

IPhO 2000

Теоретические задачи и решения · Лестер, Великобритания · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/2000/

Задача 1: Пять коротких частей: прыжок на упругом канате, тепловая машина, возраст Земли по уран-свинцовому датированию, равномерно заряженный шар, медное кольцо, вращающееся в магнитном поле Земли

А

Прыгун прикреплен к одному концу длинного упругого каната. Другой конец каната закреплен на высоком мосту. Прыгун сходит с моста и падает без начальной скорости к реке внизу. Он не касается воды. Масса прыгуна равна m , длина нерастянутого каната равна L , жёсткость каната (сила, необходимая для удлинения на 1 м) равна k , а напряжённость гравитационного поля равна g .

Можно считать, что

- прыгуна можно рассматривать как материальную точку массой m , прикрепленную к концу каната,
- масса каната пренебрежимо мала по сравнению с m ,
- канат подчиняется закону Гука,
- сопротивлением воздуха можно пренебречь на протяжении всего падения прыгуна.

Получите выражения для следующих величин и внесите их в лист ответов:

- (a) расстояние y , которое пролетит прыгун до первой мгновенной остановки,
- (b) максимальная скорость v , которую достигнет прыгун за время этого падения,
- (c) время t от начала падения до первой остановки.

В

Тепловая машина работает между двумя одинаковыми телами с различными температурами T_A и T_B ($T_A > T_B$); каждое тело имеет массу m и постоянную удельную теплоёмкость s . Давление тел остаётся постоянным, фазовые переходы отсутствуют.

- (a) Приведя полный вывод, получите выражение для конечной температуры T_0 двух тел А и В, если тепловая машина извлекает из системы теоретически максимально возможную механическую работу.

Запишите выражение для конечной температуры T_0 в лист ответов.

(b) Используя полученный результат, найдите и запишите в лист ответов выражение для этой максимальной работы.

Тепловая машина работает между двумя резервуарами с водой объёмом 2.50 m^3 каждый. Температура воды в одном резервуаре равна 350 K , а в другом — 300 K .

(c) Вычислите максимальную механическую энергию, которую можно получить. Внесите значение в лист ответов.

$$\text{Удельная теплоёмкость воды} = 4.19 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\text{Плотность воды} = 1.00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

C

Предполагается, что при образовании Земли изотопы ^{238}U и ^{235}U присутствовали, а продукты их распада отсутствовали. Распад ^{238}U и ^{235}U используют для определения возраста Земли T .

(a) Изотоп ^{238}U распадается с периодом полураспада 4.50×10^9 лет. Периоды полураспада продуктов возникающего радиоактивного ряда малы по сравнению с этой величиной; в первом приближении их существованием можно пренебречь. Ряд распада заканчивается стабильным изотопом свинца ^{206}Pb .

Получите и внесите в лист ответов выражение для числа атомов ^{206}Pb , обозначаемого ^{206}n , образовавшихся в результате радиоактивного распада за время t , через нынешнее число атомов ^{238}U , обозначаемое ^{238}N , и период полураспада ^{238}U . (Возможно, будет удобно измерять время в единицах 10^9 лет.)

(b) Аналогично, ^{235}U распадается с периодом полураспада 0.710×10^9 лет через ряд продуктов с более короткими периодами полураспада, образуя стабильный изотоп ^{207}Pb .

Запишите в лист ответов уравнение, связывающее ^{207}n с ^{235}N и периодом полураспада ^{235}U .

(c) Урановую руду, смешанную со свинцовой рудой, анализируют с помощью масс-спектрометра. Измеряют относительные концентрации трёх изотопов свинца ^{204}Pb , ^{206}Pb и ^{207}Pb и устанавливают, что числа их атомов относятся как $1.00 : 29.6 : 22.6$ соответственно. Изотоп ^{204}Pb используют в качестве эталона, поскольку он **не** имеет радиоактивного происхождения. Анализ чистой свинцовой руды даёт отношения $1.00 : 17.9 : 15.5$.

Учитывая, что отношение $^{238}N : ^{235}N$ равно $137 : 1$, выведите и внесите в лист ответов уравнение, содержащее T .

(d) Предположите, что T значительно превышает периоды полураспада обоих изотопов урана, и на этом основании получите приближённое значение T .

(e) Это приближённое значение явно не намного превышает больший из периодов полураспада, однако его можно использовать для получения гораздо более точного значения T . Используя его или иной способ, оцените возраст Земли с точностью до 2%.

D

Заряд Q равномерно распределён в вакууме по объёму шара радиуса R .

(a) Выведите выражения для напряжённости электрического поля на расстоянии r от центра шара при $r \leq R$ и $r > R$.

(b) Получите выражение для полной электрической энергии этого распределения заряда.

Внесите ответы на (a) и (b) в лист ответов.

Е

Круглое кольцо из тонкой медной проволоки приводят во вращение вокруг вертикального диаметра в некоторой точке магнитного поля Земли. Индукция магнитного поля Земли в этой точке равна $44.5 \mu\text{T}$ и направлена под углом 64° к горизонту вниз. Учитывая, что плотность меди равна $8.90 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, а её удельное электрическое сопротивление равно $1.70 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$, вычислите время, за которое угловая скорость кольца уменьшится вдвое. Приведите ход вычислений и внесите значение времени в лист ответов. Это время значительно превышает время одного оборота.

Можно считать, что трение в опорах и сопротивление воздуха пренебрежимо малы; при решении этой задачи следует пренебречь эффектами самоиндукции, хотя в действительности они не были бы пренебрежимо малы.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- A(a):

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

- A(b):

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

- A(c):

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

- B(a):

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

- B(b):

$$W_{\max} = ms \left(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B} \right) = ms \left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B} \right)^2.$$

- B(c):

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

- **C(a):** Обозначая $h_{238} = 4.50 \times 10^9$ yr, получаем

$$^{206}_{\text{n}} = ^{238}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right).$$

- **C(b):** Обозначая $h_{235} = 0.710 \times 10^9$ yr, получаем

$$^{207}_{\text{n}} = ^{235}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right).$$

- **C(c):**

$$\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7}, \quad T > 0.$$

- **C(d):**

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}.$$

- **C(e):**

$$T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr}.$$

- **D(a):** Радиальная компонента напряжённости электрического поля равна

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3}, & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

Поле направлено наружу при $Q > 0$, к центру при $Q < 0$ и равно нулю в центре.

- **D(b):**

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

- **E:**

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

Решение

A(a)

Пусть z — расстояние от моста, отсчитываемое вниз. Канат остаётся ненатянутым до $z = L$; после этого его удлинение равно $x = z - L$, а сила натяжения — kx .

