

IPhO 2000

Problemas teóricos y soluciones · Leicester, Reino Unido · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/2000/

Problema 1: Cinco apartados breves: salto con cuerda elástica, máquina térmica, edad de la Tierra mediante datación U-Pb, esfera uniformemente cargada, aro de cobre en rotación en el campo magnético terrestre

A

Una persona que realiza un salto con cuerda elástica está sujeta a un extremo de una larga cuerda elástica. El otro extremo de la cuerda está fijado a un puente elevado. La persona se deja caer desde el puente, partiendo del reposo, hacia el río que hay debajo. No llega a tocar el agua. La masa de la persona es m , la longitud de la cuerda sin estirar es L , la constante elástica de la cuerda (fuerza necesaria para producir un alargamiento de 1 m) es k y la intensidad del campo gravitatorio es g .

Puede suponer que

- la persona puede considerarse una masa puntual m sujeta al extremo de la cuerda,
- la masa de la cuerda es despreciable frente a m ,
- la cuerda obedece la ley de Hooke,
- la resistencia del aire puede despreciarse durante toda la caída de la persona.

Obtenga expresiones para las siguientes magnitudes y anótelas en la hoja de respuestas:

- (a) la distancia y que cae la persona antes de quedar instantáneamente en reposo por primera vez,
- (b) la rapidez máxima v que alcanza la persona durante esta caída,
- (c) el tiempo t transcurrido durante la caída hasta quedar en reposo por primera vez.

B

Una máquina térmica funciona entre dos cuerpos idénticos a temperaturas diferentes T_A y T_B ($T_A > T_B$), cada uno de masa m y calor específico constante s . Los cuerpos permanecen a presión constante y no experimentan ningún cambio de fase.

- (a) Mostrando todo el desarrollo, obtenga una expresión para la temperatura final T_0 que alcanzan los dos cuerpos A y B si la máquina térmica extrae del sistema la máxima cantidad de trabajo mecánico teóricamente posible.

Escriba su expresión para la temperatura final T_0 en la hoja de respuestas.

(b) A partir de lo anterior, obtenga y escriba en la hoja de respuestas una expresión para esta cantidad máxima de trabajo disponible.

La máquina térmica funciona entre dos depósitos de agua, cada uno de volumen 2.50 m^3 . Uno de los depósitos está a 350 K y el otro a 300 K .

(c) Calcule la máxima cantidad de energía mecánica que puede obtenerse. Anote el valor en la hoja de respuestas.

Calor específico del agua $= 4.19 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Densidad del agua $= 1.00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

C

Se supone que, cuando se formó la Tierra, estaban presentes los isótopos ^{238}U y ^{235}U , pero no sus productos de desintegración. Las desintegraciones de ^{238}U y ^{235}U se utilizan para determinar la edad de la Tierra, T .

(a) El isótopo ^{238}U se desintegra con un período de semidesintegración de 4.50×10^9 años. Los productos de desintegración de la serie radiactiva resultante tienen períodos de semidesintegración cortos en comparación con este; en una primera aproximación, puede ignorarse su existencia. La serie de desintegración termina en el isótopo estable de plomo ^{206}Pb .

Obtenga y anote en la hoja de respuestas una expresión para el número de átomos de ^{206}Pb , denotado por ^{206}n , producidos por desintegración radiactiva durante un tiempo t , en función del número actual de átomos de ^{238}U , denotado por ^{238}N , y del período de semidesintegración del ^{238}U . (Puede resultarle útil trabajar en unidades de 10^9 años.)

(b) De forma análoga, el ^{235}U se desintegra con un período de semidesintegración de 0.710×10^9 años a través de una serie de productos con períodos de semidesintegración más cortos, dando lugar al isótopo estable ^{207}Pb .

Escriba en la hoja de respuestas una ecuación que relacione ^{207}n con ^{235}N y el período de semidesintegración del ^{235}U .

(c) Se analiza mediante un espectrómetro de masas un mineral de uranio mezclado con un mineral de plomo. Se miden las concentraciones relativas de los tres isótopos de plomo ^{204}Pb , ^{206}Pb y ^{207}Pb , y se encuentra que los números de átomos están en las proporciones $1.00 : 29.6 : 22.6$, respectivamente. El isótopo ^{204}Pb se utiliza como referencia, ya que **no** es de origen radiactivo. El análisis de un mineral de plomo puro da las proporciones $1.00 : 17.9 : 15.5$.

Sabiendo que la razón $^{238}N : ^{235}N$ es $137 : 1$, deduzca y anote en la hoja de respuestas una ecuación que contenga T .

(d) Suponga que T es mucho mayor que los períodos de semidesintegración de ambos isótopos de uranio y obtenga así un valor aproximado de T .

(e) Es evidente que este valor aproximado no es significativamente mayor que el período de semidesintegración más largo, pero puede utilizarse para obtener un valor mucho más preciso de T . A partir de lo anterior, o por otro método, estime un valor de la edad de la Tierra con un error inferior al 2%.

D

Una carga Q está distribuida uniformemente *en el vacío* por todo un volumen esférico de radio R .

(a) Deduzca expresiones para la intensidad del campo eléctrico a una distancia r del centro de la esfera para $r \leq R$ y $r > R$.

(b) Obtenga una expresión para la energía eléctrica total asociada a esta distribución de carga.

Anote sus respuestas a (a) y (b) en la hoja de respuestas.

E

Se pone en rotación un aro circular de alambre fino de cobre alrededor de un diámetro vertical, en un punto del campo magnético terrestre. La densidad de flujo magnético del campo terrestre en ese punto es $44.5 \mu\text{T}$ y está dirigida formando un ángulo de 64° por debajo de la horizontal. Sabiendo que la densidad del cobre es $8.90 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ y su resistividad es $1.70 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$, calcule cuánto tiempo tardará la velocidad angular del aro en reducirse a la mitad. Muestre los pasos de su cálculo y anote el valor del tiempo en la hoja de respuestas. Este tiempo es mucho mayor que el tiempo de una revolución.

Puede suponer que los efectos del rozamiento de los soportes y del aire son despreciables y, a efectos de esta cuestión, debe ignorar los efectos de autoinducción, aunque estos no serían despreciables.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A(a):**

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

- **A(b):**

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

- **A(c):**

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

- **B(a):**

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

- **B(b):**

$$W_{\max} = ms \left(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B} \right) = ms \left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B} \right)^2.$$

- **B(c):**

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

- **C(a):** Escribiendo $h_{238} = 4.50 \times 10^9 \text{ yr}$,

$$^{206}_{\text{n}} = ^{238}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right).$$

- **C(b):** Escribiendo $h_{235} = 0.710 \times 10^9 \text{ yr}$,

$$^{207}_{\text{n}} = ^{235}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right).$$

- **C(c):**

$$\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7}, \quad T > 0.$$

- **C(d):**

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}.$$

- **C(e):**

$$T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr}.$$

- **D(a):** La componente radial del campo eléctrico es

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3}, & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

El campo apunta hacia fuera para $Q > 0$, hacia dentro para $Q < 0$ y es nulo en el centro.

- **D(b):**

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

- **E:**

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

Solución

A(a)

Sea z la distancia medida hacia abajo desde el puente. La cuerda permanece floja hasta que $z = L$; a partir de entonces, su alargamiento es $x = z - L$ y su tensión es kx .

