

IPhO 2000

Theorieaufgaben und Lösungen · Leicester, Vereinigtes Königreich · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/2000/

Aufgabe 1: Fünf kurze Teile: Bungeespringer, Wärmekraftmaschine, Alter der Erde aus der U-Pb-Datierung, homogen geladene Kugel, rotierender Kupferring im Erdmagnetfeld

A

Ein Bungeespringer ist an einem Ende eines langen elastischen Seils befestigt. Das andere Ende des elastischen Seils ist an einer hohen Brücke befestigt. Der Springer tritt von der Brücke und fällt aus der Ruhe auf den darunterliegenden Fluss zu. Er erreicht das Wasser nicht. Die Masse des Springers ist m , die ungedehnte Länge des Seils ist L , das Seil hat eine Federkonstante (Kraft zur Erzeugung einer Dehnung von 1 m) von k , und die Gravitationsfeldstärke ist g .

Sie dürfen annehmen, dass

- der Springer als punktförmige Masse m am Ende des Seils betrachtet werden kann,
- die Masse des Seils gegenüber m vernachlässigbar ist,
- das Seil dem Hooke'schen Gesetz gehorcht,
- der Luftwiderstand während des gesamten Falls des Springers vernachlässigt werden kann.

Leiten Sie Ausdrücke für die folgenden Größen her und tragen Sie sie auf dem Antwortblatt ein:

- (a) die Strecke y , die der Springer fällt, bevor er zum ersten Mal augenblicklich zur Ruhe kommt,
- (b) die maximale Geschwindigkeit v , die der Springer während dieses Falls erreicht,
- (c) die Zeit t , die während des Falls vergeht, bevor er zum ersten Mal zur Ruhe kommt.

B

Eine Wärmekraftmaschine arbeitet zwischen zwei identischen Körpern mit unterschiedlichen Temperaturen T_A und T_B ($T_A > T_B$), wobei jeder Körper die Masse m und die konstante spezifische Wärmekapazität s hat. Die Körper stehen unter konstantem Druck und durchlaufen keinen Phasenübergang.

- (a) Leiten Sie unter Angabe des vollständigen Rechenwegs einen Ausdruck für die Endtemperatur T_0 her, die die beiden Körper A und B erreichen, wenn die Wärmekraftmaschine dem System die theoretisch maximal mögliche mechanische Arbeit entnimmt.

Tragen Sie Ihren Ausdruck für die Endtemperatur T_0 auf dem Antwortblatt ein.

- (b) Leiten Sie daraus einen Ausdruck für diese maximal verfügbare Arbeit her und tragen Sie ihn auf dem Antwortblatt ein.

Die Wärmekraftmaschine arbeitet zwischen zwei Wassertanks mit einem Volumen von jeweils 2.50 m^3 . Ein Tank hat eine Temperatur von 350 K , der andere von 300 K .

(c) Berechnen Sie die maximal gewinnbare mechanische Energie. Tragen Sie den Wert auf dem Antwortblatt ein.

Spezifische Wärmekapazität von Wasser $= 4.19 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Dichte von Wasser $= 1.00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

C

Es wird angenommen, dass bei der Entstehung der Erde die Isotope ^{238}U und ^{235}U vorhanden waren, ihre Zerfallsprodukte jedoch nicht. Die Zerfälle von ^{238}U und ^{235}U werden verwendet, um das Alter der Erde, T , zu bestimmen.

(a) Das Isotop ^{238}U zerfällt mit einer Halbwertszeit von 4.50×10^9 Jahren. Die Zerfallsprodukte in der daraus entstehenden radioaktiven Zerfallsreihe haben im Vergleich dazu kurze Halbwertszeiten; in erster Näherung kann ihre Existenz vernachlässigt werden. Die Zerfallsreihe endet beim stabilen Bleiisotop ^{206}Pb .

