

IPhO 2000

Teorik sorular ve çözümler · Leicester, Birleşik Krallık · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/2000/

Soru 1: Beş kısa bölüm: bungee atlayıcısı, ısı makinesi, U-Pb tarihlemesiyle Dünya'nın yaşı, düzgün yüklü küre, Dünya'nın manyetik alanında dönen bakır halka

A

Bir bungee atlayıcısı uzun, esnek bir ipin bir ucuna bağlıdır. Esnek ipin diğer ucu yüksek bir köprüye sabitlenmiştir. Atlayıcı köprüden kendini bırakarak durgun hâlden aşağıdaki nehre doğru düşer. Suya çarpmaz. Atlayıcının kütlesi m , ipin gerilmemiş uzunluğu L , ipin kuvvet sabiti (1 m uzama oluşturmak için gereken kuvvet) k ve yerçekimi alan şiddeti g 'dir.

Şunları varsayabilirsiniz:

- atlayıcı, ipin ucuna bağlı m kütleli bir noktasal cisim olarak ele alınabilir,
- ipin kütlesi m 'ye kıyasla ihmal edilebilir,
- ip Hooke yasasına uyar,
- atlayıcının düşüşü boyunca hava direnci ihmal edilebilir.

Aşağıdakiler için ifadeler elde edin ve cevap kâğıdına yazın:

- (a) atlayıcının ilk kez anlık olarak durgun hâle gelene kadar düştüğü y mesafesi,
- (b) atlayıcının bu düşüş sırasında ulaştığı en büyük sürat v ,
- (c) düşüş sırasında ilk kez durgun hâle gelene kadar geçen t süresi.

B

Bir ısı makinesi, farklı T_A ve T_B sıcaklıklarındaki ($T_A > T_B$) özdeş iki cisim arasında çalışmaktadır; her bir cismin kütlesi m ve sabit özgül ısı kapasitesi s 'dir. Cisimler sabit basınçta kalır ve hâl değiştirmez.

- (a) Isı makinesi sistemden teorik olarak mümkün olan en büyük miktarda mekanik işi elde ediyorsa, A ve B cisimlerinin ulaştığı son sıcaklık T_0 için tüm işlem adımlarını göstererek bir ifade elde edin.

Son sıcaklık T_0 için bulduğunuz ifadeyi cevap kâğıdına yazın.

- (b) Buradan hareketle, elde edilebilecek bu en büyük iş miktarı için bir ifade elde edin ve cevap kâğıdına yazın.

Isı makinesi, her birinin hacmi 2.50 m^3 olan iki su tankı arasında çalışmaktadır. Tanklardan biri 350 K , diğeri ise 300 K sıcaklığındadır.

- (c) Elde edilebilecek en büyük mekanik enerji miktarını hesaplayın. Değeri cevap kâğıdına yazın.

Suyun özgül ısı kapasitesi $= 4.19 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Suyun yoğunluğu $= 1.00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

C

Dünya oluştuğunda ^{238}U ve ^{235}U izotoplarının bulunduğu, ancak bunların bozunma ürünlerinin bulunmadığı varsayılmaktadır. Dünya'nın yaşı T 'yi belirlemek için ^{238}U ve ^{235}U bozunmaları kullanılır.

(a) ^{238}U izotopu, 4.50×10^9 yıllık yarı ömürle bozunur. Ortaya çıkan radyoaktif serideki bozunma ürünlerinin yarı ömürleri buna kıyasla kısadır; ilk yaklaşımda bunların varlığı ihmal edilebilir. Bozunma serisi, kararlı kurşun izotopu ^{206}Pb ile son bulur.

t süresi boyunca radyoaktif bozunmayla üretilen ve ^{206}Pb ile gösterilen ^{206}Pb atomlarının sayısı için, ^{238}N ile gösterilen günümüzdeki ^{238}U atomlarının sayısı ve ^{238}U 'nun yarı ömrü cinsinden bir ifade elde edin ve cevap kâğıdına yazın. (10^9 yıl birimini kullanarak çalışmak işinizi kolaylaştırabilir.)

(b) Benzer şekilde, ^{235}U , 0.710×10^9 yıllık yarı ömürle, daha kısa yarı ömürlü ürünlerden oluşan bir seri üzerinden bozunarak kararlı ^{207}Pb izotopunu oluşturur.

^{207}Pb 'yi ^{235}N ve ^{235}U 'nun yarı ömrüyle ilişkilendiren bir denklemi cevap kâğıdına yazın.

(c) Bir kurşun cevheriyle karışmış uranyum cevheri, kütle spektrometresiyle analiz edilir. Üç kurşun izotopunun, ^{204}Pb , ^{206}Pb ve ^{207}Pb 'nin bağıl derişimleri ölçülür ve atom sayılarının oranları sırasıyla 1.00 : 29.6 : 22.6 olarak bulunur. ^{204}Pb izotopu radyoaktif kökenli **olmadığı** için referans olarak kullanılır. Saf bir kurşun cevherinin analizi, 1.00 : 17.9 : 15.5 oranlarını verir.

$^{238}\text{N} : ^{235}\text{N}$ oranının 137 : 1 olduğu verildiğine göre, T 'yi içeren bir denklem türetin ve cevap kâğıdına yazın.

(d) T 'nin her iki uranyum izotopunun yarı ömürlerinden çok daha büyük olduğunu varsayın ve buradan T için yaklaşık bir değer elde edin.

(e) Bu yaklaşık değerin daha uzun olan yarı ömürden belirgin ölçüde büyük olmadığı açıktır; ancak bu değer, T için çok daha doğru bir değer elde etmekte kullanılabilir. Buradan hareketle veya başka bir yöntemle, Dünya'nın yaşını %2 hata payı içinde tahmin edin.

D

Q yükü, boşlukta, yarıçapı R olan küresel bir hacim boyunca düzgün olarak dağılmıştır.

(a) Kürenin merkezinden r uzaklıktaki elektrik alan şiddeti için, $r \leq R$ ve $r > R$ durumlarında geçerli ifadeleri türetin.

(b) Bu yük dağılımına ait toplam elektrik enerjisi için bir ifade elde edin.

(a) ve (b) için cevaplarınızı cevap kâğıdına yazın.

E

İnce bakır telden yapılmış dairesel bir halka, Dünya'nın manyetik alanı içindeki bir noktada düşey bir çapı etrafında dönmeye başlatılır. Dünya'nın manyetik alanının bu noktadaki manyetik akı yoğunluğu $44.5 \mu\text{T}$ olup yatayın altında 64° açı yapacak şekilde yönelmiştir. Bakırın yoğunluğunun

$8.90 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ve öz direncinin $1.70 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ olduğu verildiğine göre, halkanın açısal hızının yarıya inmesinin ne kadar süreceğini hesaplayın. İşlem adımlarınızı gösterin ve süreyi cevap kâğıdına yazın. Bu süre, bir tam dönüş için geçen süreden çok daha uzundur.

Desteklerin ve havanın sürtünme etkilerinin ihmal edilebilir olduğunu varsayabilirsiniz; ayrıca bu soru kapsamında, gerçekte ihmal edilebilir olmamalarına rağmen özindüktans etkilerini ihmal etmelisiniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **A(a):**

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

- **A(b):**

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

- **A(c):**

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

- **B(a):**

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

- **B(b):**

$$W_{\max} = ms \left(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B} \right) = ms \left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B} \right)^2.$$

- **B(c):**

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

- **C(a):** $h_{238} = 4.50 \times 10^9$ yr olarak yazılırsa,

$$^{206}_{\text{n}} = ^{238}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right).$$

- **C(b):** $h_{235} = 0.710 \times 10^9$ yr olarak yazılırsa,

$$^{207}_{\text{n}} = ^{235}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right).$$

- **C(c):**

$$\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7}, \quad T > 0.$$

- **C(d):**

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}.$$

- **C(e):**

$$T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr}.$$

- **D(a):** Elektrik alanın radyal bileşeni

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3}, & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

şeklindedir. Alan $Q > 0$ için dışarıya, $Q < 0$ için içeriye doğrudur ve merkezde sıfırdır.

- **D(b):**

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

- **E:**

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

Çözüm

A(a)

Köprüden aşağıya doğru ölçülen uzaklık z olsun. İp, $z = L$ olana kadar gevşektir; bundan sonra uzaması $x = z - L$, gerilme kuvveti ise kx olur.