No hay disipación, por lo que se conserva la energía mecánica. En el punto más bajo, $z = y$, la persona está instantáneamente en reposo. Por tanto,

$$mgy = \frac{1}{2}k(y - L)^2.$$

De forma equivalente, con $x = y - L$,

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mgL}{k} = 0.$$

La raíz físicamente admisible corresponde a un alargamiento positivo:

$$x = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgL}{k}}.$$

Por lo tanto,

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

A(b)

La rapidez aumenta mientras la aceleración hacia abajo es positiva. Una vez que la cuerda está tensa,

$$m\ddot{z} = mg - k(z - L).$$

Por tanto, la rapidez es máxima cuando la aceleración se anula por primera vez:

$$z = L + \frac{mg}{k}.$$

La conservación de la energía en cualquier punto con la cuerda tensa da

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz - \frac{1}{2}k(z - L)^2.$$

En la posición de rapidez máxima,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg \left(L + \frac{mg}{k} \right) - \frac{1}{2}k \left(\frac{mg}{k} \right)^2 = mgL + \frac{m^2g^2}{2k}.$$

Así pues,

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

A(c)

Durante la caída libre inicial a lo largo de la distancia L , el tiempo transcurrido y la rapidez final son

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}, \quad v_1 = \sqrt{2gL}.$$

Tomemos $\tau = 0$ cuando la cuerda se tensa por primera vez y definamos

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{mg}{k}.$$

La ecuación del movimiento posterior es

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g.$$

Con $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = v_1$, su solución es

$$x(\tau) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega_0 \tau) + \frac{v_1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau,$$

de modo que

$$\dot{x}(\tau) = x_{\text{eq}} \omega_0 \sin \omega_0 \tau + v_1 \cos \omega_0 \tau.$$

Esta velocidad se anula por primera vez para $\pi/2 < \omega_0 \tau < \pi$. En consecuencia,

$$\omega_0 \tau = \pi - \arctan \left(\frac{v_1}{x_{\text{eq}} \omega_0} \right) = \pi - \arctan \sqrt{\frac{2kL}{mg}}.$$

Sumando el tiempo de caída libre se obtiene

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

B(a)

El trabajo máximo se obtiene haciendo funcionar la máquina de forma reversible entre las temperaturas instantáneas de los cuerpos, hasta que alcanzan una temperatura común. Todas las temperaturas que aparecen a continuación son temperaturas absolutas.

Cada cuerpo tiene una capacidad calorífica constante ms a presión constante. Por tanto, su variación de entropía es

$$\Delta S = ms \int \frac{dT}{T}.$$

La máquina funciona cíclicamente, por lo que su variación neta de entropía es nula. En un funcionamiento reversible, la variación conjunta de entropía de los cuerpos también es nula:

$$ms \int_{T_A}^{T_0} \frac{dT}{T} + ms \int_{T_B}^{T_0} \frac{dT}{T} = 0.$$

Así,

$$\ln \frac{T_0}{T_A} + \ln \frac{T_0}{T_B} = 0,$$

de donde se obtiene

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

Para ver por qué esto proporciona el máximo, un proceso irreversible produciría, en cambio, un aumento de la entropía total, lo que exigiría

$$T_0 \geq \sqrt{T_A T_B}.$$

Una temperatura final mayor deja más energía térmica en los cuerpos y, en consecuencia, permite extraer menos trabajo.

B(b)

El calor extraído del cuerpo inicialmente más caliente es

$$Q_H = ms(T_A - T_0),$$

y el calor cedido al cuerpo inicialmente más frío es

$$Q_C = ms(T_0 - T_B).$$

La conservación de la energía para la máquina cíclica da

$$W = Q_H - Q_C = ms(T_A + T_B - 2T_0).$$

Sustituyendo la temperatura final del proceso reversible,

$$W_{\max} = ms \left(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B} \right) = ms \left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B} \right)^2.$$

B(c)

La masa de agua de cada depósito es

$$m = \rho V = (1.00 \times 10^3)(2.50) = 2.50 \times 10^3 \text{ kg}.$$

La temperatura final del proceso reversible es

$$T_0 = \sqrt{350 \times 300} = 324.037 \dots \text{ K}.$$

Utilizando este valor sin redondear prematuramente,

$$\begin{aligned} W_{\max} &= (2.50 \times 10^3)(4.19 \times 10^3) \left[350 + 300 - 2\sqrt{350 \times 300} \right] \\ &= 2.0174 \dots \times 10^7 \text{ J}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

C(a)

Para un isótopo radiactivo padre con período de semidesintegración h ,

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{h}.$$

Por tanto, el número inicial de átomos del isótopo padre puede expresarse en función del número actual:

$$N(0) = N(t)e^{\lambda t} = N(t)2^{t/h}.$$

Despreciando los tiempos de vida de los productos intermedios, cada átomo de uranio desintegrado produce un átomo de plomo al final de la cadena. Como inicialmente no había productos de desintegración,

$$n(t) = N(0) - N(t) = N(t) \left(2^{t/h} - 1 \right).$$

Para la serie del ^{238}U ,

$$^{206}_{82}\text{Pb} = ^{238}_{92}\text{U} \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right), \quad h_{238} = 4.50 \times 10^9 \text{ yr}.$$

C(b)

Aplicando el mismo razonamiento a la serie del ^{235}U ,

$$^{207}_{82}\text{Pb} = ^{235}_{92}\text{U} \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right), \quad h_{235} = 0.710 \times 10^9 \text{ yr}.$$

C(c)

El mineral de plomo puro proporciona las proporciones isotópicas de fondo. Estas cantidades de fondo deben restarse de las de la muestra mezclada para determinar el plomo producido por la desintegración del uranio.

Sea N_{204} el número de átomos de ^{204}Pb de la muestra mezclada. Como este isótopo no es radiogénico,

$$^{206}_n = (29.6 - 17.9)N_{204} = 11.7N_{204},$$

y

$$^{207}_n = (22.6 - 15.5)N_{204} = 7.1N_{204}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{^{207}_n}{^{206}_n} = \frac{7.1}{11.7}.$$

Utilizando las ecuaciones de desintegración y la proporción actual de los isótopos de uranio,

$$\frac{7.1}{11.7} = \frac{^{235}\text{N}}{^{238}\text{N}} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = \frac{1}{137} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1}.$$

Así, la ecuación buscada es

$$\boxed{\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7} = 83.13675 \dots}, \quad T > 0.$$

C(d)

Bajo la aproximación indicada $T \gg h_{238}, h_{235}$,

$$2^{T/h} - 1 \simeq 2^{T/h}.$$

La ecuación de datación se convierte en

$$2^{T(1/h_{235} - 1/h_{238})} \simeq 137 \frac{7.1}{11.7}.$$

Tomando logaritmos,

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})}.$$

Numéricamente,

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(83.13675 \dots)}{(\ln 2)(1/0.710 - 1/4.50)} \times 10^9 \text{ yr},$$

de modo que

$$\boxed{T_{\text{approx}} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}}.$$

Este valor es solo de aproximadamente $1.19h_{238}$, por lo que despreciar la resta de 1 en la expresión del ^{238}U no está justificado si se desea un resultado preciso.

C(e)

Conservemos ambas restas de 1. Escribiendo

$$u = \frac{T}{10^9 \text{ yr}},$$

debemos resolver

$$F(u) \equiv \frac{2^{u/0.710} - 1}{2^{u/4.50} - 1} = 83.13675 \dots$$

Las evaluaciones en valores próximos dan

$$F(4.55) = 82.666 \dots, \quad F(4.56) = 83.232 \dots$$

Así, la edad buscada se encuentra entre 4.55 y 4.56 mil millones de años. Una solución numérica más precisa es $u = 4.5583157 \dots$, lo que da

$$\boxed{T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr}},$$

con un error muy inferior al 2% solicitado.

