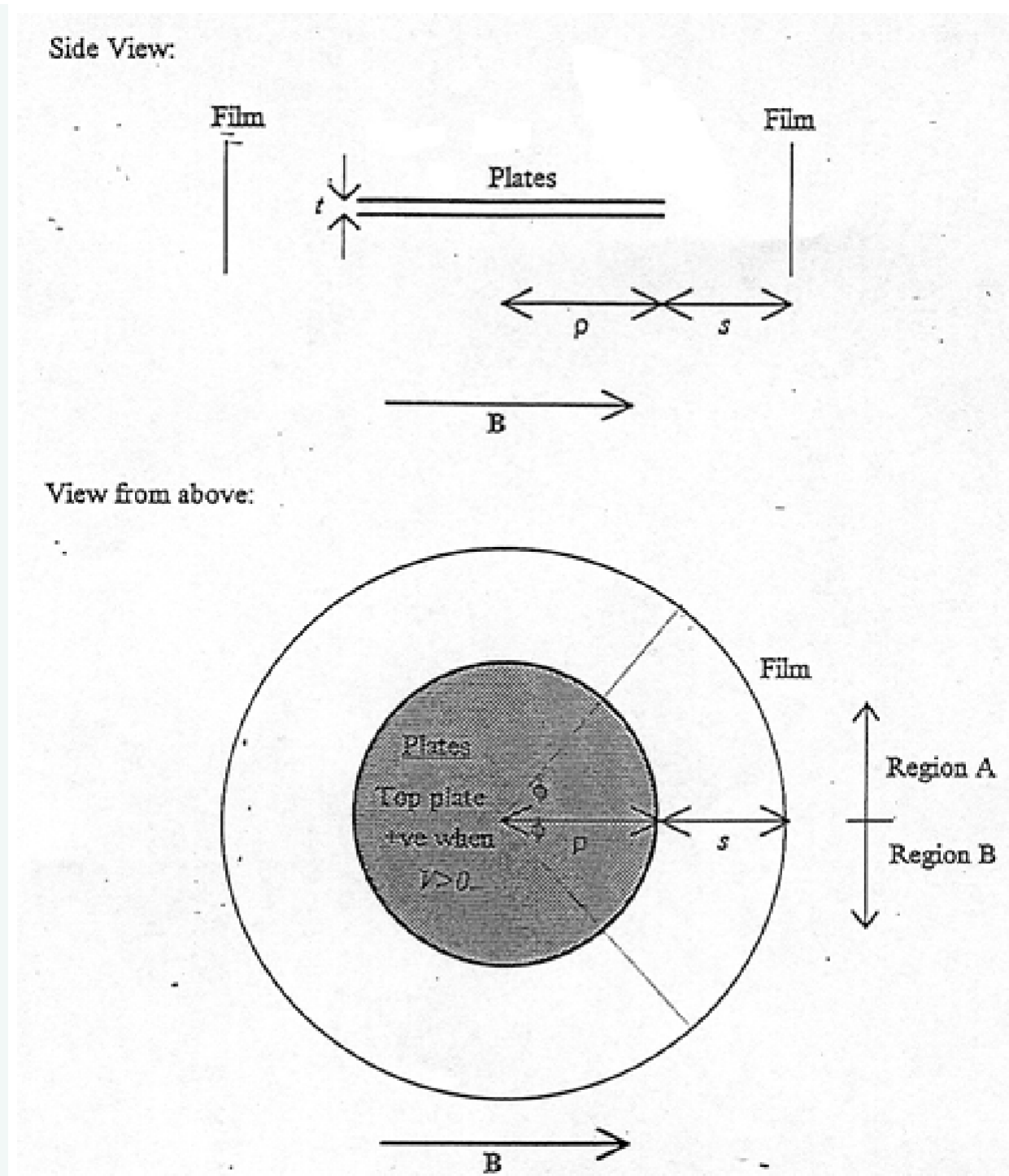


图 2.5

在两板中心之间放置一个 β 粒子点源，它向各个方向均匀发射速率分布在一定范围内的 β 粒子，并在以下三种不同条件下使同一张胶片曝光：

第一次， $B = 0$ ，且 $V = 0$ ，

第二次， $B = B_0$ ，且 $V = V_0$ ，以及

第三次， $B = -B_0$ ，且 $V = -V_0$ ；

其中 V_0 和 B_0 为正常数。请注意，当 $V > 0$ 时，上板带正电（当 $V < 0$ 时带负电）；当 $B > 0$ 时，磁场方向为图 2.5 所规定的方向（当 $B < 0$ 时，方向相反）。在本小题中，可以假设板间间隙小到可以忽略不计。

图 2.5 中将胶片上的两个区域标为 A 和 B。曝光并显影后，其中一个区域的示意图如图 2.6 所示。这段胶片取自哪个区域（在答题纸上写 A 或 B）？请标出电子所受各力的方向，以说明你的答案。

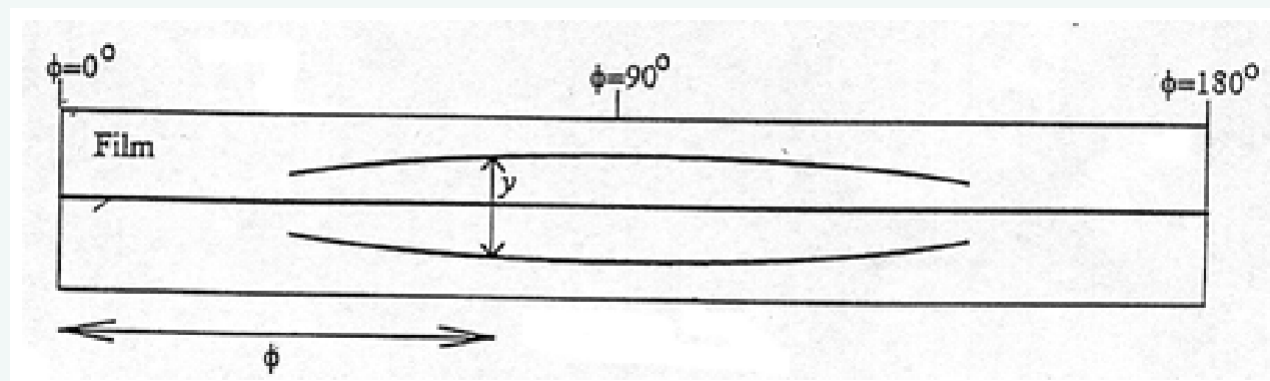


图 2.6

(c) 曝光并显影后，胶片的示意图如图 2.6 所示。用显微镜测量两条最外侧径迹之间的间距，图 2.6 中还标出了某一特定角度下的这个距离 (y)。测量结果列于下表，角度 ϕ 在图 2.5 中定义为磁场方向与从两板中心连到胶片上相应点的连线之间的夹角。

与磁场方向的夹角 / 度	ϕ	90	60	50	40	30	23
间距 / mm	y	17.4	12.7	9.7	6.4	3.3	径迹终点

装置各参数的数值如下：

$$B_0 = 6.91 \text{ mT} \quad V_0 = 580 \text{ V} \quad t = 0.80 \text{ mm} \\ s = 41.0 \text{ mm}$$

此外，真空中的光速可取为 $3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ，电子的静质量可取为 $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 。

求观测到的 β 粒子的最大动能。

将最大动能的数值结果以 eV 为单位写在答题纸第 2f 节的方框内。

(d) 利用 (f) 部分 [即上文 (c) 部分] 给出的信息，求电子的电荷量与静质量之比。应在所提供的纸上绘制适当的图像来求得该值。

在图像本身以及答题纸第 2g 节所提供的方框内，均用代数式标明横轴和纵轴所表示的量。

将你求得的电子荷质比写在答题纸第 2g 节所提供的方框内。

请注意，由于观测中存在系统误差，你得到的答案可能与公认值不一致。

题目译自官方英文原文。

答案

- (a) 对于最小的正聚焦磁场 $B_{\min}$,

$$\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}.$$

- (b) 区域 B。当 $B = B_0$, $V = V_0$ 时，电场力向上，磁场力向下。将两个场同时反向，两种力也都反向。

• (c)