Диссипация отсутствует, поэтому механическая энергия сохраняется. В нижней точке, $z = y$, прыгун мгновенно останавливается. Следовательно,

$$mgy = \frac{1}{2}k(y - L)^2.$$

Или, полагая $x = y - L$,

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mgL}{k} = 0.$$

Физически допустимому корню соответствует положительное удлинение:

$$x = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgL}{k}}.$$

Поэтому

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

A(b)

Скорость увеличивается, пока ускорение, направленное вниз, положительно. После натяжения каната

$$m\ddot{z} = mg - k(z - L).$$

Таким образом, скорость максимальна, когда ускорение впервые обращается в нуль:

$$z = L + \frac{mg}{k}.$$

Закон сохранения энергии в любой точке при натянутом канате даёт

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz - \frac{1}{2}k(z - L)^2.$$

В положении, соответствующем максимальной скорости,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg \left(L + \frac{mg}{k} \right) - \frac{1}{2}k \left(\frac{mg}{k} \right)^2 = mgL + \frac{m^2g^2}{2k}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

A(c)

На начальном этапе свободного падения на расстояние L затраченное время и конечная скорость равны

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}, \quad v_1 = \sqrt{2gL}.$$

Положим $\tau = 0$ в момент, когда канат впервые натягивается, и введём обозначения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{mg}{k}.$$

Уравнение последующего движения имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g.$$

При $x(0) = 0$ и $\dot{x}(0) = v_1$ его решение равно

$$x(\tau) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega_0 \tau) + \frac{v_1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau,$$

так что

$$\dot{x}(\tau) = x_{\text{eq}}\omega_0 \sin \omega_0\tau + v_1 \cos \omega_0\tau.$$

Эта скорость впервые обращается в нуль при $\pi/2 < \omega_0\tau < \pi$. Следовательно,

$$\omega_0\tau = \pi - \arctan\left(\frac{v_1}{x_{\text{eq}}\omega_0}\right) = \pi - \arctan\sqrt{\frac{2kL}{mg}}.$$

Добавляя время свободного падения, получаем

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan\sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

B(a)

Максимальная работа получается, если машина работает обратимо между мгновенными температурами тел до тех пор, пока их температуры не сравняются. Все температуры ниже являются абсолютными.

Каждое тело имеет постоянную теплоёмкость ms при постоянном давлении. Поэтому изменение его энтропии равно

$$\Delta S = ms \int \frac{dT}{T}.$$

Машина работает циклически, поэтому суммарное изменение её энтропии равно нулю. При обратимой работе суммарное изменение энтропии тел также равно нулю:

$$ms \int_{T_A}^{T_0} \frac{dT}{T} + ms \int_{T_B}^{T_0} \frac{dT}{T} = 0.$$

Следовательно,

$$\ln \frac{T_0}{T_A} + \ln \frac{T_0}{T_B} = 0,$$

откуда

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

Чтобы понять, почему это даёт максимум, заметим, что при необратимом процессе суммарная энтропия увеличивалась бы, что требует

$$T_0 \geq \sqrt{T_A T_B}.$$

При более высокой конечной температуре в телах остаётся больше тепловой энергии, и, следовательно, можно получить меньшую работу.

B(b)

Количество теплоты, отведённое от первоначально более горячего тела, равно

$$Q_H = ms(T_A - T_0),$$

а количество теплоты, переданное первоначально более холодному телу, равно

$$Q_C = ms(T_0 - T_B).$$

Закон сохранения энергии для циклически работающей машины даёт

$$W = Q_H - Q_C = ms(T_A + T_B - 2T_0).$$

Подставляя конечную температуру обратимого процесса, получаем

$$W_{\max} = ms \left(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B} \right) = ms \left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B} \right)^2.$$

B(c)

Масса воды в каждом резервуаре равна

$$m = \rho V = (1.00 \times 10^3)(2.50) = 2.50 \times 10^3 \text{ kg}.$$

Конечная температура обратимого процесса равна

$$T_0 = \sqrt{350 \times 300} = 324.037 \dots \text{ K}.$$

Используя это значение без преждевременного округления, получаем

$$\begin{aligned} W_{\max} &= (2.50 \times 10^3)(4.19 \times 10^3) \left[350 + 300 - 2\sqrt{350 \times 300} \right] \\ &= 2.0174 \dots \times 10^7 \text{ J}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

C(a)

Для исходного радиоактивного изотопа с периодом полураспада h

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{h}.$$

Следовательно, начальное число атомов исходного изотопа можно выразить через их нынешнее число:

$$N(0) = N(t)e^{\lambda t} = N(t)2^{t/h}.$$

Если пренебречь временами жизни промежуточных продуктов, каждый распавшийся атом урана даёт один атом свинца — конечного продукта распада. Поскольку изначально продукты распада отсутствовали,

$$n(t) = N(0) - N(t) = N(t) \left(2^{t/h} - 1 \right).$$

Для ряда ^{238}U

$$^{206}_{n} = ^{238}\text{U} \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right), \quad h_{238} = 4.50 \times 10^9 \text{ yr}.$$

C(b)

Применяя те же рассуждения к ряду ^{235}U , получаем

$$^{207}_{n} = ^{235}\text{U} \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right), \quad h_{235} = 0.710 \times 10^9 \text{ yr}.$$

C(c)

Чистая свинцовая руда позволяет определить фоновые изотопные отношения. Эти фоновые количества необходимо вычесть из количеств в смешанном образце, чтобы найти количество свинца, образовавшегося при распаде урана.

Пусть N_{204} — число атомов ^{204}Pb в смешанном образце. Поскольку этот изотоп не является радиогенным,

$$^{206}n = (29.6 - 17.9)N_{204} = 11.7N_{204},$$

и

$$^{207}n = (22.6 - 15.5)N_{204} = 7.1N_{204}.$$

Поэтому

$$\frac{^{207}n}{^{206}n} = \frac{7.1}{11.7}.$$

Используя уравнения распада и нынешнее отношение количеств изотопов урана, получаем

$$\frac{7.1}{11.7} = \frac{^{235}N}{^{238}N} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = \frac{1}{137} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1}.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$\boxed{\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7} = 83.13675\dots}, \quad T > 0.$$

C(d)

В указанном приближении $T \gg h_{238}, h_{235}$

$$2^{T/h} - 1 \simeq 2^{T/h}.$$

Уравнение для определения возраста принимает вид

$$2^{T(1/h_{235} - 1/h_{238})} \simeq 137 \frac{7.1}{11.7}.$$

Логарифмируя, получаем

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})}.$$

Численно

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(83.13675\dots)}{(\ln 2)(1/0.710 - 1/4.50)} \times 10^9 \text{ yr},$$

так что

$$\boxed{T_{\text{approx}} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}}.$$

Это составляет всего около $1.19h_{238}$, поэтому для получения точного результата нельзя пренебрегать вычитанием 1 в выражении для ^{238}U .

C(e)

Сохраним оба вычитания 1. Вводя обозначение

$$u = \frac{T}{10^9 \text{ yr}},$$

получаем уравнение, которое необходимо решить:

$$F(u) \equiv \frac{2^{u/0.710} - 1}{2^{u/4.50} - 1} = 83.13675 \dots$$

Вычисления при близких значениях дают

$$F(4.55) = 82.666 \dots, \quad F(4.56) = 83.232 \dots$$

Таким образом, искомый возраст лежит между 4.55 и 4.56 миллиарда лет. Более точное численное решение равно $u = 4.5583157 \dots$, что даёт

$$T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr},$$

с погрешностью существенно меньше требуемых 2%.

D(a)

Постоянная объёмная плотность заряда равна

$$\rho_q = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3}.$$

В силу сферической симметрии электрическое поле направлено радиально и имеет постоянный модуль на концентрической сферической гауссовой поверхности.