D(a)

La densidad volumétrica uniforme de carga es

$$\rho_q = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3}.$$

La simetría esférica hace que el campo eléctrico sea radial y de módulo constante sobre una superficie gaussiana esférica concéntrica.

Para $r \leq R$, la carga encerrada es

$$Q_{\text{enc}} = \rho_q \frac{4\pi r^3}{3} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

La ley de Gauss da

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0},$$

y, por tanto,

$$\boxed{E_r = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (r \leq R)}.$$

Para $r > R$, la carga encerrada es Q , de modo que

$$\boxed{E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R)}.$$

El campo es nulo en el centro y continuo en la superficie, donde

$$E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

D(b)

En el vacío, la densidad de energía electrostática es

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

La energía total incluye el campo tanto en el interior como en el exterior de la esfera cargada:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\int_0^R E^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty E^2 4\pi r^2 dr \right].$$

Sustituyendo los campos obtenidos anteriormente,

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right].$$

Por lo tanto,

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right),$$

y

$$\boxed{U = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}}.$$

E

Sea a el radio del aro y S el área de la sección transversal del alambre. Denotemos por ρ_m la densidad de masa del cobre y por ρ_e su resistividad eléctrica.

La masa y la resistencia del aro son

$$M = 2\pi a S \rho_m, \quad \mathcal{R} = \rho_e \frac{2\pi a}{S}.$$

Para un aro delgado que gira alrededor de un diámetro, el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2} M a^2 = \pi \rho_m S a^3.$$

El plano del aro permanece vertical, de modo que su normal es horizontal. Solo la componente horizontal del campo terrestre contribuye al flujo magnético:

$$B_h = B \cos 64^\circ.$$

Sea θ el ángulo entre la normal al aro y este campo horizontal. El flujo es

$$\Phi = B_h \pi a^2 \cos \theta.$$

Con $\dot{\theta} = \omega$, la ley de Faraday da

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B_h \pi a^2 \omega \sin \theta.$$

Despreciando la autoinducción, tal como se indica, la corriente es

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}}.$$

Por consiguiente, la potencia instantánea disipada por efecto Joule es

$$P = i^2 \mathcal{R} = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{\mathcal{R}} \omega^2 \sin^2 \theta.$$

El tiempo de amortiguamiento indicado es mucho mayor que el de una revolución, por lo que ω varía muy poco durante cada revolución. Por tanto, podemos utilizar

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2},$$

lo que da

$$\langle P \rangle = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2\mathcal{R}} \omega^2.$$

En ausencia de rozamiento, este calor procede de la energía cinética de rotación:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = -\langle P \rangle.$$

Así, la velocidad angular promediada satisface

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2I\mathcal{R}} \omega.$$

Pero

$$I\mathcal{R} = (\pi \rho_m S a^3) \left(\rho_e \frac{2\pi a}{S} \right) = 2\pi^2 \rho_m \rho_e a^4,$$

por lo que las magnitudes geométricas se cancelan:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2}{4\rho_m \rho_e} \omega.$$

Por tanto,

$$\omega(t) = \omega(0) \exp \left(-\frac{B_h^2 t}{4\rho_m \rho_e} \right).$$

Imponiendo $\omega(t_{1/2}) = \omega(0)/2$ se obtiene

$$t_{1/2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B_h^2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B^2 \cos^2 64^\circ}.$$

Numéricamente,

$$B_h = (44.5 \times 10^{-6}) \cos 64^\circ = 1.95075 \dots \times 10^{-5} \text{ T},$$

y

$$t_{1/2} = \frac{4(8.90 \times 10^3)(1.70 \times 10^{-8}) \ln 2}{(44.5 \times 10^{-6})^2 \cos^2 64^\circ}.$$

Por lo tanto,

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Relación carga-masa del electrón (enfoque magnético en un CRT; partículas beta entre placas cargadas)

(a) Un tubo de rayos catódicos (CRT), que consta de un cañón de electrones y una pantalla, se coloca en un campo magnético uniforme y constante de magnitud $\mathbf{B}$, de modo que el campo magnético sea paralelo al eje del haz del cañón, como se muestra en la figura 2.3.

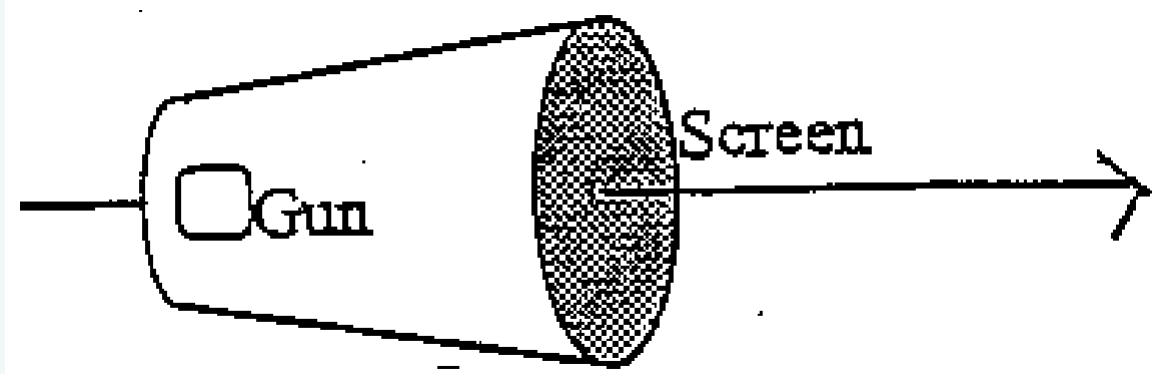


Figura 2.3

El haz de electrones sale del ánodo del cañón de electrones sobre el eje, pero con una divergencia de hasta 5° respecto al eje, como se ilustra en la figura 2.4. En general, se produce una mancha difusa en la pantalla, pero para ciertos valores del campo magnético se obtiene una mancha nítidamente enfocada.

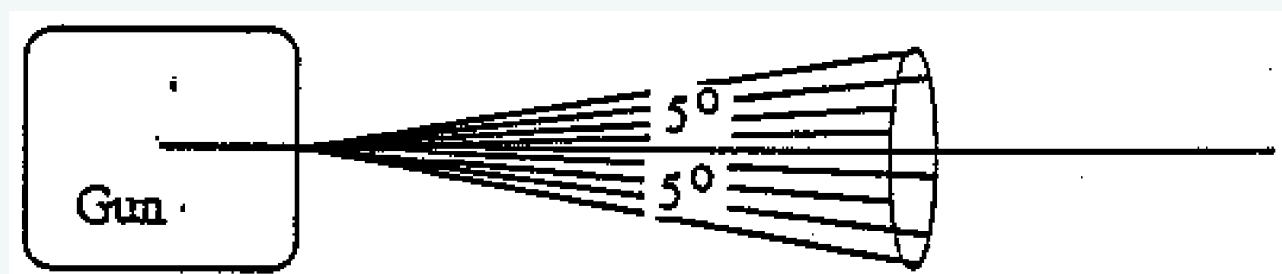


Figura 2.4

Considerando el movimiento de un electrón que inicialmente se mueve formando un ángulo β (donde $0 \leq \beta \leq 5^\circ$) con el eje al salir del cañón de electrones, y considerando las componentes de su movimiento paralela y perpendicular al eje, deduzca una expresión para la relación carga-masa e/m del electrón en función de las siguientes magnitudes:

el menor campo magnético para el que se obtiene una mancha enfocada,
la diferencia de potencial aceleradora entre los extremos del cañón de electrones V
(tenga en cuenta que $V < 2 \text{ kV}$),
y D , la distancia entre el ánodo y la pantalla.