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV}$$

对应于 $v_{\max} \simeq 2.69 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ 。

• (d) 以 $Y = y$ 为纵轴，以下列无量纲量为横轴作图：

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}.$$

直线的斜率约为 $1.855 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，由此得到

$$\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}.$$

解答

全文中， $e > 0$ 表示电子电荷量的大小；电子所带的电荷为 $-e$ 。其静质量为 m_0 。

(a)

由于加速电压低于 2 kV，电子的动能远小于其静能。我们采用非相对论力学，取 $m \simeq m_0$ ：

$$eV = \frac{1}{2}mv^2.$$

离开电子枪时的速度分量为

$$v_{\parallel} = v \cos \beta, \quad v_{\perp} = v \sin \beta.$$

磁场不会产生平行于自身方向的力。因此，平行于磁场方向的运动为匀速运动，而垂直于磁场方向的运动为圆周运动，且有

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB}, \quad \omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

合成的运动轨迹是一条螺旋线。从轴线上出发的电子每转完一整圈就会回到轴线上。最小的正聚焦磁场对应于电子在到达荧光屏前恰好转过一圈，因此

$$D = v \cos \beta T = \frac{2\pi m v \cos \beta}{eB_{\min}}.$$

两边平方，并代入 $v^2 = 2eV/m$ ，得到

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V \cos^2 \beta}{B_{\min}^2 D^2}.$$

对于这一窄电子束， $\beta \leq 5^\circ$ ，取 $\cos \beta \simeq 1$ 。于是

$$\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}.$$

对于包含不同 β 值的电子的束流，这种聚焦是近似的：各电子的轴向速度略有差别。在 5° 时， $1 - \cos \beta$ 仅约为 0.0038。

(b)

洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

当 $V = V_0 > 0$ 时，上板带正电，因此电场方向向下，电子所受的电场力方向向上。

当 $B = B_0 > 0$ 时，对俯视图应用矢量叉乘法，得到：

电子运动所朝向的区域	电场力	磁场力
区域 A	向上	向上
区域 B	向上	向下

当板间间隙小到可以忽略不计，只有电子所受的竖直方向的力相互平衡，它们才能穿过两板之间的区域。这在**区域 B** 才可能实现。

设 θ 为电子在两板之间运动时，其速度与磁场之间的夹角。忽略边缘效应，

$$E_0 = \frac{V_0}{t}.$$

力的平衡要求

$$eE_0 = eB_0v \sin \theta,$$

即

$$v \sin \theta = \frac{V_0}{B_0 t}.$$

将 B 和 V 同时反向，两种力也都反向，因此，对于朝区域 B 运动的电子，两种力仍然平衡。

电子离开两板后，电场力消失，而磁场力仍然存在。因此：

- $B = B_0, V = V_0$ 产生下方的弯曲径迹。
- $B = -B_0, V = -V_0$ 产生上方的弯曲径迹。
- $B = V = 0$ 产生中间的直线径迹。

这就是图 2.6 中所示的三条径迹，由此确定答案为

区域 B。

(c)

我们采用窄间隙近似，并在随后偏转的最低阶近似下，将电子离开两板时的角度 θ 视为观测角 ϕ 。定义

$$u = \frac{V_0}{B_0 t}.$$

代入数值得

$$u = \frac{580}{(6.91 \times 10^{-3})(0.80 \times 10^{-3})} = 1.0492 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

速度选择条件变为

$$v(\phi) = \frac{u}{\sin \phi}.$$

随着 ϕ 从 90° 减小，被选出的速率增大。因此，观测到的最小角度 23° 对应于最大速率：

$$v_{\max} = \frac{1.0492 \times 10^8}{\sin 23^\circ} = 2.6852 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 0.8951c.$$