При $r \leq R$ заряд внутри этой поверхности равен

$$Q_{\text{enc}} = \rho_q \frac{4\pi r^3}{3} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Теорема Гаусса даёт

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0},$$

и, следовательно,

$$E_r = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (r \leq R).$$

При $r > R$ заряд внутри поверхности равен Q , поэтому

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R).$$

Поле равно нулю в центре и непрерывно на поверхности, где

$$E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

D(b)

В вакууме плотность энергии электростатического поля равна

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Полная энергия включает энергию поля как внутри, так и снаружи заряженного шара:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\int_0^R E^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty E^2 4\pi r^2 dr \right].$$

Подставляя найденные выше выражения для поля, получаем

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right].$$

Следовательно,

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right),$$

и

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

Е

Пусть радиус кольца равен a , а площадь поперечного сечения проволоки — S . Обозначим плотность меди через ρ_m , а её удельное электрическое сопротивление — через ρ_e .

Масса и сопротивление кольца равны

$$M = 2\pi a S \rho_m, \quad \mathcal{R} = \rho_e \frac{2\pi a}{S}.$$

Момент инерции тонкого кольца относительно диаметра равен

$$I = \frac{1}{2} M a^2 = \pi \rho_m S a^3.$$

Плоскость кольца остаётся вертикальной, поэтому нормаль к ней горизонтальна. Вклад в магнитный поток даёт только горизонтальная составляющая магнитного поля Земли:

$$B_h = B \cos 64^\circ.$$

Пусть θ — угол между нормалью к кольцу и этой горизонтальной составляющей поля. Поток равен

$$\Phi = B_h \pi a^2 \cos \theta.$$

При $\dot{\theta} = \omega$ закон Фарадея даёт

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B_h \pi a^2 \omega \sin \theta.$$

Пренебрегая самоиндукцией согласно условию, получаем ток

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}}.$$

Следовательно, мгновенная мощность джоулева тепловыделения равна

$$P = i^2 \mathcal{R} = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{\mathcal{R}} \omega^2 \sin^2 \theta.$$

По условию время затухания значительно превышает время одного оборота, поэтому за каждый оборот ω изменяется лишь незначительно. Следовательно, можно использовать

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2},$$

что даёт

$$\langle P \rangle = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2\mathcal{R}} \omega^2.$$

При отсутствии трения эта теплота выделяется за счёт кинетической энергии вращения:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = -\langle P \rangle.$$

Таким образом, усреднённая угловая скорость удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2I\mathcal{R}} \omega.$$

Но

$$I\mathcal{R} = (\pi \rho_m S a^3) \left(\rho_e \frac{2\pi a}{S} \right) = 2\pi^2 \rho_m \rho_e a^4,$$

поэтому геометрические величины сокращаются:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2}{4\rho_m \rho_e} \omega.$$

Отсюда

$$\omega(t) = \omega(0) \exp \left(-\frac{B_h^2 t}{4\rho_m \rho_e} \right).$$

Полагая $\omega(t_{1/2}) = \omega(0)/2$, получаем

$$t_{1/2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B_h^2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B^2 \cos^2 64^\circ}.$$

Численно

$$B_h = (44.5 \times 10^{-6}) \cos 64^\circ = 1.95075 \dots \times 10^{-5} \text{ Т},$$

и

$$t_{1/2} = \frac{4(8.90 \times 10^3)(1.70 \times 10^{-8}) \ln 2}{(44.5 \times 10^{-6})^2 \cos^2 64^\circ}.$$

Следовательно,

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Отношение заряда электрона к его массе (магнитная фокусировка в ЭЛТ; бета-частицы между заряженными пластинами)

(а) Электронно-лучевая трубка (ЭЛТ), состоящая из электронной пушки и экрана, помещена в однородное постоянное магнитное поле величиной $\mathbf{B}$ так, что магнитное поле параллельно оси пучка электронной пушки, как показано на рисунке 2.3.

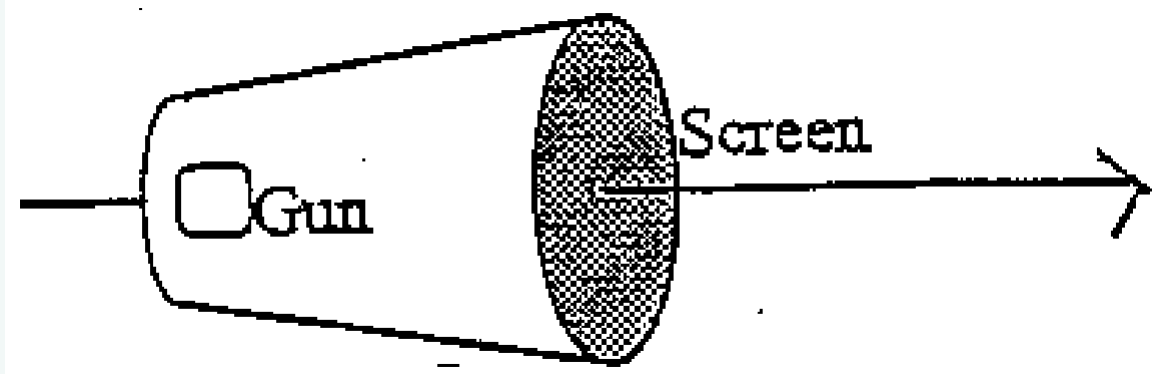


Рисунок 2.3

Электронный пучок выходит из анода электронной пушки на оси, однако направления движения электронов отклоняются от оси на угол до 5° , как показано на рисунке 2.4. Обычно на экране образуется размытое пятно, но при определённых значениях магнитного поля получается чётко сфокусированное пятно.

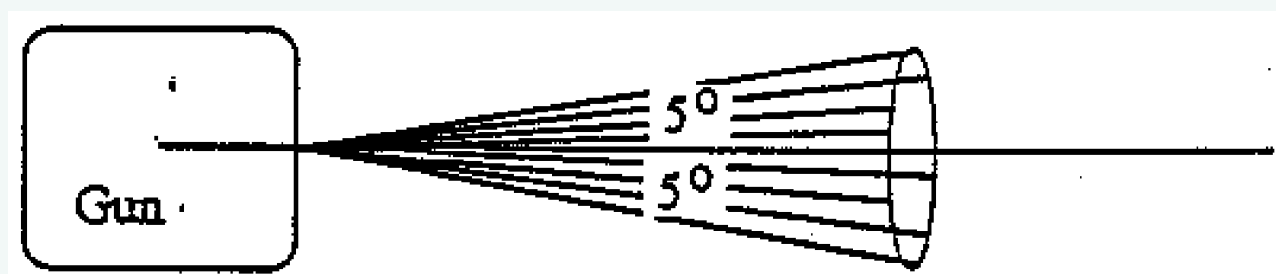


Рисунок 2.4

Рассматривая движение электрона, который при выходе из электронной пушки первоначально движется под углом β (где $0 \leq \beta \leq 5^\circ$) к оси, и составляющие его движения вдоль и перпендикулярно оси, выведите выражение для отношения заряда электрона к его массе e/m через следующие величины:

наименьшее магнитное поле, при котором получается сфокусированное пятно, ускоряющую разность потенциалов в электронной пушке V (обратите внимание, что $V < 2 \text{ kV}$), и D — расстояние между анодом и экраном.