Escriba su expresión en el recuadro destinado a ello en la sección 2a de la hoja de respuestas.

(b) Considere otro método para determinar la relación carga-masa del electrón. La disposición se muestra en una vista lateral y en una vista en planta (desde arriba) en la figura 2.5, con la dirección del campo magnético indicada mediante $\mathbf{B}$. Dentro de este campo magnético uniforme $\mathbf{B}$ se colocan dos placas circulares de latón de radio ρ , separadas por una distancia muy pequeña t . Entre ellas se mantiene una diferencia de potencial V . Las placas son paralelas entre sí y coaxiales; sin embargo, su eje es perpendicular al campo magnético. Una película fotográfica recubre el interior de la superficie curva de un cilindro de radio $\rho + s$, que se mantiene coaxial con las placas. En otras palabras, la película se encuentra a una distancia radial s de los bordes de las placas. Todo el dispositivo se coloca *en el vacío*. Tenga en cuenta que t es mucho menor que s y que ρ .

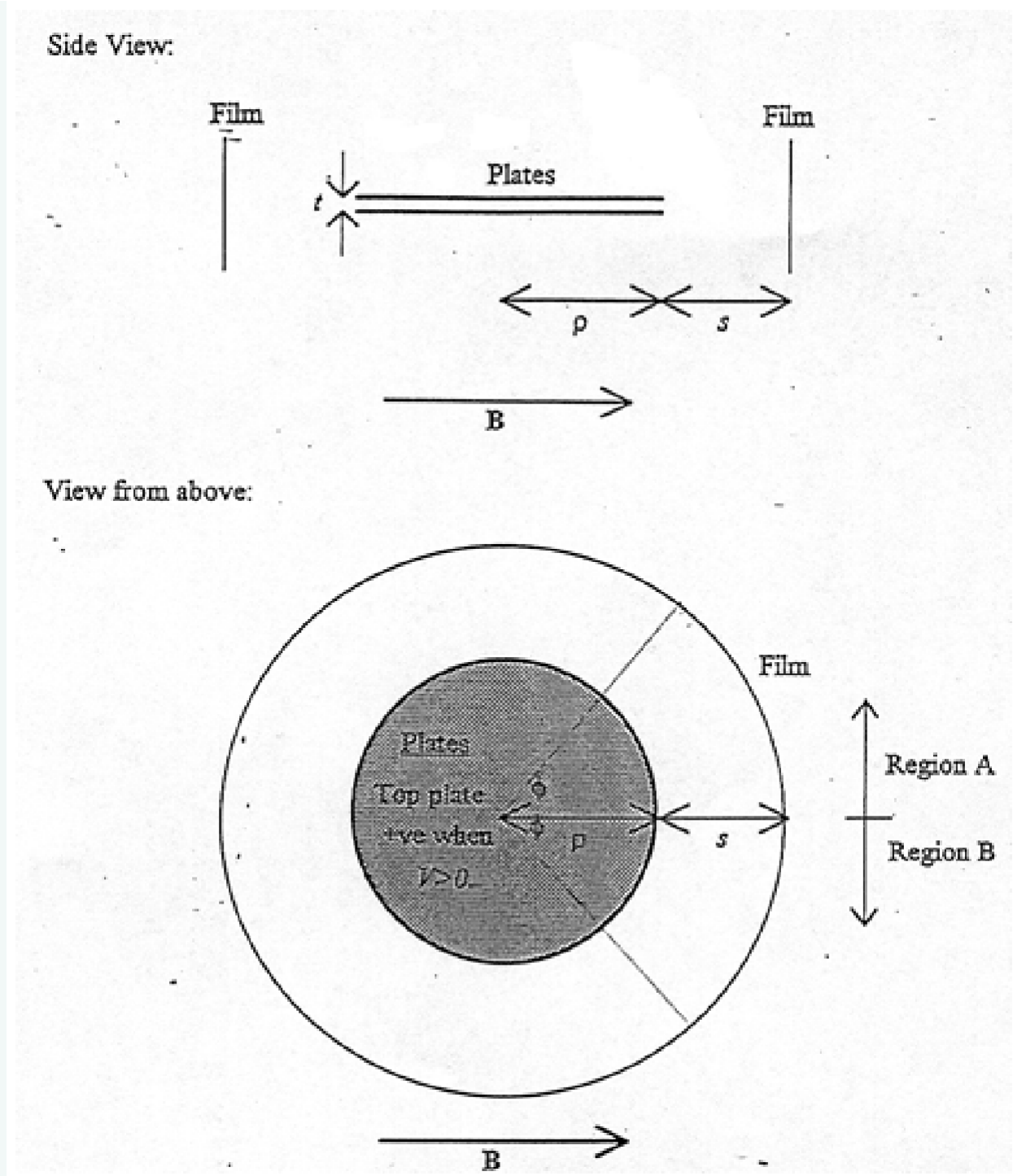


Figura 2.5

Una fuente puntual de partículas β , que emite las partículas β uniformemente en todas las direcciones con un intervalo de velocidades, se coloca entre los centros de las placas, y el mismo trozo de película se expone en tres condiciones diferentes:

- en primer lugar, con $B = 0$ y $V = 0$,
- en segundo lugar, con $B = B_0$ y $V = V_0$, y
- en tercer lugar, con $B = -B_0$ y $V = -V_0$;

donde V_0 y B_0 son constantes positivas. Tenga en cuenta que la placa superior está cargada positivamente cuando $V > 0$ (negativamente cuando $V < 0$), y que el campo magnético tiene el sentido definido en la figura 2.5 cuando $B > 0$ (el sentido opuesto cuando $B < 0$). Para este

apartado, puede suponer que la separación entre las placas es despreciablemente pequeña.

En la figura 2.5 se identifican dos regiones de la película con las letras A y B. Tras la exposición y el revelado, en la figura 2.6 se muestra un esquema de una de estas regiones. ¿De qué región se tomó este trozo (escriba A o B en su hoja de respuestas)? Justifique su respuesta indicando los sentidos de las fuerzas que actúan sobre el electrón.

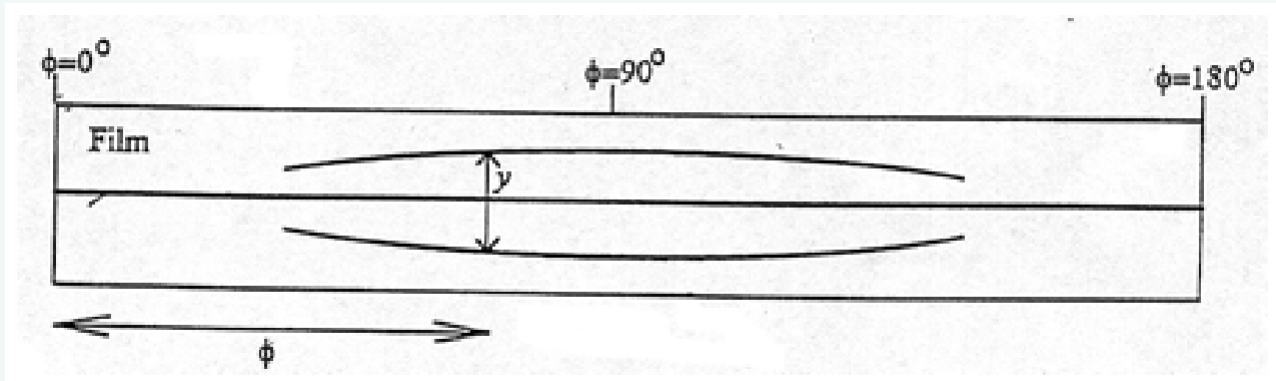


Figura 2.6

(c) Tras la exposición y el revelado, en la figura 2.6 se muestra un esquema de la película. Se mide con un microscopio la separación entre las dos trazas más externas, y esta distancia (y) también se indica para un ángulo concreto en la figura 2.6. Los resultados se recogen en la tabla siguiente; el ángulo ϕ se define en la figura 2.5 como el ángulo entre el campo magnético y una línea que une el centro de las placas con el punto de la película.