表中的“径迹终点”给出了这一截止角度；它并未提供 y 的数值测量结果。

此时必须采用相对论动能：

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} = 2.2426,$$

$$K_{\max} = (\gamma_{\max} - 1)m_0c^2.$$

因此

$$K_{\max} = (2.2426 - 1)(9.11 \times 10^{-31})(3.00 \times 10^8)^2 = 1.0188 \times 10^{-13} \text{ J}.$$

利用标准单位换算关系 $1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$,

$$K_{\max} = 6.36 \times 10^5 \text{ eV}.$$

按与终点角度相称的合理精度取值,

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV} = 0.64 \text{ MeV}.$$

(d)

在两板外部, 忽略边缘电场, 并保留磁偏转的最低阶项。此时电子的水平运动近似为匀速运动, 从板边缘飞到胶片所需的时间为

$$\tau \simeq \frac{s}{v}.$$

磁场不做功, 因此电子的速率和洛伦兹因子保持不变。在最低阶近似下, 竖直方向的磁场力大小为

$$F_z = eB_0v \sin \phi,$$

由此得到竖直方向的加速度

$$a_z = \frac{eB_0v \sin \phi}{\gamma m_0}.$$

因此, 任一弯曲径迹相对于中间径迹的位移为

$$\delta \simeq \frac{1}{2}a_z\tau^2 = \frac{eB_0s^2 \sin \phi}{2\gamma m_0v}.$$

两种场的设置产生方向相反的位移。因此, 两条径迹之间的间距为

$$y = 2\delta \simeq \frac{eB_0s^2 \sin \phi}{\gamma m_0v}.$$

代入

$$v = \frac{V_0}{B_0t \sin \phi}, \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0tc \sin \phi} \right)^2},$$

得到

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2ts^2}{V_0} \sin^2 \phi \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0tc \sin \phi} \right)^2}.$$

由于 $0 < \phi < 180^\circ$, 可写为

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2ts^2}{V_0} \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0tc} \right)^2}.$$

因此, 选择图像的坐标轴为

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}, \quad Y = y.$$

横轴所表示的量是无量纲量。这里

$$\frac{V_0}{B_0 t c} = 0.349735.$$

需要描绘的点为：

ϕ	横坐标 X	纵坐标 Y / mm
90°	0.93685	17.4
60°	0.68612	12.7
50°	0.52210	9.7
40°	0.34667	6.4
30°	0.17867	3.3

图像近似为一条通过原点的直线。适宜的坐标轴范围为 $0 \leq X \leq 1$ 和 $0 \leq Y \leq 20$ mm。作通过原点的拟合，得到

$$Y \simeq (18.55 \text{ mm})X.$$

将斜率以米为单位表示，

$$S = 1.855 \times 10^{-2} \text{ m},$$

由理论关系得

$$S = \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0}.$$

于是

$$\frac{e}{m_0} = \frac{SV_0}{B_0^2 t s^2} \simeq \frac{(1.855 \times 10^{-2})(580)}{(6.91 \times 10^{-3})^2 (0.80 \times 10^{-3})(41.0 \times 10^{-3})^2}.$$

因此，由观测数据推得的值为

$$\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}.$$

本推导保留了偏转的最低阶项。在测得的最大间距处， $\delta/s = 8.7/41.0 \simeq 0.21$ ；因此，有限曲率修正可能带来百分之几的影响。

解答已与官方解答核对。

题目 3：引力波探测器（A 部分）与太阳引力对光的偏折（B 部分）

引力波与引力对光的影响。

A 部分

本部分讨论探测天文事件所产生的引力波时面临的困难。应当认识到，遥远的超新星爆发可能使地球表面的引力场强度产生约为 $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$ 的波动。

一种引力波探测器模型（见图 3.1）由两根各长 1m、彼此垂直放置的金属杆组成。每根杆的一端抛光至光学平面精度，另一端则刚性固定。调节其中一根杆的位置，使光电池接收到的信号最小（见图 3.1）。