Enerji kaybı olmadığından mekanik enerji korunur. En alt noktada, $z = y$ iken, atlayıcı anlık olarak durmaktadır. Dolayısıyla

$$mgy = \frac{1}{2}k(y - L)^2.$$

Eşdeğer olarak, $x = y - L$ alınırsa,

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mgL}{k} = 0.$$

Fiziksel olarak kabul edilebilir kök, pozitif uzamaya karşılık gelir:

$$x = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgL}{k}}.$$

Böylece

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

A(b)

Aşağı yönlü ivme pozitif olduğu sürece sürat artar. İp gerildikten sonra,

$$m\ddot{z} = mg - k(z - L).$$

Bu nedenle sürat, ivme ilk kez sıfır olduğunda en büyük değerine ulaşır:

$$z = L + \frac{mg}{k}.$$

İpin gergin olduğu herhangi bir noktada enerji korunumu

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz - \frac{1}{2}k(z - L)^2.$$

eşitliğini verir. En büyük süratin elde edildiği konumda,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg \left(L + \frac{mg}{k} \right) - \frac{1}{2}k \left(\frac{mg}{k} \right)^2 = mgL + \frac{m^2g^2}{2k}.$$

Buradan

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

A(c)

Başlangıçtaki L mesafelik serbest düşüş sırasında geçen süre ve son sürat

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}, \quad v_1 = \sqrt{2gL}.$$

şeklindedir.

İpin ilk kez gerildiği anı $\tau = 0$ olarak alın ve

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{mg}{k}.$$

tanımlarını yapın. Bundan sonraki hareket denklemini

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g.$$

olur. $x(0) = 0$ ve $\dot{x}(0) = v_1$ başlangıç koşullarıyla çözümü

$$x(\tau) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega_0 \tau) + \frac{v_1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau,$$

dolayısıyla

$$\dot{x}(\tau) = x_{\text{eq}} \omega_0 \sin \omega_0 \tau + v_1 \cos \omega_0 \tau.$$

olur.

Bu hızın ilk kez sıfır olması $\pi/2 < \omega_0 \tau < \pi$ aralığında gerçekleşir. Sonuç olarak,

$$\omega_0 \tau = \pi - \arctan \left(\frac{v_1}{x_{\text{eq}} \omega_0} \right) = \pi - \arctan \sqrt{\frac{2kL}{mg}}.$$

Serbest düşüş süresi eklenirse

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

elde edilir.

B(a)

En büyük iş, cisimler ortak bir sıcaklığa ulaşıncaya kadar makineyi cisimlerin anlık sıcaklıkları arasında tersinir biçimde çalıştırarak elde edilir. Aşağıdaki tüm sıcaklıklar mutlak sıcaklıklardır.

Her cismin sabit basınçtaki ısı kapasitesi sabit olup ms 'ye eşittir. Dolayısıyla entropi değişimi

$$\Delta S = ms \int \frac{dT}{T}.$$

olur. Makine çevrimsel olarak çalıştığından net entropi değişimi sıfırdır. Tersinir çalışma için cisimlerin toplam entropi değişimi de sıfırdır:

$$ms \int_{T_A}^{T_0} \frac{dT}{T} + ms \int_{T_B}^{T_0} \frac{dT}{T} = 0.$$

Böylece

$$\ln \frac{T_0}{T_A} + \ln \frac{T_0}{T_B} = 0,$$

ve buradan

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

elde edilir.

Bunun neden en büyük işi verdiğini görmek için, tersinmez bir süreçte toplam entropi artışının pozitif olacağını ve bunun

$$T_0 \geq \sqrt{T_A T_B}.$$

koşulunu gerektireceğini göz önüne alalım. Daha yüksek bir son sıcaklık, cisimlerde daha fazla ısı enerji bırakır ve dolayısıyla daha az iş elde edilmesine olanak tanır.

B(b)

Başlangıçta daha sıcak olan cisimden alınan ısı

$$Q_H = ms(T_A - T_0),$$

ve başlangıçta daha soğuk olan cisme verilen ısı

$$Q_C = ms(T_0 - T_B).$$

olur. Çevrimsel çalışan makine için enerji korunumu

$$W = Q_H - Q_C = ms(T_A + T_B - 2T_0).$$

eşitliğini verir. Tersinir süreçteki son sıcaklık yerine konursa,

$$W_{\max} = ms \left(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B} \right) = ms \left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B} \right)^2.$$

B(c)

Her tanktaki suyun kütlesi

$$m = \rho V = (1.00 \times 10^3)(2.50) = 2.50 \times 10^3 \text{ kg.}$$

olur. Tersinir süreçteki son sıcaklık

$$T_0 = \sqrt{350 \times 300} = 324.037 \dots \text{ K.}$$

olur. Bu değer ara adımlarda yuvarlanmadan kullanılırsa,

$$\begin{aligned} W_{\max} &= (2.50 \times 10^3)(4.19 \times 10^3) \left[350 + 300 - 2\sqrt{350 \times 300} \right] \\ &= 2.0174 \dots \times 10^7 \text{ J.} \end{aligned}$$

Böylece

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

C(a)

Yarı ömrü h olan bir radyoaktif ana izotop için,

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{h}.$$

Dolayısıyla başlangıçtaki ana izotop atomlarının sayısı, günümüzdeki sayı cinsinden ifade edilebilir:

$$N(0) = N(t)e^{\lambda t} = N(t)2^{t/h}.$$

Ara ürünlerin ömürleri ihmal edildiğinde, bozunan her uranyum atomu, serinin sonunda bir kurşun atomu üretir. Başlangıçta bozunma ürünleri bulunmadığından,

$$n(t) = N(0) - N(t) = N(t) \left(2^{t/h} - 1 \right).$$

^{238}U serisi için,

$$^{206}_{\text{n}} = ^{238}\text{N} \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right), \quad h_{238} = 4.50 \times 10^9 \text{ yr.}$$

C(b)

Aynı akıl yürütme ^{235}U serisine uygulanırsa,

$$^{207}_{\text{n}} = ^{235}\text{N} \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right), \quad h_{235} = 0.710 \times 10^9 \text{ yr.}$$

C(c)

Saf kurşun cevheri, başlangıçta mevcut olan kurşunun izotop oranlarını verir. Uranyum bozunmasıyla üretilen kurşunu bulmak için, başlangıçta mevcut olan bu miktarlar karışık örnekteki miktarlardan çıkarılmalıdır.

Karışık örnekteki ^{204}Pb atomlarının sayısı N_{204} olsun. Bu izotop radyojenik olmadığından,

$$^{206}_{\text{n}} = (29.6 - 17.9)N_{204} = 11.7N_{204},$$

ve

$$^{207}_{\text{n}} = (22.6 - 15.5)N_{204} = 7.1N_{204}.$$

Böylece

$$\frac{{}^{207}\text{n}}{{}^{206}\text{n}} = \frac{7.1}{11.7}.$$

Bozunma denklemleri ve günümüzdeki uranyum oranı kullanılırsa,

$$\frac{7.1}{11.7} = \frac{{}^{235}\text{N}}{{}^{238}\text{N}} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = \frac{1}{137} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1}.$$

Dolayısıyla istenen denklem

$$\boxed{\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7} = 83.13675\dots}, \quad T > 0.$$

olur.

C(d)

Belirtilen $T \gg h_{238}, h_{235}$ yaklaşımı altında,

$$2^{T/h} - 1 \simeq 2^{T/h}.$$

Tarihleme denklemi

$$2^{T(1/h_{235} - 1/h_{238})} \simeq 137 \frac{7.1}{11.7}.$$

hâline gelir. Logaritma alınırsa,

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})}.$$

Sayısal olarak,

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(83.13675\dots)}{(\ln 2)(1/0.710 - 1/4.50)} \times 10^9 \text{ yr},$$

dolayısıyla

$$\boxed{T_{\text{approx}} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}}.$$

Bu değer yalnızca yaklaşık $1.19h_{238}$ olduğundan, doğru bir sonuç elde etmek için ${}^{238}\text{U}$ ifadesindeki 1 çıkarma işleminin ihmal edilmesi uygun değildir.