Запишите полученное выражение в отведённую рамку в разделе 2а листа ответов.

(b) Рассмотрим другой метод определения отношения заряда электрона к его массе. На рисунке 2.5 установка показана сбоку и в плане (сверху), а направление магнитного поля обозначено $\mathbf{B}$. В этом однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ расположены две круглые латунные пластины радиусом ρ , разделённые очень малым расстоянием t . Между ними поддерживается разность потенциалов V . Пластины параллельны друг другу и соосны, однако их ось перпендикулярна магнитному полю. Фотоплёнка покрывает внутреннюю боковую поверхность цилиндра радиусом $\rho + s$, установленного соосно с пластинами. Иными словами, плёнка находится на расстоянии s от краёв пластин в радиальном направлении. Вся установка помещена в вакуум. Обратите внимание, что t гораздо меньше как s , так и ρ .

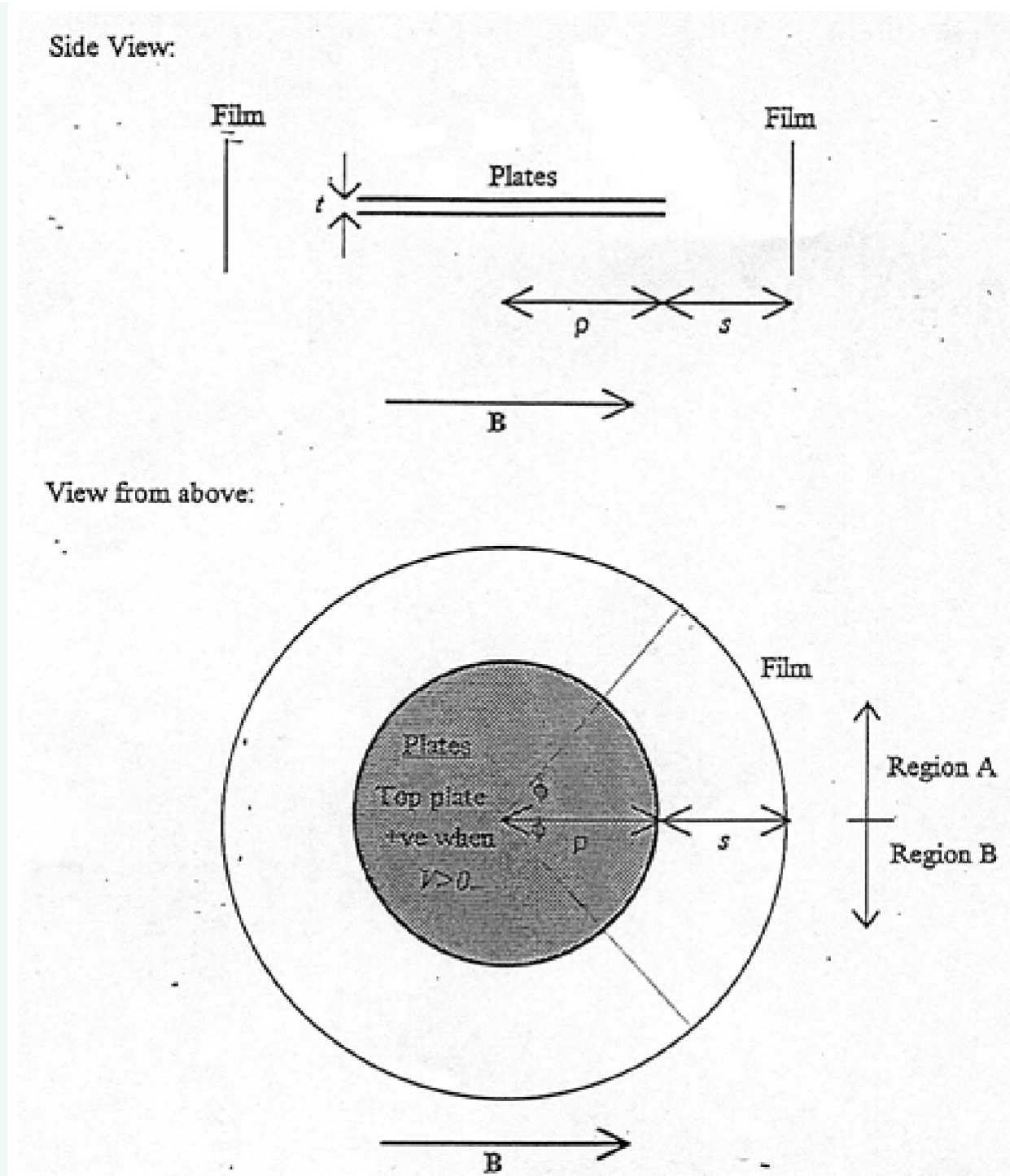


Рисунок 2.5

Между центрами пластин помещён точечный источник β -частиц, испускающий β -частицы с различными скоростями равномерно во всех направлениях; *один и тот же участок плёнки экспонируют при трёх различных условиях:*

сначала при $B = 0$ и $V = 0$,
 затем при $B = B_0$ и $V = V_0$, и
 наконец при $B = -B_0$ и $V = -V_0$;

где V_0 и B_0 — положительные постоянные. Обратите внимание, что верхняя пластина заряжена положительно при $V > 0$ (отрицательно при $V < 0$), а магнитное поле направлено так, как указано на рисунке 2.5, при $B > 0$ (в противоположную сторону при

$B < 0$). В этой части можно считать зазор пренебрежимо малым.

Два участка плёнки обозначены на рисунке 2.5 буквами А и В. На рисунке 2.6 схематически изображён один из этих участков после экспонирования и проявления. С какого участка взят этот фрагмент (напишите в листе ответов А или В)? Обоснуйте ответ, указав направления сил, действующих на электрон.

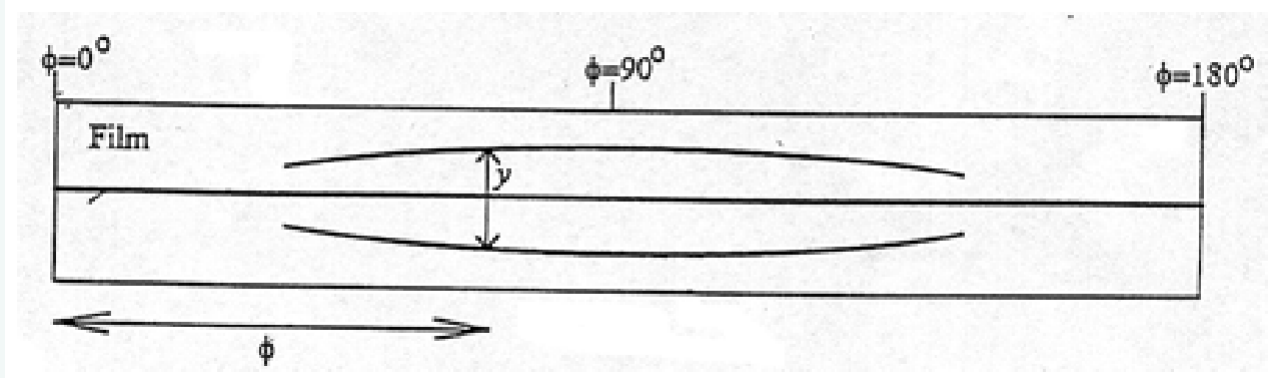


Рисунок 2.6

(с) На рисунке 2.6 схематически изображена плёнка после экспонирования и проявления. С помощью микроскопа измеряют расстояние между двумя крайними следами; это расстояние (y) также указано для одного конкретного угла на рисунке 2.6. Результаты приведены в таблице ниже; угол ϕ определён на рисунке 2.5 как угол между магнитным полем и прямой, соединяющей центр пластин с точкой на плёнке.