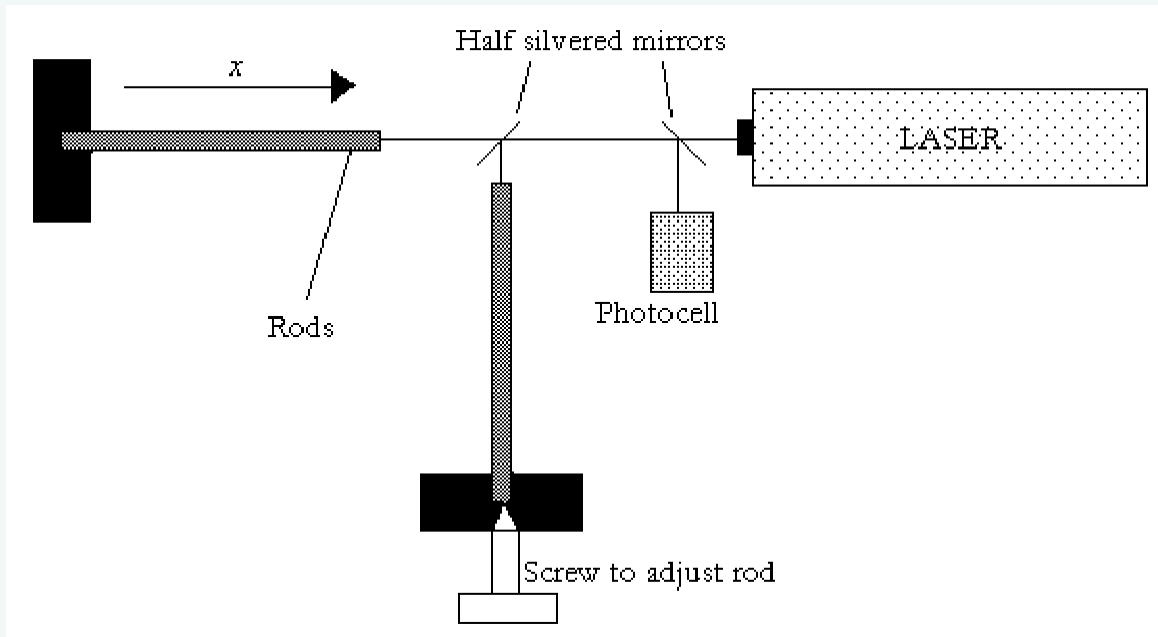


图 3.1

用压电装置向两根杆施加一个短促的冲量。于是，杆的自由端发生振动，其纵向位移为 Δx_t ，其中

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi),$$

而 a, μ, ω 和 ϕ 均为常量。

(a) 若在 50s 内振幅减小了 20%，求 μ 的值。

(b) 已知杆由铝制成，其密度 (ρ) 为 2700 kg m^{-3} ，杨氏模量 (E) 为 $7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$ ，再求 ω 的值。

(c) 两根杆的长度不可能做得完全相同，因此光电池信号的拍频为 0.005 Hz 。两根杆的长度差是多少？

(d) 对于长度为 l 的杆，推导引力场强度 g 的变化 Δg 所引起的杆长变化 Δl 的代数表达式，用 l 及杆材料的其他常量表示。

(e) 激光器发出的光为波长 656 nm 的单色光。若能探测到的最小条纹位移为激光波长的 10^{-4} ，则要使这样的系统能够探测到 g 的 $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$ 的变化， l 至少需要多大？

一种无方向性的引力波探测器由质量为 1168 kg 的铜合金球组成，该球通过减振组件悬挂在真空中。球上装有包含调谐电路的换能器，以探测其尺寸的变化。然而，换能器也会拾取所有杂散振动，例如温度效应引起的振动，以及电干扰拾取所产生的噪声。

(f) 为减小温度效应引起的振动，球保持在 100 mK 的温度下。当装置从 300 K 冷却到这一温度时，原子振动的振幅将减小到原来的几分之一？

(g) 首先用液氮和液氦将球冷却至 4.2 K 。随后通过制冷过程将温度 T 进一步降至 100 mK ，该过程以平均 1 mW 的速率从系统中移走能量。已知在这些低温下，铜合金的比热容 s 与 T^3 成正比，且在 4.2 K 时 $s = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ，估算系统从 4.2 K 冷却至 100 mK 所需的时间。