Ángulo respecto al campo /grados	ϕ	90	60	50	40	30	23
Separación /mm	y	17.4	12.7	9.7	6.4	3.3	Fin de la traza

A continuación se dan los valores numéricos de los parámetros del sistema:

$$B_0 = 6.91 \text{ mT} \quad V_0 = 580 \text{ V} \quad t = 0.80 \text{ mm} \\ s = 41.0 \text{ mm}$$

Además, puede tomar la velocidad de la luz en el vacío como $3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, y la masa en reposo del electrón como $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

Determine la máxima energía cinética observada de las partículas β .

Escriba la energía cinética máxima como un resultado numérico en eV en el recuadro de la sección 2f de la hoja de respuestas.

(d) Utilizando la información proporcionada en el apartado (f) [es decir, el apartado (c) anterior], obtenga un valor de la relación entre la carga y la masa en reposo del electrón. Para ello, debe trazar una gráfica adecuada en el papel proporcionado.

Indique *algebraicamente* las magnitudes representadas en los ejes horizontal y vertical, tanto en la propia gráfica como en los recuadros destinados a ello en la sección 2g de la hoja de respuestas.

Escriba su valor de la relación carga-masa del electrón en el recuadro destinado a ello en la sección 2g de la hoja de respuestas.

Tenga en cuenta que la respuesta que obtenga puede no coincidir con el valor aceptado debido a un error sistemático en las observaciones.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- (a) Para el menor campo de enfoque positivo $B_{\min}$,

$$\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}.$$

- (b) Región B. Para $B = B_0$, $V = V_0$, la fuerza eléctrica se dirige hacia arriba y la fuerza magnética hacia abajo. Al invertir ambos campos, se invierten ambas fuerzas.

- (c)

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV}$$

correspondiente a $v_{\max} \simeq 2.69 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

- (d) Represente $Y = y$ en el eje vertical frente a la magnitud horizontal adimensional

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}.$$

La recta tiene una pendiente de aproximadamente $1.855 \times 10^{-2} \text{ m}$, lo que da

$$\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}.$$

Solución

En todo el texto, $e > 0$ denota el valor absoluto de la carga del electrón; la carga del electrón es $-e$. Su masa en reposo es m_0 .

(a)

Como la tensión aceleradora es inferior a 2 kV, la energía cinética del electrón es mucho menor que su energía en reposo. Utilizamos la mecánica no relativista, con $m \simeq m_0$:

$$eV = \frac{1}{2}mv^2.$$

Las componentes de la velocidad al salir del cañón son

$$v_{\parallel} = v \cos \beta, \quad v_{\perp} = v \sin \beta.$$

El campo magnético no ejerce ninguna fuerza paralela a sí mismo. Por tanto, el movimiento paralelo es uniforme, mientras que el movimiento perpendicular es circular, con

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB}, \quad \omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

La trayectoria resultante es una hélice. Un electrón que parte del eje vuelve al eje después de cada vuelta completa. El menor campo de enfoque positivo corresponde a una vuelta antes de alcanzar la pantalla, de modo que

$$D = v \cos \beta T = \frac{2\pi m v \cos \beta}{e B_{\min}}.$$

Elevando al cuadrado y sustituyendo $v^2 = 2eV/m$, se obtiene

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V \cos^2 \beta}{B_{\min}^2 D^2}.$$

Para el haz estrecho, $\beta \leq 5^\circ$, tomamos $\cos \beta \simeq 1$. Por tanto,

$$\boxed{\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}}.$$

El enfoque es aproximado para un haz que contiene distintos valores de β : sus velocidades axiales difieren ligeramente. A 5° , $1 - \cos \beta$ es solo aproximadamente 0.0038.

(b)

La fuerza de Lorentz es

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Para $V = V_0 > 0$, la placa superior es positiva, por lo que el campo eléctrico apunta hacia abajo y la fuerza eléctrica sobre un electrón apunta hacia arriba.

Para $B = B_0 > 0$, al aplicar la regla del producto vectorial a la vista en planta se obtiene:

Electrón que se dirige hacia	Fuerza eléctrica	Fuerza magnética
Región A	Hacia arriba	Hacia arriba
Región B	Hacia arriba	Hacia abajo

Con una separación despreciablemente pequeña, los electrones solo pueden atravesar el espacio entre las placas cuando sus fuerzas verticales se equilibran. Esto es posible en la **región B**.

Sea θ el ángulo entre la velocidad del electrón y el campo magnético mientras se desplaza entre las placas. Despreciando los efectos de borde,

$$E_0 = \frac{V_0}{t}.$$

El equilibrio de fuerzas requiere

$$eE_0 = eB_0 v \sin \theta,$$

o bien

$$\boxed{v \sin \theta = \frac{V_0}{B_0 t}}.$$

Al invertir tanto B como V , se invierten ambas fuerzas, por lo que siguen equilibrándose para los electrones que se dirigen hacia la región B.

Después de que un electrón sale de las placas, la fuerza eléctrica desaparece, mientras que la fuerza magnética permanece. Por tanto:

- $B = B_0$, $V = V_0$ produce la traza curva inferior.
- $B = -B_0$, $V = -V_0$ produce la traza curva superior.
- $B = V = 0$ produce la traza recta central.

Estas son las tres trazas mostradas en la figura 2.6, lo que permite establecer

Región B.

(c)

Utilizamos la aproximación de separación pequeña y , al orden dominante en la desviación posterior, identificamos el ángulo de salida del electrón θ con el ángulo observado ϕ . Definimos

$$u = \frac{V_0}{B_0 t}.$$

Numéricamente,

$$u = \frac{580}{(6.91 \times 10^{-3})(0.80 \times 10^{-3})} = 1.0492 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

La condición de selección de velocidades se convierte en

$$v(\phi) = \frac{u}{\sin \phi}.$$

A medida que ϕ disminuye desde 90° , la rapidez seleccionada aumenta. Por tanto, el menor ángulo observado, 23° , corresponde a la rapidez máxima:

$$v_{\max} = \frac{1.0492 \times 10^8}{\sin 23^\circ} = 2.6852 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 0.8951c.$$

La entrada «Fin de la traza» especifica este límite angular; no proporciona ninguna medida numérica de y .