Угол к полю /градусы	ϕ	90	60	50	40	30	23
Расстояние /мм	y	17.4	12.7	9.7	6.4	3.3	Конец следа

Численные значения параметров установки приведены ниже:

$$B_0 = 6.91 \text{ mT} \quad V_0 = 580 \text{ V} \quad t = 0.80 \text{ mm} \\ s = 41.0 \text{ mm}$$

Кроме того, можно принять скорость света в вакууме равной $3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, а массу покоя электрона — равной $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

Определите максимальную наблюдаемую кинетическую энергию β -частиц.

Запишите численное значение максимальной кинетической энергии в эВ в рамку в разделе 2f листа ответов.

(d) Используя информацию, приведённую в части (f) [т. е. в части (с) выше], получите значение отношения заряда электрона к его массе покоя. Для этого постройте подходящий график на предоставленной бумаге.

Укажите в алгебраическом виде величины, откладываемые по горизонтальной и вертикальной осям, как на самом графике, так и в отведённых рамках в разделе 2g листа ответов.

Запишите полученное значение отношения заряда электрона к его массе в отведённую рамку в разделе 2g листа ответов.

Обратите внимание, что полученный ответ может не совпадать с общепринятым значением из-за систематической погрешности наблюдений.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- (a) Для наименьшего положительного фокусирующего поля $B_{\min}$,

$$\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}.$$

- (b) Участок В. При $B = B_0$, $V = V_0$ электрическая сила направлена вверх, а магнитная — вниз. Изменение направлений обоих полей на противоположные меняет направления обеих сил на противоположные.

- (c)

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV}$$

что соответствует $v_{\max} \simeq 2.69 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

- (d) Постройте график, отложив по вертикали $Y = y$, а по горизонтали — безразмерную величину

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}.$$

Угловой коэффициент прямой приблизительно равен $1.855 \times 10^{-2} \text{ m}$, что даёт

$$\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}.$$

Решение

Везде далее $e > 0$ обозначает модуль заряда электрона; заряд электрона равен $-e$. Его масса покоя равна m_0 .

(a)

Поскольку ускоряющее напряжение меньше 2 kV, кинетическая энергия электрона значительно меньше его энергии покоя. Используем нерелятивистскую механику, полагая $m \simeq m_0$:

$$eV = \frac{1}{2} m v^2.$$

Составляющие скорости при выходе из пушки равны

$$v_{\parallel} = v \cos \beta, \quad v_{\perp} = v \sin \beta.$$

Магнитное поле не создаёт силы, направленной вдоль самого поля. Поэтому движение вдоль поля равномерное, а движение в перпендикулярной плоскости происходит по окружности, причём

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB}, \quad \omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Результирующая траектория представляет собой винтовую линию. Электрон, начинающий движение на оси, возвращается на ось после каждого полного оборота. Наименьшее положительное фокусирующее поле соответствует одному обороту до достижения экрана, поэтому

$$D = v \cos \beta T = \frac{2\pi m v \cos \beta}{e B_{\min}}.$$

Возводя в квадрат и подставляя $v^2 = 2eV/m$, получаем

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V \cos^2 \beta}{B_{\min}^2 D^2}.$$

Для узкого пучка, $\beta \leq 5^\circ$, принимаем $\cos \beta \simeq 1$. Следовательно,

$$\boxed{\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}}.$$

Для пучка, содержащего электроны с различными β , фокусировка является приближённой: их осевые скорости немного различаются. При 5° величина $1 - \cos \beta$ составляет всего около 0.0038.

(b)

Сила Лоренца равна

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

При $V = V_0 > 0$ верхняя пластина положительно заряжена, поэтому электрическое поле направлено вниз, а электрическая сила, действующая на электрон, — вверх.

При $B = B_0 > 0$, применяя правило векторного произведения к виду сверху, получаем:

Электрон движется к	Электрическая сила	Магнитная сила
Участку А	Вверх	Вверх
Участку В	Вверх	Вниз

При пренебрежимо малом зазоре электроны могут пройти между пластинами только тогда, когда действующие на них вертикальные силы уравниваются. Это возможно для **участка В**.

Пусть θ — угол между скоростью электрона и магнитным полем при его движении между пластинами. Пренебрегая краевыми эффектами,

$$E_0 = \frac{V_0}{t}.$$

Условие равновесия сил имеет вид

$$eE_0 = eB_0 v \sin \theta,$$

или

$$\boxed{v \sin \theta = \frac{V_0}{B_0 t}}.$$

Изменение знаков как B , так и V меняет направления обеих сил на противоположные, поэтому они по-прежнему уравниваются для электронов, движущихся к участку В.

После выхода электрона за пределы пластин электрическая сила исчезает, а магнитная сохраняется. Таким образом:

- При $B = B_0$, $V = V_0$ образуется нижний изогнутый след.
- При $B = -B_0$, $V = -V_0$ образуется верхний изогнутый след.
- При $B = V = 0$ образуется центральный прямой след.

Именно эти три следа показаны на рисунке 2.6, что устанавливает ответ

Участок В.

(с)

Используем приближение малого зазора и в главном порядке по последующему отклонению отождествляем угол вылета электрона θ с наблюдаемым углом ϕ . Введём обозначение

$$u = \frac{V_0}{B_0 t}.$$

Численно,

$$u = \frac{580}{(6.91 \times 10^{-3})(0.80 \times 10^{-3})} = 1.0492 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

Условие отбора по скорости принимает вид

$$v(\phi) = \frac{u}{\sin \phi}.$$

По мере уменьшения ϕ от 90° отбираемая скорость увеличивается. Поэтому наименьший наблюдаемый угол, 23° , соответствует максимальной скорости:

$$v_{\max} = \frac{1.0492 \times 10^8}{\sin 23^\circ} = 2.6852 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 0.8951c.$$

Запись «Конец следа» указывает на эту угловую границу; она не содержит численного результата измерения y .