C(e)

Her iki 1 çıkarma işlemini de koruyalım.

$$u = \frac{T}{10^9 \text{ yr}},$$

olarak yazıldığında,

$$F(u) \equiv \frac{2^{u/0.710} - 1}{2^{u/4.50} - 1} = 83.13675\dots$$

denklemini çözmemiz gerekir. Yakın değerler için hesaplamalar

$$F(4.55) = 82.666\dots, \quad F(4.56) = 83.232\dots$$

sonuçlarını verir. Dolayısıyla aranan yaş 4.55 ile 4.56 milyar yıl arasındadır. Daha hassas bir sayısal çözüm $u = 4.5583157\dots$ olup

$$T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr},$$

sonucunu verir; bu sonuç, istenen %2 hata sınırının oldukça içindedir.

D(a)

Düzgün hacimsel yük yoğunluğu

$$\rho_q = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3}.$$

olur. Küresel simetri nedeniyle elektrik alan radyal doğrultudadır ve eş merkezli küresel bir Gauss yüzeyi üzerinde büyüklüğü sabittir.

$r \leq R$ için yüzeyin çevrelediği yük

$$Q_{\text{enc}} = \rho_q \frac{4\pi r^3}{3} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

olur. Gauss yasası

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0},$$

ve buradan

$$E_r = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (r \leq R).$$

sonucunu verir.

$r > R$ için yüzeyin çevrelediği yük Q olduğundan,

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R).$$

Alan merkezde sıfırdır ve yüzeyde süreklidir; yüzeydeki değeri

$$E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

olur.

D(b)

Boşlukta elektrostatik enerji yoğunluğu

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

olur. Toplam enerji, yüklü kürenin hem içindeki hem de dışındaki alanı içerir:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\int_0^R E^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty E^2 4\pi r^2 dr \right].$$

Yukarıda bulunan alanlar yerine konursa,

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right].$$

Böylece

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right),$$

ve

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

E

Halkanın yarıçapı a , telin kesit alanı ise S olsun. Bakırın kütle yoğunluğunu ρ_m , elektriksel öz direncini ise ρ_e ile gösterelim.

Halkanın kütlesi ve direnci

$$M = 2\pi a S \rho_m, \quad \mathcal{R} = \rho_e \frac{2\pi a}{S}.$$

olur. Bir çapı etrafında dönen ince bir halkanın eylemsizlik momenti

$$I = \frac{1}{2} M a^2 = \pi \rho_m S a^3.$$

olur.

Halkanın düzlemi düşey kaldığından, normali yataydır. Dünya'nın alanının yalnızca yatay bileşeni manyetik akıya katkıda bulunur:

$$B_h = B \cos 64^\circ.$$

Halkanın normali ile bu yatay alan arasındaki açı θ olsun. Akı

$$\Phi = B_h \pi a^2 \cos \theta.$$

olur. $\dot{\theta} = \omega$ olmak üzere, Faraday yasası

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B_h \pi a^2 \omega \sin \theta.$$

sonucunu verir.

İstendiği gibi özindüktans ihmal edildiğinde akım

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}}.$$

olur. Dolayısıyla Joule ısısının anlık üretilme hızı

$$P = i^2 \mathcal{R} = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{\mathcal{R}} \omega^2 \sin^2 \theta.$$

olur.

Belirtilen sönüm süresi bir tam dönüş süresinden çok daha uzun olduğundan, ω her dönüş sırasında yalnızca çok az değişir. Bu nedenle

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2},$$

eşitliğini kullanabiliriz; böylece

$$\langle P \rangle = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2\mathcal{R}} \omega^2.$$

elde edilir.

Sürtünme olmadığından, bu ısı dönme kinetik enerjisinden sağlanır:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = -\langle P \rangle.$$

Dolayısıyla ortalama açısal hız

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2I\mathcal{R}} \omega.$$

denklemini sağlar. Ancak

$$I\mathcal{R} = (\pi \rho_m S a^3) \left(\rho_e \frac{2\pi a}{S} \right) = 2\pi^2 \rho_m \rho_e a^4,$$

olduğundan geometrik büyüklükler sadeleşir:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2}{4\rho_m \rho_e} \omega.$$

Buradan

$$\omega(t) = \omega(0) \exp \left(-\frac{B_h^2 t}{4\rho_m \rho_e} \right).$$

$\omega(t_{1/2}) = \omega(0)/2$ koşulu uygulanırsa

$$t_{1/2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B_h^2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B^2 \cos^2 64^\circ}.$$

elde edilir.

Sayısal olarak,

$$B_h = (44.5 \times 10^{-6}) \cos 64^\circ = 1.95075 \dots \times 10^{-5} \text{ T},$$

ve

$$t_{1/2} = \frac{4(8.90 \times 10^3)(1.70 \times 10^{-8}) \ln 2}{(44.5 \times 10^{-6})^2 \cos^2 64^\circ}.$$

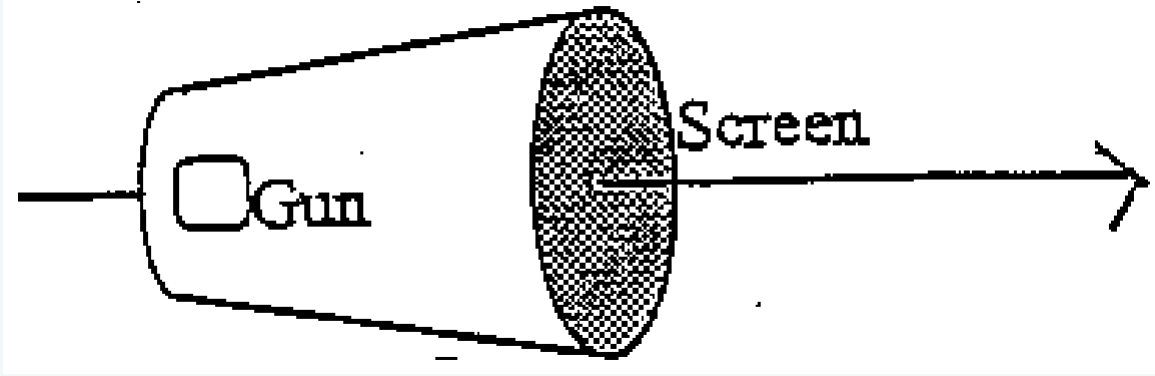
Böylece

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

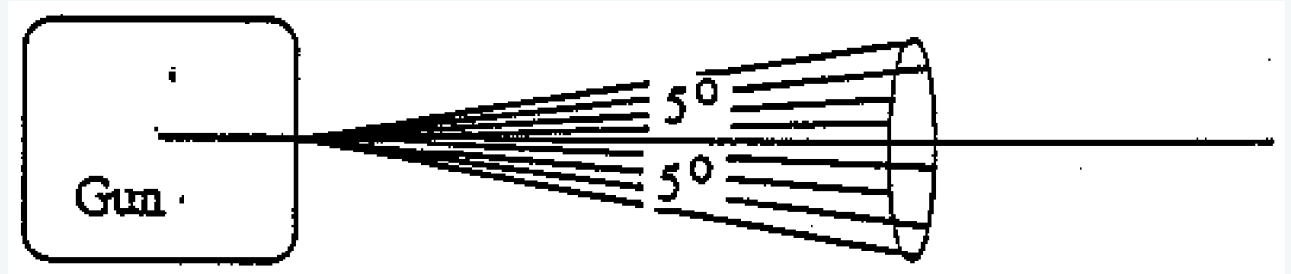
Soru 2: Elektronun yük/kütle oranı (CRT'de manyetik odaklama; yüklü levhalar arasındaki beta parçacıkları)

(a) Bir elektron tabancası ve bir ekrandan oluşan bir katot ışın tüpü (CRT), şekil 2.3'te gösterildiği gibi, büyüklüğü $\mathbf{B}$ olan düzgün ve sabit bir manyetik alanın içine, manyetik alan tabancanın demet eksenine paralel olacak biçimde yerleştirilmiştir.



Şekil 2.3

Elektron demeti, elektron tabancasının anodundan eksen üzerinde çıkar; ancak şekil 2.4'te gösterildiği gibi eksenden 5° 'ye kadar açılarla ıraksar. Ekranda genellikle dağınık bir leke oluşur, fakat manyetik alanın belirli değerlerinde keskin biçimde odaklanmış bir leke elde edilir.