Leiten Sie einen Ausdruck für die Anzahl der durch radioaktiven Zerfall während der Zeit t erzeugten ^{206}Pb -Atome, bezeichnet mit ^{206}n , in Abhängigkeit von der heutigen Anzahl der ^{238}U -Atome, bezeichnet mit ^{238}N , und der Halbwertszeit von ^{238}U her und tragen Sie ihn auf dem Antwortblatt ein. (Es kann hilfreich sein, mit Zeiteinheiten von 10^9 Jahren zu arbeiten.)

(b) Ebenso zerfällt ^{235}U mit einer Halbwertszeit von 0.710×10^9 Jahren über eine Reihe von Produkten mit kürzeren Halbwertszeiten zum stabilen Isotop ^{207}Pb .

Schreiben Sie auf dem Antwortblatt eine Gleichung auf, die ^{207}n mit ^{235}N und der Halbwertszeit von ^{235}U verknüpft.

(c) Ein mit einem Bleierz vermisches Uranerz wird mit einem Massenspektrometer analysiert. Die relativen Konzentrationen der drei Bleiisotope ^{204}Pb , ^{206}Pb und ^{207}Pb werden gemessen, und es wird festgestellt, dass ihre Atomzahlen in dieser Reihenfolge im Verhältnis $1.00 : 29.6 : 22.6$ stehen. Das Isotop ^{204}Pb wird als Referenz verwendet, da es **nicht** radioaktiven Ursprungs ist. Die Analyse eines reinen Bleierztes ergibt die Verhältnisse $1.00 : 17.9 : 15.5$.

Leiten Sie unter Verwendung des gegebenen Verhältnisses $^{238}N : ^{235}N$ von $137 : 1$ eine Gleichung her, die T enthält, und tragen Sie sie auf dem Antwortblatt ein.

(d) Nehmen Sie an, dass T wesentlich größer als die Halbwertszeiten beider Uranisotope ist, und bestimmen Sie daraus einen Näherungswert für T .

(e) Dieser Näherungswert ist offensichtlich nicht wesentlich größer als die längere Halbwertszeit, kann aber verwendet werden, um einen deutlich genaueren Wert für T zu erhalten. Schätzen Sie damit oder auf andere Weise das Alter der Erde mit einer Genauigkeit von 2% ab.

D

Die Ladung Q ist *im Vakuum* gleichmäßig über ein kugelförmiges Volumen mit dem Radius R verteilt.

(a) Leiten Sie Ausdrücke für die elektrische Feldstärke im Abstand r vom Mittelpunkt der Kugel für $r \leq R$ und $r > R$ her.

(b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die gesamte elektrische Energie dieser Ladungsverteilung. Tragen Sie Ihre Antworten zu (a) und (b) auf dem Antwortblatt ein.

E

Ein kreisförmiger Ring aus dünnem Kupferdraht wird an einem Ort im Erdmagnetfeld in Rotation um einen vertikalen Durchmesser versetzt. Die magnetische Flussdichte des Erdmagnetfelds an diesem Ort beträgt $44.5 \mu\text{T}$ und ist unter einem Winkel von 64° unterhalb der Horizontalen gerichtet. Berechnen Sie unter Verwendung der Dichte von Kupfer von $8.90 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ und seines spezifischen elektrischen Widerstands von $1.70 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$, wie lange es dauert, bis sich die Winkelgeschwindigkeit des Rings halbiert hat. Geben Sie die Schritte Ihres Rechenwegs an und tragen Sie den Wert der Zeit auf dem Antwortblatt ein. Diese Zeit ist wesentlich länger als die Dauer einer Umdrehung.