Необходимо использовать релятивистское выражение для кинетической энергии:

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} = 2.2426,$$

$$K_{\max} = (\gamma_{\max} - 1)m_0c^2.$$

Следовательно,

$$K_{\max} = (2.2426 - 1)(9.11 \times 10^{-31})(3.00 \times 10^8)^2 = 1.0188 \times 10^{-13} \text{ J}.$$

Используя стандартное соотношение между единицами $1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$,

$$K_{\max} = 6.36 \times 10^5 \text{ eV}.$$

С точностью, соответствующей точности угла конца следа,

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV} = 0.64 \text{ MeV}.$$

(d)

За пределами пластин пренебрегаем краевым электрическим полем и учитываем магнитное отклонение в главном порядке. Тогда горизонтальное движение электрона приблизительно равномерно, а время его пролёта от края пластины до плёнки равно

$$\tau \simeq \frac{s}{v}.$$

Магнитное поле не совершает работы, поэтому скорость электрона и фактор Лоренца остаются постоянными. В главном порядке модуль вертикальной магнитной силы равен

$$F_z = eB_0v \sin \phi,$$

что даёт вертикальное ускорение

$$a_z = \frac{eB_0v \sin \phi}{\gamma m_0}.$$

Следовательно, смещение каждого из изогнутых следов относительно центрального следа равно

$$\delta \simeq \frac{1}{2}a_z\tau^2 = \frac{eB_0s^2 \sin \phi}{2\gamma m_0v}.$$

Два набора значений полей создают противоположные смещения. Поэтому расстояние между следами равно

$$y = 2\delta \simeq \frac{eB_0s^2 \sin \phi}{\gamma m_0v}.$$

Подставляя

$$v = \frac{V_0}{B_0t \sin \phi}, \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0tc \sin \phi} \right)^2},$$

получаем

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2ts^2}{V_0} \sin^2 \phi \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0tc \sin \phi} \right)^2}.$$

Поскольку $0 < \phi < 180^\circ$, это выражение можно записать в виде

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2ts^2}{V_0} \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0tc} \right)^2}.$$

Таким образом, выберем для осей графика величины

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0tc} \right)^2}, \quad Y = y.$$

Величина, откладываемая по горизонтали, безразмерна. Здесь

$$\frac{V_0}{B_0tc} = 0.349735.$$

Точки для построения графика:

ϕ	Горизонтальная координата X	Вертикальная координата Y / мм
90°	0.93685	17.4
60°	0.68612	12.7
50°	0.52210	9.7
40°	0.34667	6.4
30°	0.17867	3.3

График представляет собой почти прямую линию, проходящую через начало координат. Подходящие диапазоны осей: $0 \leq X \leq 1$ и $0 \leq Y \leq 20$ mm. Аппроксимация прямой, проходящей через начало координат, даёт

$$Y \simeq (18.55 \text{ mm})X.$$

Выражая угловой коэффициент в метрах,

$$S = 1.855 \times 10^{-2} \text{ m},$$

из теоретического соотношения получаем

$$S = \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{e}{m_0} = \frac{SV_0}{B_0^2 t s^2} \simeq \frac{(1.855 \times 10^{-2})(580)}{(6.91 \times 10^{-3})^2 (0.80 \times 10^{-3})(41.0 \times 10^{-3})^2}.$$

Таким образом, значение, полученное из наблюдений, равно

$$\boxed{\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}}.$$

В этом выводе отклонение учтено в главном порядке. При наибольшем измеренном расстоянии между следами $\delta/s = 8.7/41.0 \simeq 0.21$; поэтому поправки, обусловленные конечной кривизной траектории, могут составлять несколько процентов.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Детектор гравитационных волн (Часть А) и гравитационное отклонение света Солнцем (Часть В)

Гравитационные волны и влияние гравитации на свет.

Часть А

В этой части рассматриваются трудности обнаружения гравитационных волн, порождаемых астрономическими событиями. Следует учитывать, что взрыв далёкой сверхновой может вызывать колебания напряжённости гравитационного поля на поверхности Земли порядка $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$.

Модель детектора гравитационных волн (см. рисунок 3.1) состоит из двух металлических стержней длиной 1 м каждый, закреплённых под прямым углом друг к другу. Один торец каждого стержня отполирован до оптически плоской поверхности, а другой конец жёстко закреплён. Положение одного из стержней регулируют так, чтобы сигнал фотоэлемента был минимальным (см. рисунок 3.1).

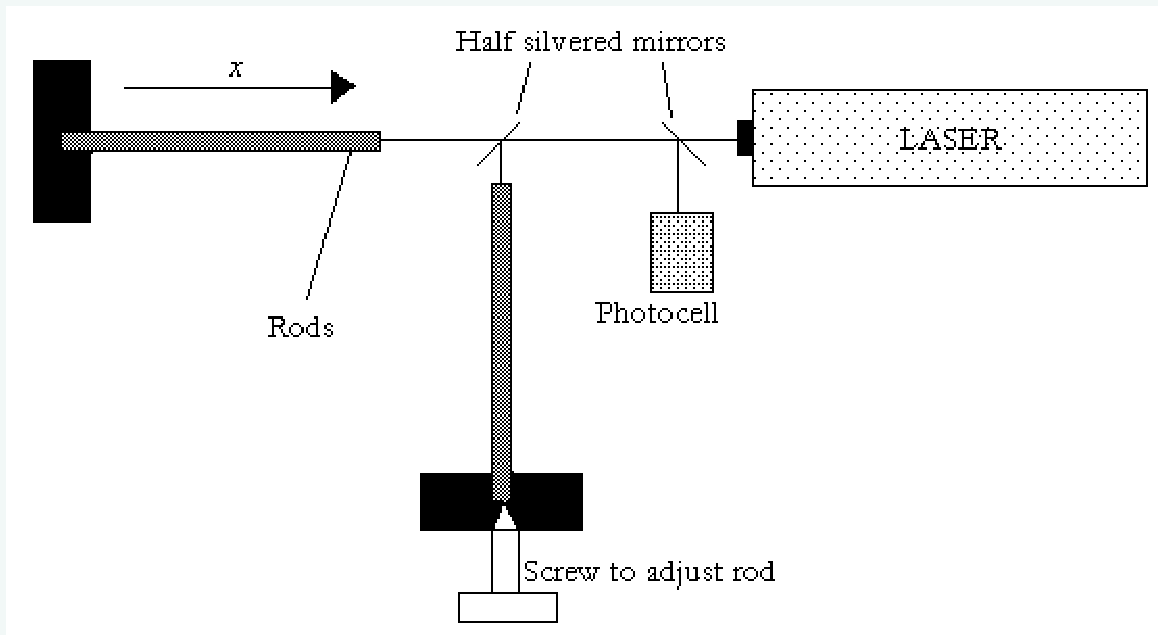


Рисунок 3.1

С помощью пьезоэлектрического устройства на стержни воздействуют коротким резким импульсом. В результате свободные концы стержней совершают колебания с продольным смещением Δx_t , где

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi),$$

а a , μ , ω и ϕ — постоянные.

- Если за промежуток времени 50 с амплитуда движения уменьшается на 20%, определите значение μ .
- Определите также значение ω , если стержни изготовлены из алюминия плотностью (ρ) 2700 kg m^{-3} и с модулем Юнга (E) $7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$.
- Невозможно изготовить стержни совершенно одинаковой длины, поэтому в сигнале фотоэлемента наблюдаются биения с частотой 0.005 Hz . Какова разность длин стержней?
- Для стержня длиной l выведите алгебраическое выражение для изменения длины Δl , вызванного изменением Δg напряжённости гравитационного поля g , через l и другие постоянные, характеризующие материал стержня.
- Свет, излучаемый лазером, монохроматичен и имеет длину волны 656 nm . Если минимальный обнаруживаемый сдвиг интерференционных полос соответствует 10^{-4} длины волны лазера, каково минимальное значение l , необходимое для того, чтобы такая система могла обнаруживать изменения g величиной $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$?