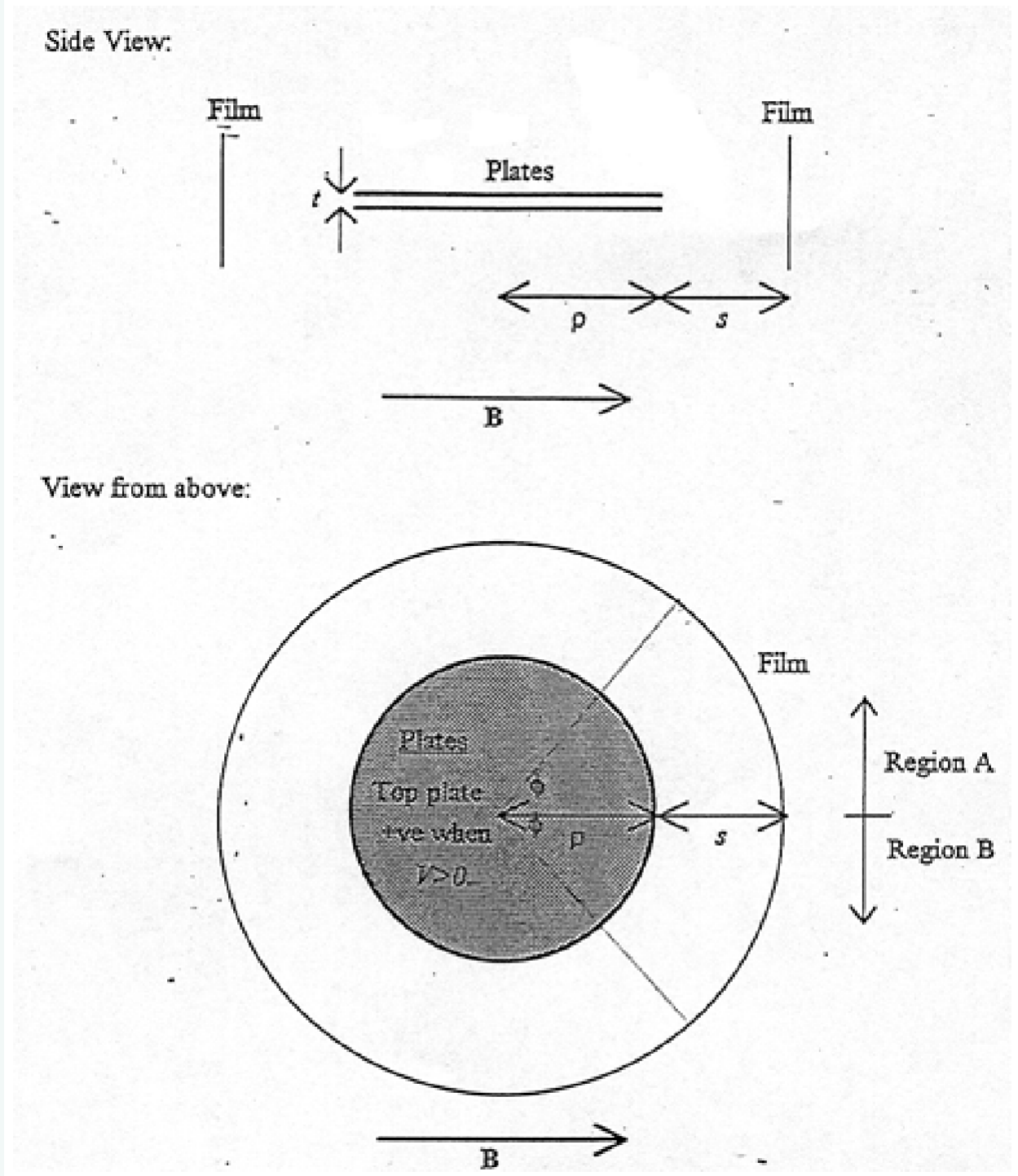
Şekil 2.4

Elektron tabancasından ayrılırken başlangıçta eksenle β açısı (burada $0 \leq \beta \leq 5^\circ$) yaparak hareket eden bir elektronun hareketini ve bu hareketin eksene paralel ve dik bileşenlerini ele alarak, elektronun yük/kütle oranı e/m için aşağıdaki nicelikler cinsinden bir ifade türetiniz:

odaklanmış bir leke elde edilen en küçük manyetik alan,
elektron tabancasındaki hızlandırıcı potansiyel farkı V
($V < 2 \text{ kV}$ olduğuna dikkat ediniz),
ve anot ile ekran arasındaki uzaklık D .

İfadenizi cevap kâğıdının 2a bölümünde ayrılan kutuya yazınız.

(b) Elektronun yük/kütle oranını belirlemek için başka bir yöntem ele alınız. Düzeneğin yandan ve üstten görünüşleri şekil 2.5'te verilmiş, manyetik alanın yönü $\mathbf{B}$ ile işaretlenmiştir. Bu düzgün $\mathbf{B}$ manyetik alanının içine, yarıçapı ρ olan ve aralarında çok küçük bir t uzaklığı bulunan iki dairesel pirinç levha yerleştirilmiştir. Levhalar arasında V potansiyel farkı korunmaktadır. Levhalar birbirine paralel ve eş eksenlidir; ancak eksenleri manyetik alana diktir. Levhalarla eş eksenli tutulan, yarıçapı $\rho + s$ olan bir silindirin eğri yüzeyinin iç kısmı fotoğraf filmiyle kaplıdır. Başka bir deyişle film, levhaların kenarlarından radyal doğrultuda s uzaklığındadır. Düzeneğin tamamı *vakuma* yerleştirilmiştir. t 'nin hem s 'den hem de ρ 'dan çok daha küçük olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 2.5

Levhaların merkezleri arasına, çeşitli hızlarda β parçacıklarını her yöne eşit biçimde yayan noktasal bir β parçacığı kaynağı yerleştirilir ve *aynı film parçası* üç farklı koşulda ışınlanır:

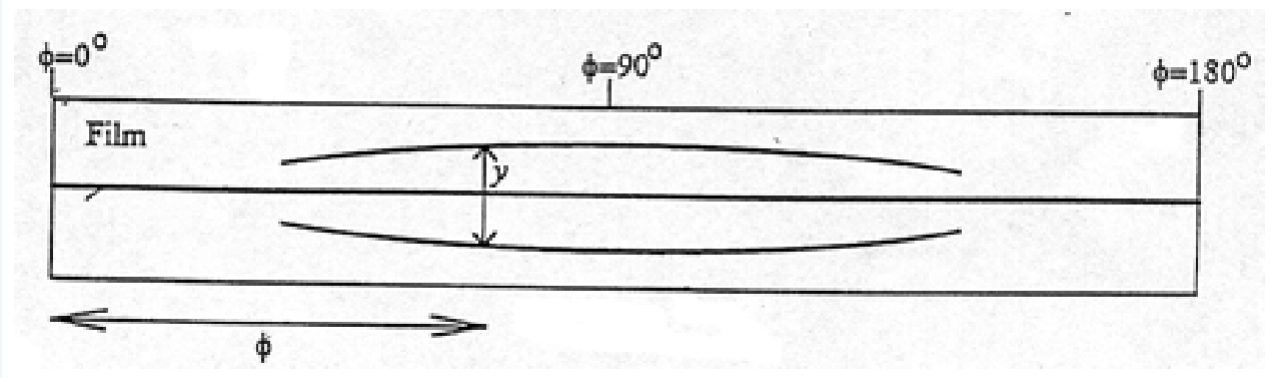
ilk olarak $B = 0$ ve $V = 0$ iken,

ikinci olarak $B = B_0$ ve $V = V_0$ iken ve

üçüncü olarak $B = -B_0$ ve $V = -V_0$ iken;

burada V_0 ve B_0 pozitif sabitlerdir. $V > 0$ iken üst levhanın pozitif ($V < 0$ iken negatif) yüklü olduğuna ve $B > 0$ iken manyetik alanın şekil 2.5'te tanımlanan yönde ($B < 0$ iken ters yönde) olduğuna dikkat ediniz. Bu kısımda levhalar arasındaki aralığın ihmal edilebilecek kadar küçük olduğunu varsayabilirsiniz.