Sie dürfen annehmen, dass die Reibungseinflüsse der Lager und der Luft vernachlässigbar sind. Für diese Aufgabe sollen Sie außerdem Selbstinduktionseffekte ignorieren, obwohl diese nicht vernachlässigbar wären.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- A(a):

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

- A(b):

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

- A(c):

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

- B(a):

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

- B(b):

$$W_{\max} = ms \left(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B} \right) = ms \left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B} \right)^2.$$

- B(c):

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

- **C(a):** Mit $h_{238} = 4.50 \times 10^9$ yr gilt

$$^{206}_{\text{n}} = ^{238}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right).$$

- **C(b):** Mit $h_{235} = 0.710 \times 10^9$ yr gilt

$$^{207}_{\text{n}} = ^{235}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right).$$

- **C(c):**

$$\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7}, \quad T > 0.$$

- **C(d):**

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}.$$

- **C(e):**

$$T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr}.$$

- **D(a):** Die Radialkomponente des elektrischen Feldes ist

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3}, & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

Das Feld ist für $Q > 0$ nach außen und für $Q < 0$ nach innen gerichtet und im Mittelpunkt null.

- **D(b):**

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

- **E:**

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

Lösung

A(a)

Es sei z die von der Brücke aus nach unten gemessene Strecke. Das Seil ist bis $z = L$ schlaff; danach beträgt seine Dehnung $x = z - L$ und seine Spannkraft kx .

Es gibt keine Dissipation, sodass die mechanische Energie erhalten bleibt. Am tiefsten Punkt, $z = y$, ist der Springer augenblicklich in Ruhe. Somit gilt

$$mgy = \frac{1}{2}k(y - L)^2.$$

Mit $x = y - L$ lautet dies äquivalent

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mgL}{k} = 0.$$

Die physikalisch zulässige Lösung hat eine positive Dehnung:

$$x = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgL}{k}}.$$

Daher gilt

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

A(b)

Der Betrag der Geschwindigkeit nimmt zu, solange die nach unten gerichtete Beschleunigung positiv ist. Sobald das Seil gespannt ist, gilt

$$m\ddot{z} = mg - k(z - L).$$

Die Geschwindigkeit ist daher dann am größten, wenn die Beschleunigung zum ersten Mal null wird:

$$z = L + \frac{mg}{k}.$$

Die Energieerhaltung liefert an jedem Punkt bei gespanntem Seil

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz - \frac{1}{2}k(z - L)^2.$$

Am Ort der maximalen Geschwindigkeit gilt

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg \left(L + \frac{mg}{k} \right) - \frac{1}{2}k \left(\frac{mg}{k} \right)^2 = mgL + \frac{m^2g^2}{2k}.$$

Damit folgt

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

A(c)

Beim anfänglichen freien Fall über die Strecke L betragen die verstrichene Zeit und die Endgeschwindigkeit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}, \quad v_1 = \sqrt{2gL}.$$

Wir setzen $\tau = 0$ zu dem Zeitpunkt, an dem das Seil erstmals gespannt ist, und definieren

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{mg}{k}.$$

Die anschließende Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g.$$

Mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_1$ ist ihre Lösung

$$x(\tau) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega_0 \tau) + \frac{v_1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau,$$

also

$$\dot{x}(\tau) = x_{\text{eq}}\omega_0 \sin \omega_0\tau + v_1 \cos \omega_0\tau.$$

Die erste Nullstelle dieser Geschwindigkeit liegt bei $\pi/2 < \omega_0\tau < \pi$. Folglich gilt

$$\omega_0\tau = \pi - \arctan\left(\frac{v_1}{x_{\text{eq}}\omega_0}\right) = \pi - \arctan\sqrt{\frac{2kL}{mg}}.$$

Durch Addition der Zeit des freien Falls ergibt sich

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan\sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

B(a)

Die maximale Arbeit wird gewonnen, indem die Maschine reversibel zwischen den momentanen Temperaturen der Körper betrieben wird, bis diese eine gemeinsame Temperatur erreichen. Alle folgenden Temperaturen sind absolute Temperaturen.