Es necesario utilizar la energía cinética relativista:

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} = 2.2426,$$

$$K_{\max} = (\gamma_{\max} - 1)m_0 c^2.$$

Por tanto,

$$K_{\max} = (2.2426 - 1)(9.11 \times 10^{-31})(3.00 \times 10^8)^2 = 1.0188 \times 10^{-13} \text{ J}.$$

Utilizando la conversión de unidades estándar $1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$,

$$K_{\max} = 6.36 \times 10^5 \text{ eV}.$$

Con una precisión razonable para el ángulo del extremo de la traza,

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV} = 0.64 \text{ MeV}.$$

(d)

Fuera de las placas, despreciamos el campo eléctrico de borde y conservamos el término dominante de la desviación magnética. El movimiento horizontal del electrón es entonces aproximadamente uniforme, y su tiempo de vuelo desde el borde de las placas hasta la película es

$$\tau \simeq \frac{s}{v}.$$

El campo magnético no realiza trabajo, por lo que la rapidez del electrón y su factor de Lorentz permanecen constantes. Al orden dominante, la fuerza magnética vertical tiene una magnitud

$$F_z = eB_0 v \sin \phi,$$

lo que da una aceleración vertical

$$a_z = \frac{eB_0 v \sin \phi}{\gamma m_0}.$$

Por consiguiente, el desplazamiento de cualquiera de las trazas curvas respecto a la traza central es

$$\delta \simeq \frac{1}{2} a_z \tau^2 = \frac{eB_0 s^2 \sin \phi}{2\gamma m_0 v}.$$

Las dos configuraciones de los campos producen desplazamientos opuestos. Por tanto, su separación es

$$y = 2\delta \simeq \frac{eB_0 s^2 \sin \phi}{\gamma m_0 v}.$$

Sustituyendo

$$v = \frac{V_0}{B_0 t \sin \phi}, \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0 t c \sin \phi} \right)^2},$$

obtenemos

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0} \sin^2 \phi \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0 t c \sin \phi} \right)^2}.$$

Como $0 < \phi < 180^\circ$, esto se puede escribir como

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0} \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}.$$

Así pues, elegimos los ejes de la gráfica como

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}, \quad Y = y.$$

La magnitud horizontal es adimensional. En este caso,

$$\frac{V_0}{B_0 t c} = 0.349735.$$

Los puntos que se deben representar son:

ϕ	Coordenada horizontal X	Coordenada vertical Y / mm
90°	0.93685	17.4
60°	0.68612	12.7
50°	0.52210	9.7
40°	0.34667	6.4
30°	0.17867	3.3

La gráfica es una línea casi recta que pasa por el origen. Unos intervalos adecuados para los ejes son $0 \leq X \leq 1$ y $0 \leq Y \leq 20$ mm. Un ajuste que pasa por el origen da

$$Y \simeq (18.55 \text{ mm})X.$$

Expresando la pendiente en metros,

$$S = 1.855 \times 10^{-2} \text{ m},$$

la relación teórica da

$$S = \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0}.$$

Por tanto,

$$\frac{e}{m_0} = \frac{SV_0}{B_0^2 t s^2} \simeq \frac{(1.855 \times 10^{-2})(580)}{(6.91 \times 10^{-3})^2 (0.80 \times 10^{-3})(41.0 \times 10^{-3})^2}.$$

Por tanto, el valor deducido de las observaciones es

$$\boxed{\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}}.$$

Esta deducción conserva el término dominante de la desviación. Para la mayor separación medida, $\delta/s = 8.7/41.0 \simeq 0.21$; por tanto, las correcciones debidas a la curvatura finita pueden contribuir con efectos de unos pocos puntos porcentuales.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Detector de ondas gravitacionales (Parte A) y desviación gravitacional de la luz por el Sol (Parte B)

Ondas gravitacionales y efectos de la gravedad sobre la luz.

Parte A

Esta parte trata de las dificultades para detectar ondas gravitacionales generadas por fenómenos astronómicos. Debe tenerse en cuenta que la explosión de una supernova lejana puede producir fluctuaciones de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie de la Tierra de aproximadamente $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$.

Un modelo de detector de ondas gravitacionales (véase la figura 3.1) consta de dos barras metálicas de 1m de longitud cada una, dispuestas perpendicularmente entre sí. Un extremo de cada barra está pulido hasta obtener una superficie ópticamente plana, y el otro está sujeto rígidamente. La posición de una de las barras se ajusta de modo que la señal recibida de la fotocélula sea mínima (véase la figura 3.1).

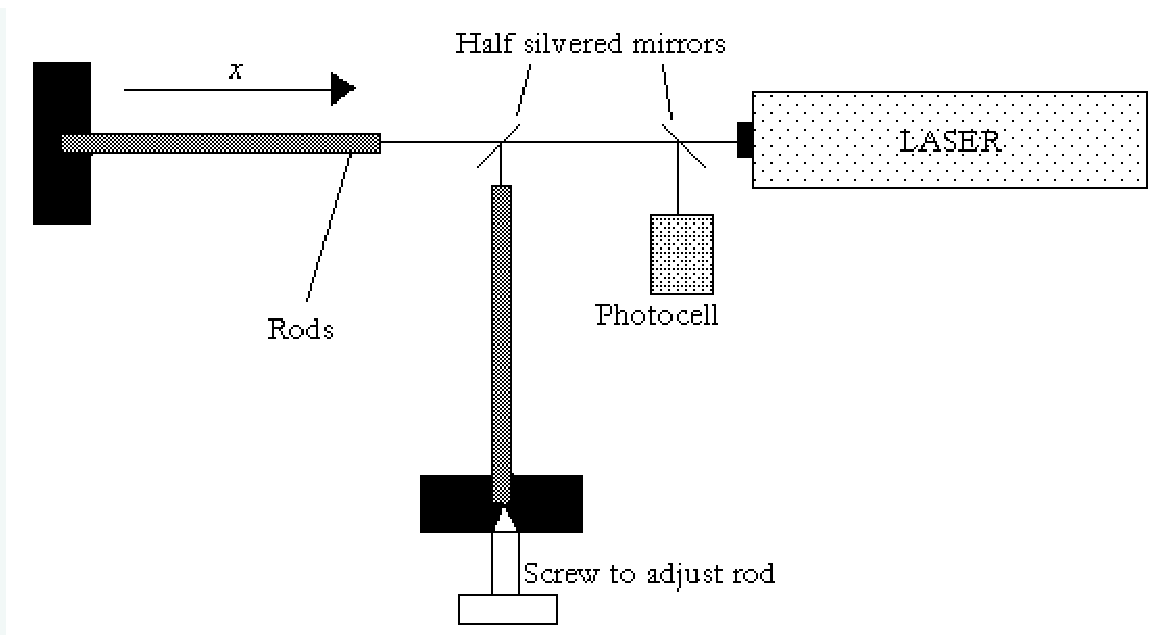


Figura 3.1

Se aplica a las barras un impulso breve y brusco mediante un dispositivo piezoeléctrico. Como resultado, los extremos libres de las barras oscilan con un desplazamiento longitudinal Δx_t , donde

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi),$$

y a, μ, ω y ϕ son constantes.

- Si la amplitud del movimiento se reduce un 20% durante un intervalo de 50s, determine un valor de μ .
- Determine también un valor de ω , sabiendo que las barras son de aluminio, con una densidad (ρ) de 2700 kg m^{-3} y un módulo de Young (E) de $7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$.
- Es imposible fabricar las barras con exactamente la misma longitud, por lo que la señal de la fotocélula tiene una frecuencia de batido de 0.005 Hz . ¿Cuál es la diferencia de longitud entre las barras?
- Para la barra de longitud l , deduzca una expresión algebraica para el cambio de longitud, Δl , debido a un cambio, Δg , en la intensidad del campo gravitatorio, g , en función de l y de otras constantes del material de la barra.
- La luz producida por el láser es monocromática, con una longitud de onda de 656 nm . Si el desplazamiento mínimo de las franjas que puede detectarse es 10^{-4} de la longitud de onda del láser, ¿cuál es el valor mínimo de l necesario para que un sistema de este tipo sea capaz de detectar variaciones de g de $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$?