Ненаправленный детектор гравитационных волн представляет собой шар из медного сплава массой 1168 кг, подвешенный в вакууме к виброизолирующему устройству. К шару прикреплены преобразователи, содержащие настроенные колебательные контуры и предназначенные для обнаружения изменений его размеров. Однако эти преобразователи будут регистрировать и все паразитные колебания, обусловленные, например, температурными эффектами, а также шумы из-за электрических наводок.

(f) Для уменьшения колебаний, обусловленных температурными эффектами, шар поддерживают при температуре 100 мК. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний атомов при охлаждении установки от 300 К?

(g) Сначала шар охлаждают до 4.2 К с помощью жидкого азота и жидкого гелия. Затем температуру T понижают до 100 мК с помощью холодильного процесса, при котором энергия отводится из системы со средней мощностью 1 мВт. Известно, что при этих низких температурах удельная теплоёмкость s медного сплава прямо пропорциональна T^3 . Оцените время охлаждения системы от 4.2 К до 100 мК, если при 4.2 К $s = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Часть В

В этой части рассматривается влияние гравитационного поля на распространение света в пространстве.

(a) Фотон, испущенный с поверхности Солнца (масса M , радиус R), испытывает красное смещение. Приписав энергии фотона эквивалентную массу покоя, примените ньютоновскую теорию гравитации и покажите, что эффективная (или измеряемая) частота фотона на бесконечности уменьшается (испытывает красное смещение), умножаясь на коэффициент $(1 - GM/Rc^2)$.

(b) Уменьшение частоты фотона эквивалентно увеличению его периода или, если использовать фотон в качестве эталонных часов, замедлению времени. Кроме того, можно показать, что замедление времени всегда сопровождается сокращением единицы длины в такое же число раз.

Теперь попробуем исследовать, как это влияет на распространение света вблизи Солнца. Сначала определим эффективный показатель преломления n_r в точке на расстоянии r от центра Солнца. Пусть

$$n_r = \frac{c}{c'_r},$$

где c — скорость света, измеряемая в системе координат, находящейся далеко за пределами гравитационного влияния Солнца ($r \rightarrow \infty$), а c'_r — скорость света, измеряемая в системе координат на расстоянии r от центра Солнца.

Покажите, что n_r можно приближённо представить в виде:

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2},$$

при малых GM/rc^2 , где α — постоянная, которую требуется определить.

(c) Используя это выражение для n_r , вычислите в радианах отклонение светового луча от прямолинейной траектории при прохождении вблизи края Солнца.

Данные:

Гравитационная постоянная, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Масса Солнца, $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$.

Радиус Солнца, $R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$.

Скорость света, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Вам также может понадобиться следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **A(a):** $\mu = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.
- **A(b):** Для основной моды продольных колебаний $\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$.
- **A(c):** $|l_1 - l_2| \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.90 \text{ }\mu\text{m}$.
- **A(d):** $\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}$, где Δg — проекция изменения поля на ось стержня, положительное направление которой обращено к его свободному концу.
- **A(e):** $l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m}$, если понимать порог как оптическую разность хода и рассматривать продольное изменение одного плеча относительно другого.
- **A(f):** В классической гармонической модели амплитуда уменьшается в 54.8 раза, до 0.0183 от начального значения.
- **A(g):** $t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}$.
- **B(a):** $\nu_{\infty} \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right)$.
- **B(b):** $\alpha = 2, \quad n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}$.
- **B(c):** $\theta = \frac{4GM}{Rc^2} = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad}$, в сторону Солнца.

Решение

A(a)

Огибающая амплитуды имеет вид

$$A(t) = ae^{-\mu t}.$$

Уменьшение на 20% означает, что через 50 s амплитуда составляет 0.80 от своего предыдущего значения:

$$\frac{A(t+50)}{A(t)} = e^{-50\mu} = 0.80.$$

Следовательно,

$$\mu = -\frac{\ln(0.80)}{50} = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

A(b)

Будем рассматривать стержень как однородную упругую сплошную среду и считать, что наблюдаемые колебания соответствуют его основной продольной моде.

Пусть $u(x, t)$ — продольное смещение, а S — площадь поперечного сечения. Продольная сила равна $ES \partial u / \partial x$. Второй закон Ньютона для малого элемента даёт

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Таким образом, продольные волны распространяются со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

На закреплённом конце смещение равно нулю, а на свободном конце равно нулю продольное напряжение:

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Для моды с пространственной зависимостью $\sin(kx)$ условие на свободном конце требует

$$\cos(kl) = 0.$$

Для основной моды $kl = \pi/2$, поэтому длина стержня равна четверти длины волны. Отсюда

$$\omega_0 = vk = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Численно

$$v = \sqrt{\frac{7.1 \times 10^{10}}{2700}} = 5.128 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

а при $l = 1 \text{ m}$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} (5.128 \times 10^3) = 8.055 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}.$$

При линейном затухании наблюдаемая угловая частота равна $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$. Поскольку $\mu \ll \omega_0$, этой поправкой можно пренебречь:

$$\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}.$$

Соответствующая частота равна

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{4l} \simeq 1.282 \times 10^3 \text{ Hz}.$$

A(c)

Для стержней из одного и того же материала, колеблющихся в одной и той же основной моде,

$$f(l) = \frac{v}{4l}.$$

Следовательно, частота их биений равна

$$f_b = |f_1 - f_2| = \frac{v}{4} \left| \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right|.$$

При малой разности длин $\delta l = |l_1 - l_2|$, когда обе длины приблизительно равны l ,

$$f_b \simeq \frac{v}{4l^2} \delta l = \frac{f}{l} \delta l.$$

Следовательно,

$$\delta l \simeq \frac{l f_b}{f} = \frac{(1)(0.005)}{1281.998} \text{ м},$$

откуда

$$\boxed{\delta l \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ м}}.$$

Отношение $\delta l/l \simeq 3.9 \times 10^{-6}$ подтверждает применимость приближения малой разности длин.

A(d)

Воспользуемся линейной теорией упругости и рассмотрим квазистатическое возмущение гравитационного поля. Пусть координата x отсчитывается от закреплённого конца, $x = 0$, к свободному концу, $x = l$, а Δg обозначает проекцию изменения поля на это направление с учётом знака.

Часть стержня за поперечным сечением с координатой x имеет массу

$$m(x) = \rho S(l - x).$$

Поэтому дополнительная продольная сила, передаваемая через это сечение, равна

$$\Delta F(x) = \rho S(l - x) \Delta g.$$

Согласно определению модуля Юнга, изменение локальной относительной деформации равно

$$\Delta \epsilon(x) = \frac{\Delta F(x)}{ES} = \frac{\rho(l - x) \Delta g}{E}.$$

Интегрируя удлинения всех элементов, получаем

$$\Delta l = \int_0^l \Delta \epsilon(x) dx = \frac{\rho \Delta g}{E} \int_0^l (l - x) dx.$$

Таким образом,

$$\boxed{\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}}.$$

Изменение поля, направленное к закреплённому концу, вызывает сжатие и описывается отрицательным значением Δg .