Filmin iki bölgesi şekil 2.5'te A ve B olarak etiketlenmiştir. Işınlama ve banyo işlemlerinden sonra bu bölgelerden birinin çizimi şekil 2.6'da verilmiştir. Bu parça hangi bölgeden alınmıştır (cevap kâğıdınıza A veya B yazınız)? Elektronla etki eden kuvvetlerin yönlerini göstererek cevabınızı gerekçelendiriniz.



Şekil 2.6

(c) Işınlama ve banyo işlemlerinden sonra filmin çizimi şekil 2.6'da verilmiştir. En dıştaki iki iz arasındaki uzaklık mikroskopla ölçülür; bu uzaklık (y), belirli bir açı için şekil 2.6'da da gösterilmiştir. Sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir; ϕ açısı, şekil 2.5'te manyetik alan ile levhaların merkezini film üzerindeki noktaya birleştiren doğru arasındaki açı olarak tanımlanmıştır.

Alanla yapılan açı /derece	ϕ	90	60	50	40	30	23
İzler arası uzaklık /mm	y	17.4	12.7	9.7	6.4	3.3	İzin sonu

Sistem parametrelerinin sayısal değerleri aşağıda verilmiştir:

$$B_0 = 6.91 \text{ mT} \quad V_0 = 580 \text{ V} \quad t = 0.80 \text{ mm} \\ s = 41.0 \text{ mm}$$

Ayrıca ışığın boşluktaki hızını $3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, elektronun durgun kütesini ise $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ alabilirsiniz.

Gözlenen en büyük β parçacığı kinetik enerjisini belirleyiniz.

En büyük kinetik enerjiyi, eV cinsinden sayısal bir sonuç olarak cevap kâğıdının 2f bölümündeki kutuya yazınız.

(d) (f) kısmında [yani yukarıdaki (c) kısmında] verilen bilgileri kullanarak elektronun yük/durgun kütle oranı için bir değer elde ediniz. Bunu, verilen kâğıda uygun bir grafik çizerek yapınız.

Yatay ve düşey eksenlerde gösterilen nicelikleri hem grafiğin üzerinde hem de cevap kâğıdının 2g bölümünde ayrılan kutularda *cebirsel olarak* belirtiniz.

Elektronun yük/kütle oranı için bulduğunuz değeri cevap kâğıdının 2g bölümünde ayrılan kutuya yazınız.

Gözlemlerdeki sistematik bir hata nedeniyle elde ettiğiniz cevabın kabul edilen değerle uyuşmayabileceğine dikkat ediniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- (a) En küçük pozitif odaklama alanı $B_{\min}$ için,

$$\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}.$$

- (b) B bölgesi. $B = B_0$, $V = V_0$ için elektriksel kuvvet yukarı, manyetik kuvvet ise aşağı yönlüdür. Her iki alanın yönünü tersine çevirmek her iki kuvvetin de yönünü tersine çevirir.
- (c)

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV}$$

Bu değer, $v_{\max} \simeq 2.69 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ hızına karşılık gelir.

- (d) Düşey ekseninde $Y = y$ 'yi, yatay ekseninde ise boyutsuz

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}.$$

niceliğini gösteren bir grafik çiziniz. Doğrunun eğimi yaklaşık $1.855 \times 10^{-2} \text{ m}$ olup buradan

$$\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}.$$

elde edilir.

Çözüm

Çözüm boyunca $e > 0$, elektron yükünün büyüklüğünü gösterir; elektronun yükü $-e$ 'dir. Durgun kütlesi m_0 'dır.

(a)

Hızlandırıcı gerilim 2 kV 'un altında olduğundan elektronun kinetik enerjisi durgunluk enerjisinden çok daha küçüktür. $m \simeq m_0$ olarak görelilik dışı mekaniği kullanırız:

$$eV = \frac{1}{2}mv^2.$$

Tabancadan çıkıştaki hız bileşenleri

$$v_{\parallel} = v \cos \beta, \quad v_{\perp} = v \sin \beta.$$

şeklinde dir.

Manyetik alan, kendisine paralel doğrultuda kuvvet uygulamaz. Bu nedenle paralel hareket düzgün doğrusal, dik hareket ise çemberseldir ve

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB}, \quad \omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

bağıntıları geçerlidir.

Ortaya çıkan yörünge bir helistir. Eksen üzerinde harekete başlayan bir elektron, her tam turdan sonra eksene döner. En küçük pozitif odaklama alanı, ekrana ulaşmadan önce bir tur tamamlanmasına karşılık gelir; dolayısıyla

$$D = v \cos \beta T = \frac{2\pi m v \cos \beta}{e B_{\min}}.$$

Karesini alıp $v^2 = 2eV/m$ yerine yazıldığında

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V \cos^2 \beta}{B_{\min}^2 D^2}.$$

elde edilir.

Dar demet için $\beta \leq 5^\circ$ olduğundan $\cos \beta \simeq 1$ alırız. Böylece

$$\boxed{\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}}.$$

Farklı β değerleri içeren bir demette odaklama yaklaşıktır: elektronların eksen doğrultusundaki hızları birbirinden biraz farklıdır. 5° 'de $1 - \cos \beta$ yalnızca yaklaşık 0.0038'dir.

(b)

Lorentz kuvveti

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

şeklindedir.

$V = V_0 > 0$ için üst levha pozitifdir; dolayısıyla elektrik alan aşağı, elektrona etki eden elektriksel kuvvet ise yukarı yönlüdür.

$B = B_0 > 0$ için üstten görünüşe vektörel çarpım kuralı uygulandığında şu sonuçlar elde edilir:

Elektronun ilerlediği bölge	Elektriksel kuvvet	Manyetik kuvvet
A bölgesi	Yukarı	Yukarı
B bölgesi	Yukarı	Aşağı

Levhalar arasındaki aralık ihmal edilebilecek kadar küçük olduğunda elektronlar, ancak düşey kuvvetleri dengelenirse levhaların arasından geçebilir. Bu, **B bölgesinde** mümkündür.

Elektron levhalar arasında ilerlerken hızı ile manyetik alan arasındaki açı θ olsun. Kenar etkileri ihmal edildiğinde,

$$E_0 = \frac{V_0}{t}.$$

Kuvvet dengesi için

$$eE_0 = eB_0 v \sin \theta,$$

ya da

$$\boxed{v \sin \theta = \frac{V_0}{B_0 t}}.$$

olmalıdır.

Hem B 'nin hem de V 'nin işaretini tersine çevirmek her iki kuvvetin yönünü de tersine çevirir; dolayısıyla B bölgesine doğru ilerleyen elektronlar için kuvvetler yine dengelenir.

Elektron levhalardan çıktıktan sonra elektriksel kuvvet ortadan kalkarken manyetik kuvvet varlığını sürdürür. Buna göre:

- $B = B_0$, $V = V_0$ alttaki eğri izi oluşturur.
- $B = -B_0$, $V = -V_0$ üstteki eğri izi oluşturur.
- $B = V = 0$ ortadaki düz izi oluşturur.

Bunlar şekil 2.6'da gösterilen üç izdir ve cevabın

B bölgesi.

olduğunu ortaya koyar.

(c)

Dar aralık yaklaşımını kullanır ve sonraki sapmanın başat mertebesinde elektronun çıkış açısı θ 'yı gözlenen ϕ açısına eşit alırız.

$$u = \frac{V_0}{B_0 t}.$$

olarak tanımlayalım. Sayısal olarak,

$$u = \frac{580}{(6.91 \times 10^{-3})(0.80 \times 10^{-3})} = 1.0492 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

Hız seçimi koşulu

$$v(\phi) = \frac{u}{\sin \phi}.$$

biçimini alır.

ϕ , 90° 'den azaldıkça seçilen hız artar. Bu nedenle gözlenen en küçük açı olan 23° , en büyük hıza karşılık gelir:

$$v_{\max} = \frac{1.0492 \times 10^8}{\sin 23^\circ} = 2.6852 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 0.8951c.$$

"İzin sonu" ifadesi bu açısal sınırı belirtir; y için sayısal bir ölçüm vermez.