Jeder Körper hat bei konstantem Druck die konstante Wärmekapazität ms . Seine Entropieänderung beträgt daher

$$\Delta S = ms \int \frac{dT}{T}.$$

Die Maschine arbeitet zyklisch, sodass ihre Nettoentropieänderung null ist. Bei reversiblen Betrieb ist auch die gesamte Entropieänderung der Körper null:

$$ms \int_{T_A}^{T_0} \frac{dT}{T} + ms \int_{T_B}^{T_0} \frac{dT}{T} = 0.$$

Somit gilt

$$\ln \frac{T_0}{T_A} + \ln \frac{T_0}{T_B} = 0,$$

woraus folgt

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

Warum dies das Maximum ergibt, erkennt man daran, dass ein irreversibler Prozess stattdessen eine positive Gesamtentropie erzeugen würde, was

$$T_0 \geq \sqrt{T_A T_B}$$

erfordert. Bei einer höheren Endtemperatur verbleibt mehr thermische Energie in den Körpern, und folglich kann weniger Arbeit entnommen werden.

B(b)

Die dem anfangs heißeren Körper entzogene Wärme beträgt

$$Q_H = ms(T_A - T_0),$$

und die dem anfangs kälteren Körper zugeführte Wärme beträgt

$$Q_C = ms(T_0 - T_B).$$

Die Energieerhaltung für die zyklisch arbeitende Maschine liefert

$$W = Q_H - Q_C = ms(T_A + T_B - 2T_0).$$

Einsetzen der reversiblen Endtemperatur ergibt

$$W_{\max} = ms \left(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B} \right) = ms \left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B} \right)^2.$$

B(c)

Die Wassermasse in jedem Tank beträgt

$$m = \rho V = (1.00 \times 10^3)(2.50) = 2.50 \times 10^3 \text{ kg}.$$

Die reversible Endtemperatur ist

$$T_0 = \sqrt{350 \times 300} = 324.037 \dots \text{ K}.$$

Mit diesem Wert, ohne vorzeitig zu runden, ergibt sich

$$\begin{aligned} W_{\max} &= (2.50 \times 10^3)(4.19 \times 10^3) \left[350 + 300 - 2\sqrt{350 \times 300} \right] \\ &= 2.0174 \dots \times 10^7 \text{ J}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

C(a)

Für ein radioaktives Mutterisotop mit der Halbwertszeit h gilt

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{h}.$$

Die anfängliche Anzahl der Mutteratome lässt sich daher durch die heutige Anzahl ausdrücken:

$$N(0) = N(t)e^{\lambda t} = N(t)2^{t/h}.$$

Vernachlässigt man die Lebensdauern der Zwischenprodukte, so erzeugt jedes zerfallene Uranatom ein Bleiatom als Endprodukt. Da anfangs keine Zerfallsprodukte vorhanden waren, gilt

$$n(t) = N(0) - N(t) = N(t) \left(2^{t/h} - 1 \right).$$

Für die ^{238}U -Reihe gilt

$$^{206}_{\text{Pb}} n = ^{238}_{\text{U}} N \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right), \quad h_{238} = 4.50 \times 10^9 \text{ yr}.$$

C(b)

Dieselbe Überlegung liefert für die ^{235}U -Reihe

$$^{207}_{\text{Pb}} n = ^{235}_{\text{U}} N \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right), \quad h_{235} = 0.710 \times 10^9 \text{ yr}.$$

C(c)

Das reine Bleierz liefert die Isotopenverhältnisse des Hintergrunds. Diese Hintergrundmengen müssen von der Mischprobe abgezogen werden, um das durch Uranzerfall erzeugte Blei zu bestimmen.

Es sei N_{204} die Anzahl der ^{204}Pb -Atome in der Mischprobe. Da dieses Isotop nicht radiogen ist, gilt

$$^{206}_{\text{Pb}} n = (29.6 - 17.9) N_{204} = 11.7 N_{204},$$

und

$$^{207}_n = (22.6 - 15.5)N_{204} = 7.1N_{204}.$$

Daher gilt

$$\frac{^{207}_n}{^{206}_n} = \frac{7.1}{11.7}.$$

Mit den Zerfallsgleichungen und dem heutigen Uranverhältnis ergibt sich

$$\frac{7.1}{11.7} = \frac{^{235}N}{^{238}N} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = \frac{1}{137} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1}.$$