A(e)

Смещение отражающего торца на Δl изменяет оптическую длину пути света туда и обратно на $2\Delta l$. Полагая, что изменение поля направлено вдоль одного стержня, а другой служит опорой для сравнения продольных изменений, получаем

$$|\Delta D| = 2|\Delta l|.$$

Изменение оптической длины пути на одну длину волны соответствует сдвигу интерференционной картины на одну полосу. Поэтому указанной чувствительности соответствует

$$|\Delta D|_{\min} = 10^{-4} \lambda = 10^{-4} (656 \times 10^{-9}) = 6.56 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Следовательно, минимальное обнаруживаемое смещение конца стержня равно

$$|\Delta l|_{\min} = 3.28 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Используя $A(d)$, получаем

$$2|\Delta l| = \frac{\rho l^2 |\Delta g|}{E}.$$

На пороге обнаружения

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{E 10^{-4} \lambda}{\rho |\Delta g|}}.$$

Подстановка даёт

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{(7.1 \times 10^{10})(10^{-4})(656 \times 10^{-9})}{(2700)(10^{-19})}},$$

так что

$$l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m}.$$

В более общем случае, когда реагируют оба стержня, Δg в этом выражении заменяется разностью проекций изменений поля на их оси с учётом знаков.

A(f)

В классическом гармоническом приближении смещению атома x соответствует потенциальная энергия упругой деформации $\frac{1}{2} \kappa x^2$. Теорема о равнораспределении энергии даёт

$$\frac{1}{2} \kappa \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

Поэтому при неизменной эффективной жёсткости κ характерная амплитуда колебаний изменяется по закону

$$A \propto \sqrt{T}.$$

Поскольку $100 \text{ mK} = 0.100 \text{ K}$,

$$\frac{A_{\text{cold}}}{A_{\text{warm}}} = \sqrt{\frac{0.100}{300}} = \frac{1}{\sqrt{3000}} = 0.0183.$$

Таким образом, коэффициент уменьшения амплитуды равен

$$\frac{A_{\text{warm}}}{A_{\text{cold}}} = \sqrt{3000} \simeq 54.8.$$

Эта оценка основана на классическом описании тепловых колебаний и не учитывает квантовые нулевые колебания.

A(g)

Пусть

$$T_i = 4.2 \text{ K}, \quad T_f = 0.100 \text{ K}, \quad s_i = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Заданный закон изменения теплоёмкости имеет вид

$$s(T) = s_i \left(\frac{T}{T_i} \right)^3.$$

Количество теплоты, которое необходимо отвести от шара, равно

$$Q = m \int_{T_f}^{T_i} s(T) dT = \frac{ms_i}{T_i^3} \int_{T_f}^{T_i} T^3 dT.$$

Следовательно,

$$Q = \frac{ms_i}{4T_i^3} (T_i^4 - T_f^4) = \frac{ms_i T_i}{4} \left[1 - \left(\frac{T_f}{T_i} \right)^4 \right].$$

Численно

$$Q = \frac{(1168)(0.072)(4.2)}{4} \left[1 - \left(\frac{0.100}{4.2} \right)^4 \right] \simeq 88.3 \text{ J}.$$

При средней мощности охлаждения $P = 1.00 \times 10^{-3} \text{ W}$

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{88.3}{10^{-3}} \text{ s}.$$

Отсюда

$$t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}.$$

B(a)

Пусть частота испущенного фотона равна ν_R . Следуя заданной ньютоновской модели, припишем фотону гравитационную массу, эквивалентную его энергии:

$$m_\gamma = \frac{h\nu_R}{c^2}.$$

Работа, необходимая для перемещения этой массы с поверхности Солнца на бесконечность, равна

$$W = \int_R^\infty \frac{GMm_\gamma}{r^2} dr = \frac{GMm_\gamma}{R}.$$

Закон сохранения энергии даёт

$$h\nu_\infty = h\nu_R - \frac{GMm_\gamma}{R}.$$

Подставляя $m_\gamma = h\nu_R/c^2$, получаем

$$h\nu_\infty = h\nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right),$$

и, следовательно,

$$\boxed{\nu_{\infty} \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right)}.$$

Этот результат получен в первом порядке приближения слабого поля. Использование энергии фотона при испускании для вычисления m_{γ} вносит лишь поправки более высокого порядка. Для Солнца

$$\frac{GM}{Rc^2} = 2.12 \times 10^{-6} \ll 1,$$

поэтому это приближение вполне оправданно.

B(b)

Введём обозначения

$$\epsilon = \frac{GM}{rc^2}, \quad q = 1 - \epsilon.$$

Уменьшению частоты с коэффициентом q соответствует увеличение периода часов в $1/q$ раз. Согласно приведённому в условии правилу сокращения длины, соответствующий масштаб длины уменьшается с коэффициентом q .

Таким образом, при принятом в задаче сравнении с удалёнными координатами эффективная скорость изменяется по закону

$$\frac{c'_r}{c} \simeq \frac{q}{1/q} = q^2.$$

Отсюда следует, что

$$n_r = \frac{c}{c'_r} \simeq \frac{1}{(1 - \epsilon)^2}.$$

Разлагая до первого порядка, получаем

$$(1 - \epsilon)^{-2} = 1 + 2\epsilon + O(\epsilon^2).$$

Следовательно,

$$\boxed{n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}}, \quad \boxed{\alpha = 2}.$$

Здесь c'_r — эффективная координатная скорость, используемая в заданной в условии модели показателя преломления. Локальное измерение с использованием собственных длин и времён по-прежнему даёт скорость света в вакууме c .

B(c)

Пусть падающий световой луч распространяется приблизительно вдоль направления x с прицельным параметром b . Вдоль его невозмущённой траектории

$$y = b, \quad r = \sqrt{x^2 + b^2}.$$

Показатель преломления равен

$$n(x, y) = 1 + \frac{\alpha GM}{c^2 \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Закон Снеллиуса для непрерывно изменяющегося показателя преломления даёт уравнение луча

$$\frac{d}{ds}(n\hat{t}) = \nabla n,$$

где $\hat{t}$ — единичный вектор касательной к лучу. При малом отклонении $ds \simeq dx$ и $n \simeq 1$, поэтому поперечная компонента этого уравнения принимает вид

$$\frac{d\theta}{dx} \simeq \frac{\partial n}{\partial y}.$$

Дифференцирование даёт

$$\frac{\partial n}{\partial y} = -\frac{\alpha GM y}{c^2(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

В первом порядке это выражение можно вычислять вдоль прямолинейной траектории $y = b$:

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha GM b}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Используя приведённый в условии интеграл, получаем

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha GM b}{c^2} \frac{2}{b^2} = -\frac{2\alpha GM}{bc^2}.$$

Отрицательный знак указывает на отклонение в сторону Солнца. Для луча, проходящего у самого его края, $b \simeq R$, а $\alpha = 2$, поэтому модуль угла отклонения равен

$$\theta = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

Численно

$$\theta = \frac{4(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}{(6.95 \times 10^8)(3.00 \times 10^8)^2}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\theta = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad} \quad \text{в сторону Солнца}}.$$

Это составляет приблизительно 1.75 угловой секунды.

Решение проверено по официальному решению.