Görelî kinetik enerji kullanılmalıdır:

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} = 2.2426,$$

$$K_{\max} = (\gamma_{\max} - 1)m_0c^2.$$

Dolayısıyla

$$K_{\max} = (2.2426 - 1)(9.11 \times 10^{-31})(3.00 \times 10^8)^2 = 1.0188 \times 10^{-13} \text{ J}.$$

Standart birim dönüşümü $1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$ kullanıldığında,

$$K_{\max} = 6.36 \times 10^5 \text{ eV}.$$

İzin uç noktasındaki açığa uygun bir hassasiyetle,

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV} = 0.64 \text{ MeV}.$$

(d)

Levhaların dışında elektrik alanın kenar etkisini ihmal eder ve manyetik sapmanın başat terimini tutarız. Bu durumda elektronun yatay hareketi yaklaşık olarak düzgün doğrusaldır ve levha kenarından filme uçuş süresi

$$\tau \simeq \frac{s}{v}.$$

olur.

Manyetik alan iş yapmaz; dolayısıyla elektronun sürati ve Lorentz çarpanı sabit kalır. Başat mertebede düşey manyetik kuvvetin büyüklüğü

$$F_z = eB_0 v \sin \phi,$$

olup düşey ivme

$$a_z = \frac{eB_0 v \sin \phi}{\gamma m_0}.$$

şeklindedir.

Buna göre eğri izlerden herhangi birinin ortadaki ize göre yer değiştirmesi

$$\delta \simeq \frac{1}{2} a_z \tau^2 = \frac{eB_0 s^2 \sin \phi}{2\gamma m_0 v}.$$

olur.

İki alan ayarı zıt yönlü yer değiştirmeler oluşturur. Dolayısıyla izler arasındaki uzaklık

$$y = 2\delta \simeq \frac{eB_0 s^2 \sin \phi}{\gamma m_0 v}.$$

olur.

$$v = \frac{V_0}{B_0 t \sin \phi}, \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0 t c \sin \phi} \right)^2},$$

ifadeleri yerine yazıldığında

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0} \sin^2 \phi \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0 t c \sin \phi} \right)^2}.$$

elde edilir.

$0 < \phi < 180^\circ$ olduğundan bu ifade

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0} \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}.$$

biçiminde yazılabilir.

Böylece grafik eksenlerini

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}, \quad Y = y.$$

olarak seçeriz.

Yatay eksenindeki nicelik boyutsuzdur. Burada

$$\frac{V_0}{B_0 t c} = 0.349735.$$

Grafiğe işlenecek noktalar şunlardır:

ϕ	Yatay koordinat X	Düşey koordinat Y / mm
90°	0.93685	17.4
60°	0.68612	12.7
50°	0.52210	9.7
40°	0.34667	6.4
30°	0.17867	3.3

Grafik, başlangıç noktasından geçen yaklaşık bir doğrudur. Uygun eksen aralıkları $0 \leq X \leq 1$ ve $0 \leq Y \leq 20$ mm'dir. Başlangıç noktasından geçen bir doğru uydurulduğunda

$$Y \simeq (18.55 \text{ mm})X.$$

elde edilir.

Eğim metre cinsinden

$$S = 1.855 \times 10^{-2} \text{ m},$$

olarak yazıldığında, kuramsal bağıntı

$$S = \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0}.$$

sonucunu verir. Böylece

$$\frac{e}{m_0} = \frac{S V_0}{B_0^2 t s^2} \simeq \frac{(1.855 \times 10^{-2})(580)}{(6.91 \times 10^{-3})^2 (0.80 \times 10^{-3})(41.0 \times 10^{-3})^2}.$$

Dolayısıyla gözlemlerden çıkarılan değer

$$\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}.$$

olur.

Bu türetmede sapmanın başat terimi tutulmuştur. Ölçülen en büyük iz uzaklığında

$\delta/s = 8.7/41.0 \simeq 0.21$ 'dir; dolayısıyla sonlu eğrilik düzeltmeleri yüzde birkaç düzeyinde etkilere yol açabilir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

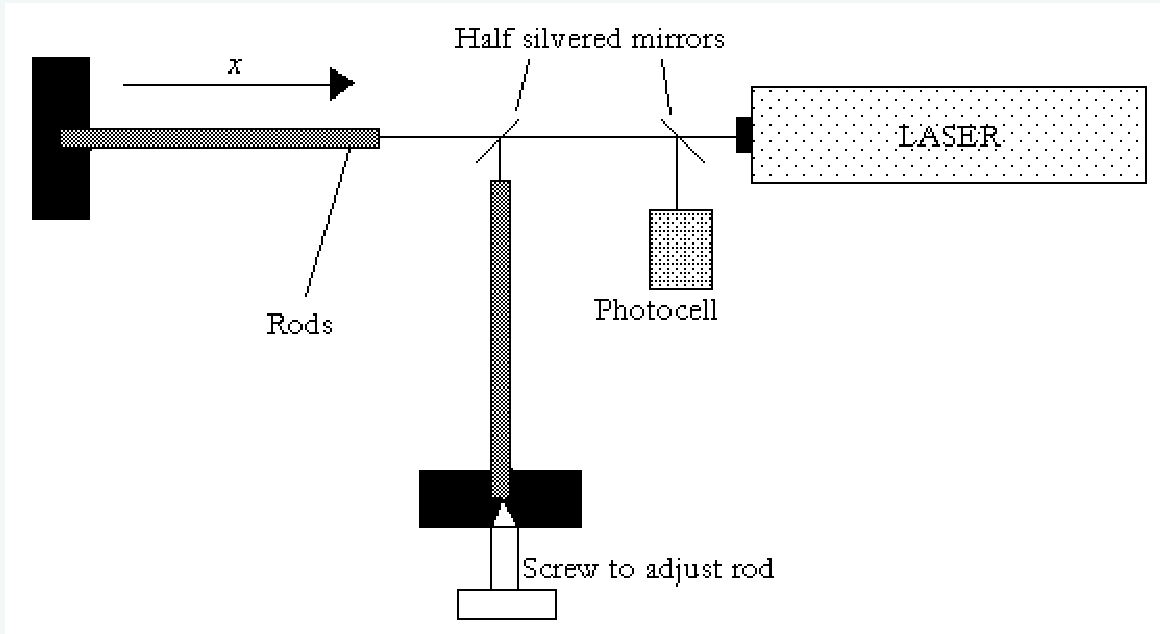
Soru 3: Kütleçekim dalgası dedektörü (Bölüm A) ve ışığın Güneş tarafından kütleçekimsel saptırılması (Bölüm B)

Kütleçekim dalgaları ve kütleçekimin ışık üzerindeki etkileri.

Bölüm A

Bu bölüm, astronomik olayların ürettiği kütleçekim dalgalarını saptamanın güçlüklerini ele almaktadır. Uzak bir süpernovanın patlamasının, Dünya yüzeyindeki kütleçekim alan şiddetinde yaklaşık $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$ büyüklüğünde dalgalanmalar oluşturabileceği göz önünde bulundurulmalıdır.

Bir kütleçekim dalgası dedektörü modeli (bkz. şekil 3.1), birbirine dik tutulan ve her biri 1m uzunluğunda olan iki metal çubuktan oluşur. Her çubuğun bir ucu optik olarak düz olacak şekilde parlatılmış, diğer ucu ise rijit biçimde sabitlenmiştir. Çubuklardan birinin konumu, fotoselden alınan sinyal en küçük olacak şekilde ayarlanır (bkz. şekil 3.1).



Şekil 3.1

Çubuklara piezoelektrik bir aygıtla kısa süreli, ani bir itme uygulanır. Bunun sonucunda çubukların serbest uçları, boyuna yer değiştirmeleri Δx_t olacak şekilde salınır; burada

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi),$$

ve a, μ, ω ile ϕ sabitlerdir.

(a) Hareketin genliği 50s'lik bir zaman aralığında %20 azalıyorsa μ için bir değer belirleyiniz.

(b) Çubukların, yoğunluğu (ρ) 2700 kg m^{-3} ve Young modülü (E) $7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$ olan alüminyumdan yapıldığı verildiğine göre, ω için de bir değer belirleyiniz.

(c) Çubukları tam olarak aynı uzunlukta yapmak olanaksızdır; bu nedenle fotosel sinyalinin vurum frekansı 0.005 Hz 'dir. Çubukların uzunlukları arasındaki fark nedir?

(d) Uzunluğu l olan çubuk için, kütleçekim alan şiddeti g 'deki Δg değişiminin yol açtığı uzunluk değişimini, Δl , l ve çubuk malzemesinin diğer sabitleri cinsinden veren cebirsel bir ifade türetiniz.