Die gesuchte Gleichung lautet somit

$$\boxed{\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7} = 83.13675\dots}, \quad T > 0.$$

C(d)

Unter der angegebenen Näherung $T \gg h_{238}, h_{235}$ gilt

$$2^{T/h} - 1 \simeq 2^{T/h}.$$

Die Datierungsgleichung wird zu

$$2^{T(1/h_{235} - 1/h_{238})} \simeq 137 \frac{7.1}{11.7}.$$

Logarithmieren ergibt

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})}.$$

Numerisch gilt

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(83.13675\dots)}{(\ln 2)(1/0.710 - 1/4.50)} \times 10^9 \text{ yr},$$

also

$$\boxed{T_{\text{approx}} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}}.$$

Dies entspricht nur etwa $1.19h_{238}$, sodass das Vernachlässigen der Subtraktion von 1 im Ausdruck für ^{238}U für ein genaues Ergebnis nicht gerechtfertigt ist.

C(e)

Wir behalten beide Subtraktionen von 1 bei. Mit

$$u = \frac{T}{10^9 \text{ yr}},$$

müssen wir die Gleichung

$$F(u) \equiv \frac{2^{u/0.710} - 1}{2^{u/4.50} - 1} = 83.13675\dots$$

lösen. Auswertungen in der Nähe der Lösung ergeben

$$F(4.55) = 82.666\dots, \quad F(4.56) = 83.232\dots$$

Das gesuchte Alter liegt somit zwischen 4.55 und 4.56 Milliarden Jahren. Eine genauere numerische Lösung ist $u = 4.5583157 \dots$, woraus

$$T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr},$$

folgt, deutlich innerhalb der geforderten Genauigkeit von 2%.

D(a)

Die homogene Raumladungsdichte beträgt

$$\rho_q = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3}.$$

Aufgrund der Kugelsymmetrie ist das elektrische Feld radial gerichtet und auf einer konzentrischen kugelförmigen Gauß'schen Fläche betragsmäßig konstant.

Für $r \leq R$ beträgt die eingeschlossene Ladung

$$Q_{\text{enc}} = \rho_q \frac{4\pi r^3}{3} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Das Gauß'sche Gesetz liefert

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0},$$

und damit

$$E_r = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad (r \leq R).$$

Für $r > R$ ist die eingeschlossene Ladung Q , also gilt

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (r > R).$$

Das Feld ist im Mittelpunkt null und an der Oberfläche stetig; dort gilt

$$E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

D(b)

Im Vakuum beträgt die elektrostatische Energiedichte

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Die Gesamtenergie umfasst das Feld sowohl innerhalb als auch außerhalb der geladenen Kugel:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\int_0^R E^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty E^2 4\pi r^2 dr \right].$$

Einsetzen der oben bestimmten Felder ergibt

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right].$$

Daher gilt

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right),$$

und

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

E

Der Ring habe den Radius a , und die Querschnittsfläche des Drahtes sei S . Wir bezeichnen die Massendichte von Kupfer mit ρ_m und seinen spezifischen elektrischen Widerstand mit ρ_e .

Die Masse und der Widerstand des Rings betragen

$$M = 2\pi a S \rho_m, \quad \mathcal{R} = \rho_e \frac{2\pi a}{S}.$$

Für einen dünnen Ring, der um einen Durchmesser rotiert, beträgt das Trägheitsmoment

$$I = \frac{1}{2} M a^2 = \pi \rho_m S a^3.$$

Die Ringebene bleibt vertikal, sodass ihre Normale horizontal ist. Nur die horizontale Komponente des Erdmagnetfelds trägt zum magnetischen Fluss bei:

$$B_h = B \cos 64^\circ.$$

Es sei θ der Winkel zwischen der Normalen des Rings und diesem horizontalen Feld. Der Fluss beträgt

$$\Phi = B_h \pi a^2 \cos \theta.$$

Mit $\dot{\theta} = \omega$ liefert das Faraday'sche Induktionsgesetz

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B_h \pi a^2 \omega \sin \theta.$$