B 部分

本部分讨论引力场对光在空间中传播的影响。

(a) 从太阳（质量为 M ，半径为 R ）表面发出的光子会发生红移。假设光子的能量具有等效静质量，应用牛顿引力理论证明：在无穷远处，光子的有效（或测得的）频率减小（红移）为原来的 $(1 - GM/Rc^2)$ 倍。

(b) 光子频率的减小等价于其周期的增大；若将光子用作标准时钟，这就对应于时间膨胀。此外，可以证明，时间膨胀总是伴随着长度单位按同一因子收缩。

现在我们尝试研究这一效应对太阳附近光传播的影响。首先定义距太阳中心 r 处的有效折射率 n_r 。令

$$n_r = \frac{c}{c'_r},$$

其中， c 是在远离太阳引力影响的坐标系 ($r \rightarrow \infty$) 中测得的光速，而 c'_r 是在距太阳中心 r 处的坐标系中测得的光速。

证明 n_r 可近似为：

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2},$$

此式适用于 GM/rc^2 很小的情形，其中 α 是需要你确定的常量。

(c) 利用这个 n_r 的表达式，计算光线掠过太阳边缘时相对于直线路径的偏折角，以弧度表示。

数据：

引力常量， $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ 。

太阳质量， $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ 。

太阳半径， $R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$ 。

光速， $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ 。

你可能还需要用到以下积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

题目译自官方英文原文。

答案

- **A(a):** $\mu = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ 。
- **A(b):** 对于纵向振动的基模， $\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$ 。
- **A(c):** $|l_1 - l_2| \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.90 \text{ } \mu\text{m}$ 。
- **A(d):** $\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}$ ，其中 Δg 取沿杆方向的分量，以指向自由端为正。
- **A(e):** $l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m}$ ，这里将阈值理解为光程差，并取一个臂相对于另一个臂的轴向响应。
- **A(f):** 在经典谐振模型中，振幅减小为原来的 54.8 分之一，即初始值的 0.0183 。

- A(g): $t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}$ 。
- B(a): $\nu_{\infty} \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right)$ 。
- B(b): $\alpha = 2, \quad n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}$ 。
- B(c): $\theta = \frac{4GM}{Rc^2} = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad}$ ，方向朝向太阳。

解答

A(a)

振幅包络为

$$A(t) = ae^{-\mu t}.$$

振幅减小 20% 意味着经过 50 s 后，振幅为此前的 0.80 倍：

$$\frac{A(t+50)}{A(t)} = e^{-50\mu} = 0.80.$$

因此，

$$\mu = -\frac{\ln(0.80)}{50} = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

A(b)

将杆视为均匀的弹性连续介质，并认为观测到的振动是其纵向振动的基模。

设 $u(x, t)$ 为纵向位移， S 为横截面积。纵向力为 $ES \partial u / \partial x$ 。对一个短微元应用牛顿第二定律，得

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

因此，纵波的传播速度为

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

固定端的位移为零，而自由端的纵向应力为零：

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

对于空间依赖关系为 $\sin(kx)$ 的振动模式，自由端条件要求

$$\cos(kl) = 0.$$

对于基模， $kl = \pi/2$ ，所以杆长等于四分之一波长。因此

$$\omega_0 = vk = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

代入数值，得

$$v = \sqrt{\frac{7.1 \times 10^{10}}{2700}} = 5.128 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

且对于 $l = 1 \text{ m}$,

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2}(5.128 \times 10^3) = 8.055 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}.$$

在线性阻尼情况下, 观测到的角频率为 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$. 由于 $\mu \ll \omega_0$, 这一修正可以忽略:

$$\boxed{\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}}.$$

对应的频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{4l} \simeq 1.282 \times 10^3 \text{ Hz}.$$

A(c)

对于由相同材料制成、以相同基模振动的杆,

$$f(l) = \frac{v}{4l}.$$

因此, 它们的拍频为

$$f_b = |f_1 - f_2| = \frac{v}{4} \left| \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right|.$$