(e) Lazerin ürettiği ışık tek renklidir ve dalga boyu 656nm'dir. Saptanabilen en küçük saçak kayması lazerin dalga boyunun 10^{-4} 'ü ise, böyle bir sistemin g 'deki $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$ büyüklüğündeki değişimleri saptayabilmesi için gereken en küçük l değeri nedir?

Yön bağımlılığı olmayan bir kütleçekim dalgası dedektörü türü, titreşimleri azaltan bir düzeneğe bağlı olarak vakum içinde asılı duran, 1168 kg kütleli bir bakır alaşımı küreden oluşur.

Boyutlarındaki değişimleri saptamak için küreye, ayarlı devreler içeren dönüştürücüler bağlanmıştır. Ancak bu dönüştürücüler, örneğin sıcaklık etkilerinden kaynaklanan istenmeyen tüm titreşimleri ve elektriksel parazitlerden kaynaklanan gürültüyü de algılar.

(f) Sıcaklık etkilerinden kaynaklanan titreşimleri azaltmak için küre 100 mK sıcaklıkta tutulur. Düzenek 300 K'den soğutulduğunda atomik titreşimlerin genliği kaç kat azalmış olur?

(g) Küre başlangıçta sıvı azot ve sıvı helyum kullanılarak 4.2 K'e soğutulur. Ardından sıcaklık, T , sistemden ortalama 1 mW hızla enerji uzaklaştıran bir soğutma işlemiyle 100 mK'e düşürülür. Bu düşük sıcaklıklarda bakır alaşımının özgül ısı kapasitesi s 'nin T^3 ile doğru orantılı olduğu ve 4.2 K'de $s = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ olduğu verildiğine göre, sistemin 4.2 K'den 100 mK'e soğuması için gereken süreyi tahmin ediniz.

Bölüm B

Bu bölüm, bir kütleçekim alanının ışığın uzaydaki yayılımına etkisini ele almaktadır.

(a) Güneş'in (kütlesi M , yarıçapı R) yüzeyinden yayılan bir foton kırmızıya kayar. Foton enerjisine karşılık gelen bir durgun kütle eşdeğeri varsayarak Newton'un kütleçekim kuramını uygulayınız ve fotonun sonsuzdaki etkin (veya ölçülen) frekansının $(1 - GM/Rc^2)$ çarpanıyla azaldığını (kırmızıya kaydığını) gösteriniz.

(b) Fotonun frekansındaki azalma, periyodundaki bir artışa ya da foton standart bir saat olarak kullanıldığında, zaman genişlemesine eşdeğerdir. Ayrıca, zaman genişlemesine her zaman uzunluk biriminde aynı çarpanla bir kısalmanın eşlik ettiği gösterilebilir.

Şimdi bunun Güneş yakınında ışığın yayılımı üzerindeki etkisini incelemeye çalışacağız. Önce Güneş'in merkezinden r uzaklıktaki bir noktada etkin kırılma indisi n_r 'yi tanımlayalım.

$$n_r = \frac{c}{c'_r},$$

olsun; burada c , Güneş'in kütleçekim etkisinden çok uzaktaki ($r \rightarrow \infty$) bir koordinat sisteminde ölçülen ışık hızı, c'_r ise Güneş'in merkezinden r uzaklıktaki bir koordinat sisteminde ölçülen ışık hızıdır.

n_r 'nin yaklaşık olarak aşağıdaki biçimde yazılabileceğini gösteriniz:

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2},$$

burada GM/rc^2 küçüktür ve α , sizin belirleyeceğiniz bir sabittir.

(c) n_r için bu ifadeyi kullanarak, Güneş'in kenarından geçerken bir ışık ışınının doğrusal yolundan sapmasını radyan cinsinden hesaplayınız.

Veriler:

Kütleçekim sabiti, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Güneş'in kütlesi, $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$.

Güneş'in yarıçapı, $R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$.

Işık hızı, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Aşağıdaki integrale de ihtiyaç duyabilirsiniz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **A(a):** $\mu = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.
- **A(b):** Temel boyuna mod için, $\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$.
- **A(c):** $|l_1 - l_2| \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.90 \mu\text{m}$.
- **A(d):** $\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}$; burada Δg , çubuk boyunca alınır ve serbest uca doğru pozitiftir.
- **A(e):** $l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m}$; eşik, optik yol farkı olarak yorumlanmış ve bir kolun diğerine göre eksenel tepkisi alınmıştır.
- **A(f):** Klasik harmonik modelde genlik 54.8 kat azalarak başlangıç değerinin 0.0183 'üne düşer.
- **A(g):** $t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}$.
- **B(a):** $\nu_{\infty} \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right)$.
- **B(b):** $\alpha = 2, \quad n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}$.
- **B(c):** $\theta = \frac{4GM}{Rc^2} = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad}$, Güneş'e doğru.

Çözüm

A(a)

Genlik zarfı

$$A(t) = ae^{-\mu t}.$$

şeklinde. 20%'lik bir azalma, 50 s sonraki genliğin önceki değerinin 0.80 katı olması anlamına gelir:

$$\frac{A(t+50)}{A(t)} = e^{-50\mu} = 0.80.$$

Dolayısıyla,

$$\mu = -\frac{\ln(0.80)}{50} = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

A(b)

Çubuğu düzgün bir elastik sürekli ortam olarak ele alalım ve gözlenen salınımın temel boyuna mod olduğunu kabul edelim.

$u(x, t)$ boyuna yer değiştirme, S ise kesit alanı olsun. Boyuna kuvvet $ES \partial u / \partial x$ 'tir. Kısa bir elemana Newton'un ikinci yasası uygulandığında

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

elde edilir. Böylece boyuna dalgalar

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

hızıyla yayılır. Sabit uçta yer değiştirme sıfır, serbest uçta ise boyuna gerilme sıfırdır:

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Uzaysal bağımlılığı $\sin(kx)$ olan bir mod için serbest uç koşulu

$$\cos(kl) = 0.$$

olmasını gerektirir. Temel mod için $kl = \pi/2$ 'dir; dolayısıyla çubuğun uzunluğu dalga boyunun dörtte biridir. Buradan

$$\omega_0 = vk = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Sayısal olarak,

$$v = \sqrt{\frac{7.1 \times 10^{10}}{2700}} = 5.128 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

ve $l = 1 \text{ m}$ için,

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} (5.128 \times 10^3) = 8.055 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}.$$

Doğrusal sönüm durumunda gözlenen açısal frekans $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ 'dir. $\mu \ll \omega_0$ olduğundan bu düzeltme ihmal edilebilir:

$$\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}.$$

Buna karşılık gelen frekans

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{4l} \simeq 1.282 \times 10^3 \text{ Hz}.$$

şeklindedir.

A(c)

Aynı malzemeden yapılmış ve aynı temel modda salınan çubuklar için,

$$f(l) = \frac{v}{4l}.$$

Dolayısıyla vurum frekansları

$$f_b = |f_1 - f_2| = \frac{v}{4} \left| \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right|.$$

şeklindedir. Her iki uzunluğun da yaklaşık l olduğu küçük bir $\delta l = |l_1 - l_2|$ uzunluk farkı için,

$$f_b \simeq \frac{v}{4l^2} \delta l = \frac{f}{l} \delta l.$$

Dolayısıyla,

$$\delta l \simeq \frac{l f_b}{f} = \frac{(1)(0.005)}{1281.998} \text{ m},$$

buradan

$$\boxed{\delta l \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ m}}.$$

elde edilir. $\delta l/l \simeq 3.9 \times 10^{-6}$ oranı, küçük fark yaklaşımının geçerliliğini doğrular.

A(d)

Doğrusal elastikliği ve yarı statik bir kütleçekim pertürbasyonunu kullanalım. x , sabit uçtan, $x = 0$, serbest uca, $x = l$, doğru artsın ve Δg , alan değişiminin bu yöndeki işaretli bileşenini göstereyin.

x konumundaki bir kesitin ötesinde kalan malzemenin kütlesi

$$m(x) = \rho S(l - x).$$

şeklindedir. Dolayısıyla bu kesitten iletilen ek eksenel kuvvet

$$\Delta F(x) = \rho S(l - x) \Delta g.$$

olur. Young modülü bağıntısına göre yerel birim uzamadaki değişim

$$\Delta \epsilon(x) = \frac{\Delta F(x)}{ES} = \frac{\rho(l - x) \Delta g}{E}.$$

şeklindedir. Tüm elemanların uzamaları integre edilirse,

$$\Delta l = \int_0^l \Delta \epsilon(x) dx = \frac{\rho \Delta g}{E} \int_0^l (l - x) dx.$$

Böylece

$$\boxed{\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}}.$$

Sabit uca doğru yönelen bir alan değişimi, negatif bir Δg ile temsil edilen sıkışmaya yol açar.