Wenn wir die Selbstinduktion wie vorgegeben vernachlässigen, beträgt die Stromstärke

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}}.$$

Die momentane Joule'sche Wärmeleistung ist folglich

$$P = i^2 \mathcal{R} = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{\mathcal{R}} \omega^2 \sin^2 \theta.$$

Die angegebene Dämpfungszeit ist wesentlich länger als eine Umdrehung, sodass sich ω während jeder Umdrehung nur geringfügig ändert. Wir dürfen daher

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2},$$

verwenden, woraus folgt

$$\langle P \rangle = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2\mathcal{R}} \omega^2.$$

Da keine Reibung auftritt, stammt diese Wärme aus der kinetischen Rotationsenergie:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = -\langle P \rangle.$$

Die gemittelte Winkelgeschwindigkeit erfüllt somit

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2I\mathcal{R}} \omega.$$

Es gilt jedoch

$$I\mathcal{R} = (\pi \rho_m S a^3) \left(\rho_e \frac{2\pi a}{S} \right) = 2\pi^2 \rho_m \rho_e a^4,$$

sodass sich die geometrischen Größen herauskürzen:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2}{4\rho_m \rho_e} \omega.$$

Damit folgt

$$\omega(t) = \omega(0) \exp\left(-\frac{B_h^2 t}{4\rho_m \rho_e}\right).$$

Mit $\omega(t_{1/2}) = \omega(0)/2$ ergibt sich

$$t_{1/2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B_h^2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B^2 \cos^2 64^\circ}.$$

Numerisch gilt

$$B_h = (44.5 \times 10^{-6}) \cos 64^\circ = 1.95075 \dots \times 10^{-5} \text{ T},$$

und

$$t_{1/2} = \frac{4(8.90 \times 10^3)(1.70 \times 10^{-8}) \ln 2}{(44.5 \times 10^{-6})^2 \cos^2 64^\circ}.$$

Daher gilt

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Ladungs-Masse-Verhältnis des Elektrons (magnetische Fokussierung in einer CRT; Betateilchen zwischen geladenen Platten)

(a) Eine Kathodenstrahlröhre (CRT), die aus einer Elektronenkanone und einem Leuchtschirm besteht, wird in einem homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeld vom Betrag $\mathbf{B}$ so angeordnet, dass das Magnetfeld parallel zur Strahlachse der Elektronenkanone verläuft, wie in Abbildung 2.3 gezeigt.

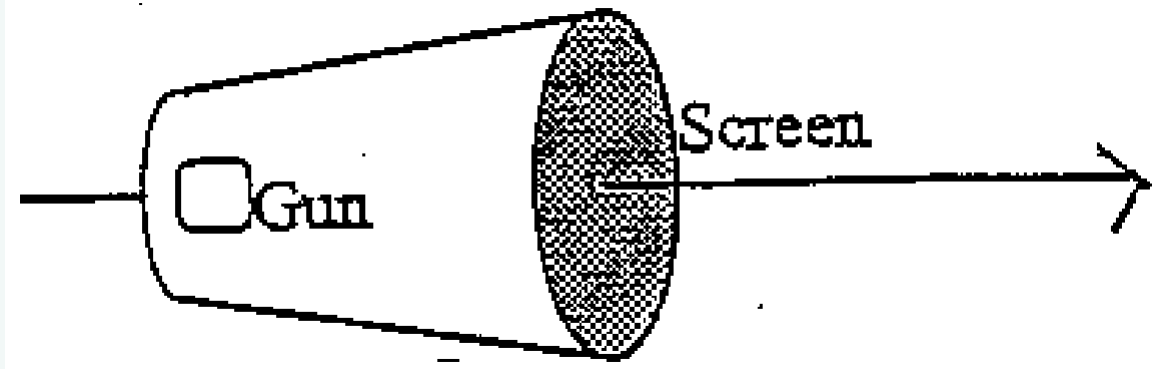


Abbildung 2.3

Der Elektronenstrahl tritt auf der Achse aus der Anode der Elektronenkanone aus, weist jedoch eine Divergenz von bis zu 5° gegenüber der Achse auf, wie in Abbildung 2.4 dargestellt. Im Allgemeinen entsteht auf dem Schirm ein diffuser Fleck, doch bei bestimmten Werten des Magnetfeldes erhält man einen scharf fokussierten Fleck.