当长度差 $\delta l = |l_1 - l_2|$ 很小, 且两根杆的长度均近似为 l 时,

$$f_b \simeq \frac{v}{4l^2} \delta l = \frac{f}{l} \delta l.$$

因此,

$$\delta l \simeq \frac{l f_b}{f} = \frac{(1)(0.005)}{1281.998} \text{ m},$$

得到

$$\boxed{\delta l \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ m}}.$$

比值 $\delta l/l \simeq 3.9 \times 10^{-6}$ 证实了小差值近似的有效性。

A(d)

采用线性弹性理论, 并将引力扰动视为准静态扰动。令 x 从固定端 $x = 0$ 延伸至自由端 $x = l$, 以 Δg 表示场强变化沿此方向的带符号分量。

位于 x 处的横截面以外、朝向自由端一侧的材料质量为

$$m(x) = \rho S(l - x).$$

因此, 通过该截面传递的附加轴向力为

$$\Delta F(x) = \rho S(l - x) \Delta g.$$

由杨氏模量的定义, 局部应变的变化为

$$\Delta \epsilon(x) = \frac{\Delta F(x)}{ES} = \frac{\rho(l - x) \Delta g}{E}.$$

对所有微元的伸长量积分,

$$\Delta l = \int_0^l \Delta \epsilon(x) dx = \frac{\rho \Delta g}{E} \int_0^l (l - x) dx.$$

于是

$$\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}.$$

指向固定端的场强变化会使杆受压，对应于负的 Δg 。

A(e)

反射端发生位移 Δl 时，往返光程改变 $2\Delta l$ 。取场强变化沿其中一根杆的方向，另一根杆作为纵向参考，则

$$|\Delta D| = 2|\Delta l|.$$

光程改变一个波长，就会使干涉条件移动一个条纹。因此，题给灵敏度对应于

$$|\Delta D|_{\min} = 10^{-4} \lambda = 10^{-4} (656 \times 10^{-9}) = 6.56 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

因此，可探测到的最小杆端位移为

$$|\Delta l|_{\min} = 3.28 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

利用 A(d) 的结果，

$$2|\Delta l| = \frac{\rho l^2 |\Delta g|}{E}.$$

在探测阈值处，

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{E 10^{-4} \lambda}{\rho |\Delta g|}}.$$

代入得

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{(7.1 \times 10^{10})(10^{-4})(656 \times 10^{-9})}{(2700)(10^{-19})}},$$

所以

$$l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m}.$$

更一般地，若两根杆都产生响应，则此表达式中的 Δg 应替换为两根杆各自带符号的轴向场强变化之差。

A(f)

在经典谐振近似下，原子位移为 x 时的弹性势能为 $\frac{1}{2} \kappa x^2$ 。由能量均分定理，

$$\frac{1}{2} \kappa \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

当有效劲度系数 κ 不变时，特征振幅因此满足

$$A \propto \sqrt{T}.$$

由于 $100 \text{ mK} = 0.100 \text{ K}$,

$$\frac{A_{\text{cold}}}{A_{\text{warm}}} = \sqrt{\frac{0.100}{300}} = \frac{1}{\sqrt{3000}} = 0.0183.$$

因此，振幅减小的倍数为

$$\boxed{\frac{A_{\text{warm}}}{A_{\text{cold}}} = \sqrt{3000} \simeq 54.8}.$$

这一估算采用经典热振动模型，并忽略量子零点运动。

A(g)

令

$$T_i = 4.2 \text{ K}, \quad T_f = 0.100 \text{ K}, \quad s_i = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

题给的比热容规律为

$$s(T) = s_i \left(\frac{T}{T_i} \right)^3.$$

必须从球中移走的热量为

$$Q = m \int_{T_f}^{T_i} s(T) dT = \frac{ms_i}{T_i^3} \int_{T_f}^{T_i} T^3 dT.$$

因此,

$$Q = \frac{ms_i}{4T_i^3} (T_i^4 - T_f^4) = \frac{ms_i T_i}{4} \left[1 - \left(\frac{T_f}{T_i} \right)^4 \right].$$