A(e)

Yansıtıcı bir ucun Δl kadar yer değiştirmesi, gidiş-dönüş optik yolunu $2\Delta l$ kadar değiştirir. Alan değişimi bir çubuk boyunca alınır ve diğer çubuk boyuna referans olarak kullanılırsa,

$$|\Delta D| = 2|\Delta l|.$$

Optik yolun bir dalga boyu kadar değişmesi, girişim koşulunu bir saçak kadar kaydırır. Dolayısıyla belirtilen duyarlılık

$$|\Delta D|_{\min} = 10^{-4} \lambda = 10^{-4} (656 \times 10^{-9}) = 6.56 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

değerine karşılık gelir. Bu nedenle saptanabilen en küçük çubuk ucu yer değiştirmesi

$$|\Delta l|_{\min} = 3.28 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

olur. A(d) kullanılarak,

$$2|\Delta l| = \frac{\rho l^2 |\Delta g|}{E}.$$

Saptama eşiğinde,

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{E 10^{-4} \lambda}{\rho |\Delta g|}}.$$

Değerler yerine konursa

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{(7.1 \times 10^{10})(10^{-4})(656 \times 10^{-9})}{(2700)(10^{-19})}},$$

dolayısıyla

$$\boxed{l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m.}}$$

Daha genel olarak, her iki çubuk da tepki veriyorsa bu ifadede Δg yerine çubukların işaretli eksenel alan değişimleri arasındaki fark konur.

A(f)

Klasik harmonik yaklaşımda, bir atomun x yer değiştirmesine karşılık gelen elastik potansiyel enerji $\frac{1}{2} \kappa x^2$ 'dir. Enerjinin eşbölüşümü ilkesi

$$\frac{1}{2} \kappa \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

bağıntısını verir. Etkin yay sabiti κ değişmediğinde, karakteristik titreşim genliği bu nedenle

$$A \propto \sqrt{T}.$$

şeklinde ölçeklenir. $100 \text{ mK} = 0.100 \text{ K}$ olduğundan,

$$\frac{A_{\text{cold}}}{A_{\text{warm}}} = \sqrt{\frac{0.100}{300}} = \frac{1}{\sqrt{3000}} = 0.0183.$$

Böylece genlik

$$\boxed{\frac{A_{\text{warm}}}{A_{\text{cold}}} = \sqrt{3000} \simeq 54.8}.$$

kat azalır. Bu tahmin, klasik ısı titreşimleri kullanır ve kuantum sıfır noktası hareketini ihmal eder.

A(g)

Şöyle tanımlayalım:

$$T_i = 4.2 \text{ K}, \quad T_f = 0.100 \text{ K}, \quad s_i = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Belirtilen ısı kapasitesi yasası

$$s(T) = s_i \left(\frac{T}{T_i} \right)^3.$$

şeklinde. Küreden uzaklaştırılması gereken ısı

$$Q = m \int_{T_f}^{T_i} s(T) dT = \frac{ms_i}{T_i^3} \int_{T_f}^{T_i} T^3 dT.$$

olur. Dolayısıyla,

$$Q = \frac{ms_i}{4T_i^3} (T_i^4 - T_f^4) = \frac{ms_i T_i}{4} \left[1 - \left(\frac{T_f}{T_i} \right)^4 \right].$$

Sayısal olarak,

$$Q = \frac{(1168)(0.072)(4.2)}{4} \left[1 - \left(\frac{0.100}{4.2} \right)^4 \right] \simeq 88.3 \text{ J}.$$

Ortalama soğutma gücü $P = 1.00 \times 10^{-3} \text{ W}$ olduğunda,

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{88.3}{10^{-3}} \text{ s}.$$

Buradan

$$\boxed{t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}}.$$

B(a)

Yayılan fotonun frekansı ν_R olsun. Verilen Newton modelini izleyerek fotona, enerjisine eşdeğer bir kütleçekim kütlesi atayalım:

$$m_\gamma = \frac{h\nu_R}{c^2}.$$

Bu kütleyi Güneş yüzeyinden sonsuza taşımak için gereken iş

$$W = \int_R^\infty \frac{GMm_\gamma}{r^2} dr = \frac{GMm_\gamma}{R}.$$

olur. Enerjinin korunumu

$$h\nu_\infty = h\nu_R - \frac{GMm_\gamma}{R}.$$

bağıntısını verir. $m_\gamma = h\nu_R/c^2$ yerine konursa,

$$h\nu_\infty = h\nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right),$$

ve dolayısıyla

$$\boxed{\nu_\infty \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right)}.$$

Bu, zayıf alan için birinci mertebeden bir sonuçtur. m_γ 'yı hesaplamak için yayım anındaki enerjinin kullanılması yalnızca daha yüksek mertebeden düzeltmeler getirir. Güneş için,

$$\frac{GM}{Rc^2} = 2.12 \times 10^{-6} \ll 1,$$

olduğundan yaklaşım oldukça geçerlidir.

B(b)

Şöyle tanımlayalım:

$$\epsilon = \frac{GM}{rc^2}, \quad q = 1 - \epsilon.$$

Frekansın q çarpanıyla azalması, saatin periyodunun $1/q$ çarpanıyla artmasına karşılık gelir. Soruda verilen uzunluk kısalması kuralına göre, buna eşlik eden uzunluk ölçeği q çarpanıyla azalır.

Böylece, soruda uzak koordinatlarla yapılan karşılaştırmada etkin hız

$$\frac{c'_r}{c} \simeq \frac{q}{1/q} = q^2.$$

şeklinde ölçeklenir. Buradan

$$n_r = \frac{c}{c'_r} \simeq \frac{1}{(1 - \epsilon)^2}.$$

Birinci mertebeye kadar açılım yapılırsa,

$$(1 - \epsilon)^{-2} = 1 + 2\epsilon + O(\epsilon^2).$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}}, \quad \boxed{\alpha = 2}.$$

Burada c'_r , sorunun kırılma indisi modelinde kullanılan etkin koordinat hızıdır. Öz uzunluklar ve öz zamanlar kullanılarak yapılan yerel bir ölçüm yine boşluktaki ışık hızı c 'yi verir.

B(c)

Gelen ışık ışınının, b çarpma parametresiyle yaklaşık olarak x doğrultusunda ilerlediğini kabul edelim. Pertürbe olmamış yolu boyunca,

$$y = b, \quad r = \sqrt{x^2 + b^2}.$$

Kırılma indisi

$$n(x, y) = 1 + \frac{\alpha GM}{c^2 \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

şeklindedir. Sürekli değişen bir kırılma indisi için Snell yasası, ışın denklemini verir:

$$\frac{d}{ds}(n\hat{t}) = \nabla n,$$

burada $\hat{t}$, ışının birim teğet vektörüdür. Küçük bir sapma için $ds \simeq dx$ ve $n \simeq 1$ olduğundan, denklemin enine bileşeni

$$\frac{d\theta}{dx} \simeq \frac{\partial n}{\partial y}.$$

halini alır. Türev alınırsa

$$\frac{\partial n}{\partial y} = -\frac{\alpha GM y}{c^2 (x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Birinci mertebede bu ifade, $y = b$ doğrusal yolu boyunca hesaplanabilir:

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha GMb}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Verilen integral kullanılarak,

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha GMb}{c^2} \frac{2}{b^2} = -\frac{2\alpha GM}{bc^2}.$$

Negatif işaret, Güneş'e doğru bükülmeyi gösterir. Güneş'in kenarına teğet geçen bir ışın için $b \simeq R$ ve $\alpha = 2$ olduğundan, sapmanın büyüklüğü

$$\theta = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

olur. Sayısal olarak,

$$\theta = \frac{4(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}{(6.95 \times 10^8)(3.00 \times 10^8)^2}.$$

Böylece

$$\boxed{\theta = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad} \quad \text{Güneş'e doğru}}.$$

Bu, yaklaşık 1.75 yay saniyesidir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.