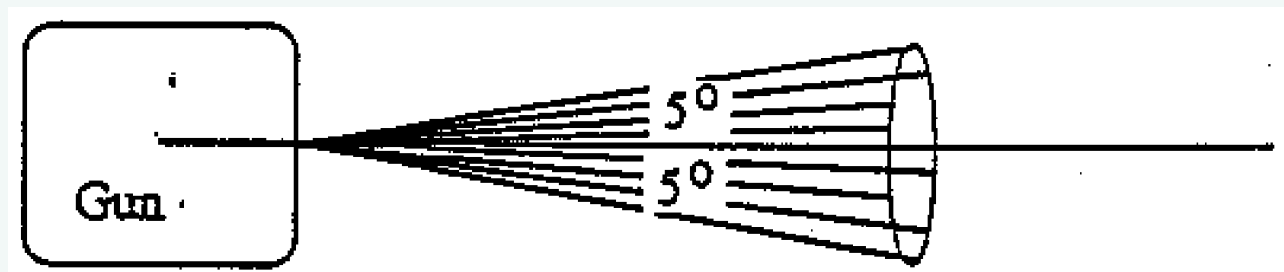


Abbildung 2.4

Betrachten Sie die Bewegung eines Elektrons, das sich beim Verlassen der Elektronenkanone zunächst unter einem Winkel β (mit $0 \leq \beta \leq 5^\circ$) zur Achse bewegt, sowie die Komponenten seiner Bewegung parallel und senkrecht zur Achse. Leiten Sie daraus einen Ausdruck für das Ladungs-Masse-Verhältnis e/m des Elektrons in Abhängigkeit von den folgenden Größen her:

dem kleinsten Magnetfeld, bei dem ein fokussierter Fleck entsteht,
der Beschleunigungsspannung an der Elektronenkanone V
(beachten Sie, dass $V < 2 \text{ kV}$),
und D , dem Abstand zwischen Anode und Schirm.

Tragen Sie Ihren Ausdruck in das dafür vorgesehene Kästchen in Abschnitt 2a des Antwortbogens ein.

(b) Betrachten Sie eine weitere Methode zur Bestimmung des Ladungs-Masse-Verhältnisses des Elektrons. Die Anordnung ist in Abbildung 2.5 in einer Seitenansicht und einer Draufsicht (von oben) dargestellt; die Richtung des Magnetfeldes ist mit $\mathbf{B}$ gekennzeichnet. In diesem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$ befinden sich zwei kreisförmige Messingplatten mit dem Radius ρ , die durch einen sehr kleinen Abstand t voneinander getrennt sind. Zwischen ihnen wird eine Spannung V aufrechterhalten. Die Platten sind parallel zueinander und coaxial angeordnet; ihre Achse steht jedoch senkrecht zum Magnetfeld. Ein fotografischer Film bedeckt die Innenseite der Mantelfläche eines Zylinders mit dem Radius $\rho + s$, der coaxial zu den Platten angeordnet ist. Mit

anderen Worten: Der Film befindet sich im radialen Abstand s von den Plattenrändern. Die gesamte Anordnung befindet sich *im Vakuum*. Beachten Sie, dass t sehr viel kleiner ist als sowohl s als auch ρ .