Un tipo no direccional de detector de ondas gravitacionales consiste en una esfera de aleación de cobre de masa 1168 kg , suspendida en el vacío de un sistema que reduce las vibraciones. A la esfera se fijan transductores que contienen circuitos sintonizados para detectar cambios en sus dimensiones. Sin embargo, los transductores captarán todas las vibraciones espurias debidas, por ejemplo, a efectos térmicos, así como el ruido debido a la captación de interferencias eléctricas.

(f) Para reducir las vibraciones debidas a los efectos térmicos, la esfera se mantiene a una temperatura de 100 mK. ¿En qué factor se habrá reducido la amplitud de las vibraciones atómicas al enfriar el conjunto desde 300 K?

(g) La esfera se enfría inicialmente hasta 4.2 K utilizando nitrógeno líquido y helio líquido. La temperatura, T , se reduce después hasta 100 mK mediante un proceso de refrigeración que extrae energía del sistema a una tasa media de 1 mW. Sabiendo que la capacidad calorífica específica, s , de la aleación de cobre es directamente proporcional a T^3 a estas bajas temperaturas, estime el tiempo que tarda el sistema en enfriarse desde 4.2 K hasta 100 mK, dado que $s = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ a 4.2 K.

Parte B

Esta parte trata del efecto de un campo gravitatorio sobre la propagación de la luz en el espacio.

(a) Un fotón emitido desde la superficie del Sol (masa M , radio R) experimenta un corrimiento al rojo. Suponiendo una masa en reposo equivalente a la energía del fotón, aplique la teoría gravitatoria newtoniana para demostrar que la frecuencia efectiva (o medida) del fotón en el infinito se reduce (experimenta un corrimiento al rojo) por el factor $(1 - GM/Rc^2)$.

(b) Una reducción de la frecuencia del fotón equivale a un aumento de su período o, si se utiliza el fotón como reloj patrón, a una dilatación del tiempo. Además, puede demostrarse que una dilatación del tiempo siempre va acompañada de una contracción de la unidad de longitud por el mismo factor.

Ahora intentaremos estudiar el efecto que esto tiene sobre la propagación de la luz cerca del Sol. Definamos primero un índice de refracción efectivo n_r en un punto situado a una distancia r del centro del Sol. Sea

$$n_r = \frac{c}{c'_r},$$

donde c es la velocidad de la luz medida en un sistema de coordenadas alejado de la influencia gravitatoria del Sol ($r \rightarrow \infty$), y c'_r es la velocidad de la luz medida en un sistema de coordenadas situado a una distancia r del centro del Sol.

Demuestre que n_r puede aproximarse por:

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2},$$

para valores pequeños de GM/rc^2 , donde α es una constante que debe determinar.

(c) Utilizando esta expresión para n_r , calcule en radianes la desviación de un rayo de luz respecto de su trayectoria rectilínea al pasar junto al borde del Sol.

Datos:

Constante gravitacional, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Masa del Sol, $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$.

Radio del Sol, $R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$.

Velocidad de la luz, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

También puede necesitar la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **A(a):** $\mu = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.
- **A(b):** Para el modo longitudinal fundamental, $\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$.
- **A(c):** $|l_1 - l_2| \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.90 \text{ }\mu\text{m}$.
- **A(d):** $\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}$, tomando Δg a lo largo de la barra, positivo hacia su extremo libre.
- **A(e):** $l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m}$, interpretando el umbral como una diferencia de camino óptico y considerando la respuesta axial de un brazo respecto del otro.
- **A(f):** La amplitud disminuye en un factor de 54.8 , hasta 0.0183 de su valor inicial, en el modelo armónico clásico.
- **A(g):** $t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}$.
- **B(a):** $\nu_{\infty} \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right)$.
- **B(b):** $\alpha = 2, \quad n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}$.
- **B(c):** $\theta = \frac{4GM}{Rc^2} = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad}$, hacia el Sol.

Solución

A(a)

La envolvente de la amplitud es

$$A(t) = ae^{-\mu t}.$$

Una reducción del 20% significa que la amplitud después de 50 s es 0.80 veces su valor anterior:

$$\frac{A(t+50)}{A(t)} = e^{-50\mu} = 0.80.$$

Por tanto,

$$\mu = -\frac{\ln(0.80)}{50} = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

A(b)

Trate la barra como un medio continuo elástico uniforme y considere que la oscilación observada corresponde a su modo longitudinal fundamental.

Sean $u(x, t)$ el desplazamiento longitudinal y S el área de la sección transversal. La fuerza longitudinal es $ES \partial u / \partial x$. La segunda ley de Newton aplicada a un elemento corto da

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Así, las ondas longitudinales se propagan a

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

El extremo fijo tiene desplazamiento nulo, mientras que el extremo libre tiene esfuerzo longitudinal nulo:

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Para un modo con dependencia espacial $\sin(kx)$, la condición en el extremo libre exige

$$\cos(kl) = 0.$$

Para el modo fundamental, $kl = \pi/2$, por lo que la longitud de la barra es un cuarto de la longitud de onda. Por consiguiente,

$$\omega_0 = vk = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Numéricamente,

$$v = \sqrt{\frac{7.1 \times 10^{10}}{2700}} = 5.128 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

y, para $l = 1 \text{ m}$,

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} (5.128 \times 10^3) = 8.055 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}.$$

Para un amortiguamiento lineal, la frecuencia angular observada es $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$. Puesto que $\mu \ll \omega_0$, esta corrección es despreciable:

$$\boxed{\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}}.$$

La frecuencia correspondiente es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{4l} \simeq 1.282 \times 10^3 \text{ Hz}.$$

A(c)

Para barras del mismo material que oscilan en el mismo modo fundamental,

$$f(l) = \frac{v}{4l}.$$

En consecuencia, su frecuencia de batido es

$$f_b = |f_1 - f_2| = \frac{v}{4} \left| \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right|.$$

Para una pequeña diferencia de longitud $\delta l = |l_1 - l_2|$, con ambas longitudes aproximadamente iguales a l ,

$$f_b \simeq \frac{v}{4l^2} \delta l = \frac{f}{l} \delta l.$$

Por tanto,

$$\delta l \simeq \frac{l f_b}{f} = \frac{(1)(0.005)}{1281.998} \text{ m},$$

lo que da

$$\boxed{\delta l \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ m}}.$$

El cociente $\delta l/l \simeq 3.9 \times 10^{-6}$ confirma la validez de la aproximación de pequeña diferencia.

A(d)

Utilice la elasticidad lineal y una perturbación gravitatoria cuasiestática. Sea x la coordenada que va desde el extremo fijo, $x = 0$, hasta el extremo libre, $x = l$, y sea Δg la componente con signo de la variación del campo a lo largo de esta dirección.

El material situado más allá de una sección transversal en x tiene una masa

$$m(x) = \rho S(l - x).$$

Por tanto, la fuerza axial adicional transmitida a través de esa sección es

$$\Delta F(x) = \rho S(l - x) \Delta g.$$

Por la definición del módulo de Young, la variación de la deformación unitaria local es

$$\Delta \epsilon(x) = \frac{\Delta F(x)}{ES} = \frac{\rho(l - x) \Delta g}{E}.$$

Integrando el alargamiento de todos los elementos,

$$\Delta l = \int_0^l \Delta \epsilon(x) dx = \frac{\rho \Delta g}{E} \int_0^l (l - x) dx.$$

Así,

$$\boxed{\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}}.$$

Una variación del campo dirigida hacia el extremo fijo produce una compresión, representada por un Δg negativo.