代入数值, 得

$$Q = \frac{(1168)(0.072)(4.2)}{4} \left[1 - \left(\frac{0.100}{4.2} \right)^4 \right] \simeq 88.3 \text{ J}.$$

在平均制冷功率为 $P = 1.00 \times 10^{-3} \text{ W}$ 时,

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{88.3}{10^{-3}} \text{ s}.$$

因此

$$\boxed{t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}}.$$

B(a)

设发射频率为 ν_R 。按照题目指定的牛顿模型，赋予光子一个与其能量等效的引力质量

$$m_\gamma = \frac{h\nu_R}{c^2}.$$

将这一质量从太阳表面移至无穷远处所需的功为

$$W = \int_R^\infty \frac{GMm_\gamma}{r^2} dr = \frac{GMm_\gamma}{R}.$$

由能量守恒,

$$h\nu_\infty = h\nu_R - \frac{GMm_\gamma}{R}.$$

代入 $m_\gamma = h\nu_R/c^2$,

$$h\nu_\infty = h\nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right),$$

因此

$$\boxed{\nu_{\infty} \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right)}.$$

这是弱场条件下的一阶结果。用发射时的能量计算 m_{γ} 只会引入更高阶的修正。对于太阳，

$$\frac{GM}{Rc^2} = 2.12 \times 10^{-6} \ll 1,$$

所以这一近似完全合理。

B(b)

定义

$$\epsilon = \frac{GM}{rc^2}, \quad q = 1 - \epsilon.$$

频率减小为原来的 q 倍，对应于时钟周期增大为原来的 $1/q$ 倍。根据题目给出的长度收缩规则，相应的长度尺度减小为原来的 q 倍。

因此，在题目与远处坐标进行的比较中，有效速度满足

$$\frac{c'_r}{c} \simeq \frac{q}{1/q} = q^2.$$

由此可得

$$n_r = \frac{c}{c'_r} \simeq \frac{1}{(1 - \epsilon)^2}.$$

展开至一阶，

$$(1 - \epsilon)^{-2} = 1 + 2\epsilon + O(\epsilon^2).$$

因此，

$$\boxed{n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}}, \quad \boxed{\alpha = 2}.$$

这里， c'_r 是题目折射率模型中使用的有效坐标速度。使用固有长度和固有时间进行局部测量，得到的仍是真空光速 c 。

B(c)

取入射光线近似沿 x 方向传播，碰撞参数为 b 。沿其未受扰动的路径，

$$y = b, \quad r = \sqrt{x^2 + b^2}.$$

折射率为

$$n(x, y) = 1 + \frac{\alpha GM}{c^2 \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

对于连续变化的折射率，由斯涅尔定律可得光线方程

$$\frac{d}{ds}(n\hat{\mathbf{t}}) = \nabla n,$$

其中 $\hat{\mathbf{t}}$ 是光线的单位切向量。当偏折很小时， $ds \simeq dx$ 且 $n \simeq 1$ ，因此其横向分量变为

$$\frac{d\theta}{dx} \simeq \frac{\partial n}{\partial y}.$$

求导得

$$\frac{\partial n}{\partial y} = -\frac{\alpha GM y}{c^2(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

在一阶近似下，可沿直线路径 $y = b$ 计算此式：

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha GM b}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}.$$

利用题给积分，

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha GM b}{c^2} \frac{2}{b^2} = -\frac{2\alpha GM}{bc^2}.$$

负号表示光线朝太阳方向弯曲。对于掠过太阳边缘的光线， $b \simeq R$ ，且 $\alpha = 2$ ，由此得到偏折角的大小

$$\theta = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

代入数值，得

$$\theta = \frac{4(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}{(6.95 \times 10^8)(3.00 \times 10^8)^2}.$$

于是

$$\theta = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad} \quad \text{朝向太阳}.$$

这约为 1.75 角秒。

解答已与官方解答核对。