A(e)

Un desplazamiento Δl de un extremo reflector modifica el camino óptico de ida y vuelta en $2\Delta l$. Tomando la variación del campo a lo largo de una barra, mientras la otra actúa como referencia longitudinal,

$$|\Delta D| = 2|\Delta l|.$$

Una variación del camino óptico de una longitud de onda desplaza la condición de interferencia en una franja. Por tanto, la sensibilidad indicada corresponde a

$$|\Delta D|_{\min} = 10^{-4} \lambda = 10^{-4} (656 \times 10^{-9}) = 6.56 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

En consecuencia, el desplazamiento mínimo detectable del extremo de la barra es

$$|\Delta l|_{\min} = 3.28 \times 10^{-11} \text{ m.}$$

Utilizando A(d),

$$2|\Delta l| = \frac{\rho l^2 |\Delta g|}{E}.$$

En el umbral de detección,

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{E 10^{-4} \lambda}{\rho |\Delta g|}}.$$

La sustitución da

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{(7.1 \times 10^{10})(10^{-4})(656 \times 10^{-9})}{(2700)(10^{-19})}},$$

por lo que

$$l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m.}$$

En general, si ambas barras responden, Δg en esta expresión se sustituye por la diferencia entre las variaciones con signo de sus componentes axiales del campo.

A(f)

En la aproximación armónica clásica, un desplazamiento atómico x tiene una energía potencial elástica $\frac{1}{2} \kappa x^2$. La equipartición da

$$\frac{1}{2} \kappa \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

Si la rigidez efectiva κ permanece constante, la amplitud característica de vibración es, por tanto, proporcional a

$$A \propto \sqrt{T}.$$

Puesto que $100 \text{ mK} = 0.100 \text{ K}$,

$$\frac{A_{\text{cold}}}{A_{\text{warm}}} = \sqrt{\frac{0.100}{300}} = \frac{1}{\sqrt{3000}} = 0.0183.$$

Así, la amplitud se reduce en un factor

$$\frac{A_{\text{warm}}}{A_{\text{cold}}} = \sqrt{3000} \simeq 54.8.$$

Esta estimación utiliza vibraciones térmicas clásicas y desprecia el movimiento cuántico de punto cero.

A(g)

Sean

$$T_i = 4.2 \text{ K}, \quad T_f = 0.100 \text{ K}, \quad s_i = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

La ley especificada para la capacidad calorífica es

$$s(T) = s_i \left(\frac{T}{T_i} \right)^3.$$

El calor que debe extraerse de la esfera es

$$Q = m \int_{T_f}^{T_i} s(T) dT = \frac{ms_i}{T_i^3} \int_{T_f}^{T_i} T^3 dT.$$

Por tanto,

$$Q = \frac{ms_i}{4T_i^3} (T_i^4 - T_f^4) = \frac{ms_i T_i}{4} \left[1 - \left(\frac{T_f}{T_i} \right)^4 \right].$$

Numéricamente,

$$Q = \frac{(1168)(0.072)(4.2)}{4} \left[1 - \left(\frac{0.100}{4.2} \right)^4 \right] \simeq 88.3 \text{ J}.$$

Con una potencia media de refrigeración $P = 1.00 \times 10^{-3} \text{ W}$,

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{88.3}{10^{-3}} \text{ s}.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}}.$$

B(a)

Sea ν_R la frecuencia emitida. Siguiendo el modelo newtoniano prescrito, asigne al fotón una masa gravitatoria equivalente a su energía

$$m_\gamma = \frac{h\nu_R}{c^2}.$$

El trabajo necesario para trasladar esta masa desde la superficie solar hasta el infinito es

$$W = \int_R^\infty \frac{GMm_\gamma}{r^2} dr = \frac{GMm_\gamma}{R}.$$

La conservación de la energía da

$$h\nu_\infty = h\nu_R - \frac{GMm_\gamma}{R}.$$

Sustituyendo $m_\gamma = h\nu_R/c^2$,

$$h\nu_\infty = h\nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right),$$

y, por tanto,

$$\boxed{\nu_\infty \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right)}.$$

Este es un resultado de primer orden en la aproximación de campo débil. Utilizar la energía emitida para calcular m_γ introduce únicamente correcciones de orden superior. Para el Sol,

$$\frac{GM}{Rc^2} = 2.12 \times 10^{-6} \ll 1,$$

por lo que la aproximación está bien justificada.

B(b)

Defina

$$\epsilon = \frac{GM}{rc^2}, \quad q = 1 - \epsilon.$$

La reducción de la frecuencia por el factor q corresponde a un aumento del período del reloj por el factor $1/q$. Según la regla de contracción de longitudes proporcionada en el enunciado, la escala de longitud asociada disminuye por el factor q .

Así, en la comparación del problema con coordenadas lejanas, la velocidad efectiva varía según

$$\frac{c'_r}{c} \simeq \frac{q}{1/q} = q^2.$$

De ello se deduce que

$$n_r = \frac{c}{c'_r} \simeq \frac{1}{(1 - \epsilon)^2}.$$

Desarrollando hasta primer orden,

$$(1 - \epsilon)^{-2} = 1 + 2\epsilon + O(\epsilon^2).$$

Por tanto,

$$\boxed{n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}}, \quad \boxed{\alpha = 2}.$$

Aquí c'_r es la velocidad coordenada efectiva utilizada en el modelo de índice de refracción del enunciado. Una medición local con longitudes y tiempos propios sigue dando la velocidad en el vacío c .

B(c)

Considere que el rayo de luz incidente se propaga aproximadamente en la dirección x , con un parámetro de impacto b . A lo largo de su trayectoria no perturbada,

$$y = b, \quad r = \sqrt{x^2 + b^2}.$$

El índice de refracción es

$$n(x, y) = 1 + \frac{\alpha GM}{c^2 \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

La ley de Snell para un índice de refracción que varía continuamente da la ecuación del rayo

$$\frac{d}{ds}(n\hat{t}) = \nabla n,$$

donde $\hat{t}$ es el vector tangente unitario del rayo. Para una desviación pequeña, $ds \simeq dx$ y $n \simeq 1$, por lo que su componente transversal se convierte en

$$\frac{d\theta}{dx} \simeq \frac{\partial n}{\partial y}.$$

La derivación da

$$\frac{\partial n}{\partial y} = -\frac{\alpha GM y}{c^2 (x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

A primer orden, esto puede evaluarse a lo largo de la trayectoria rectilínea $y = b$:

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha G M b}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Utilizando la integral proporcionada,

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha G M b}{c^2} \frac{2}{b^2} = -\frac{2\alpha G M}{b c^2}.$$

El signo negativo indica una desviación hacia el Sol. Para un rayo que pasa rozando su borde, $b \simeq R$, y $\alpha = 2$, lo que da la magnitud de la desviación

$$\theta = \frac{4 G M}{R c^2}.$$

Numéricamente,

$$\theta = \frac{4(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}{(6.95 \times 10^8)(3.00 \times 10^8)^2}.$$

Así,

$$\boxed{\theta = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad} \quad \text{hacia el Sol}}.$$

Esto equivale aproximadamente a 1.75 segundos de arco.

La solución se comprobó con la solución oficial.