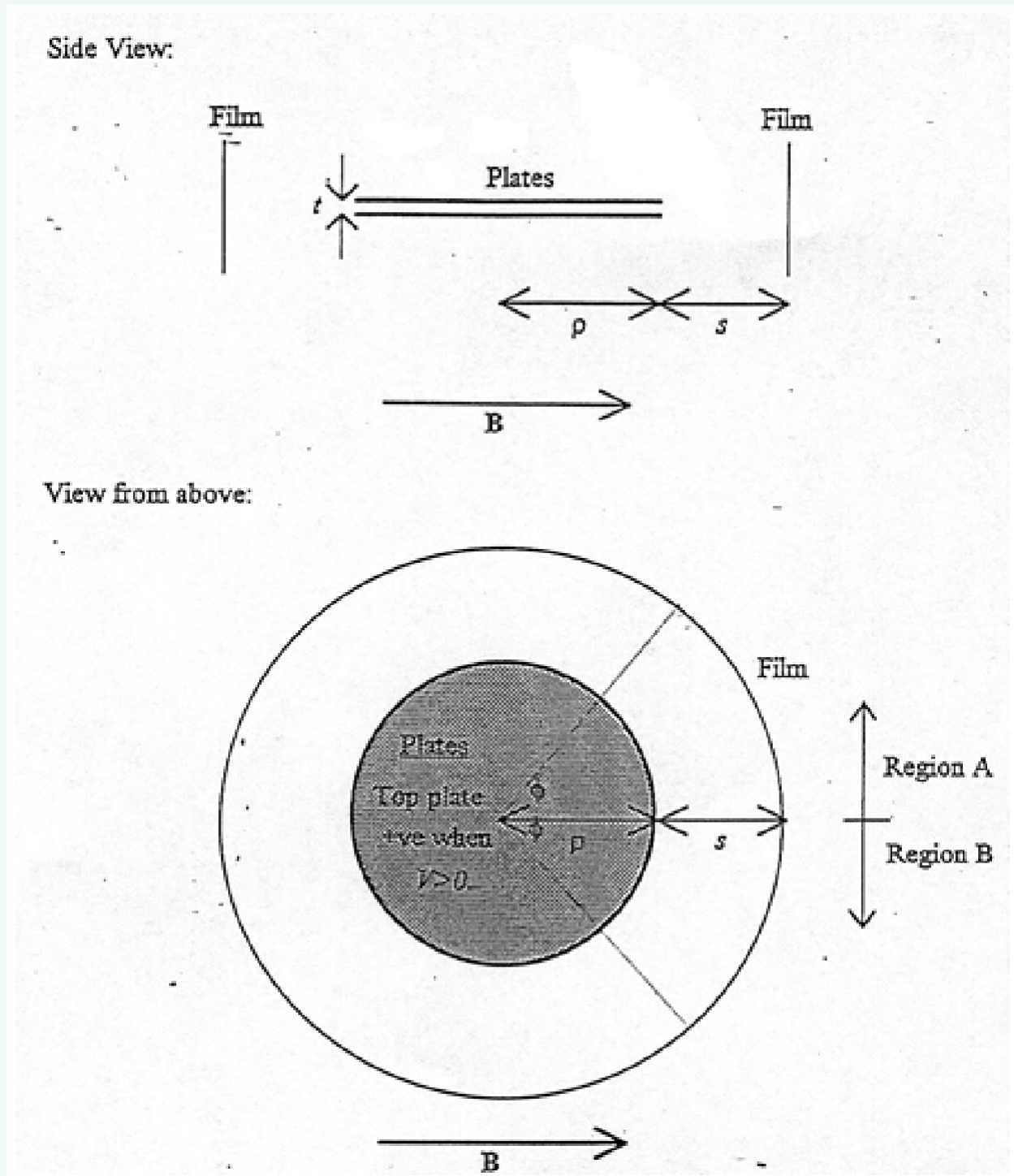


Abbildung 2.5

Eine punktförmige Quelle von β -Teilchen, die die β -Teilchen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten gleichmäßig in alle Richtungen emittiert, wird zwischen den Mittelpunkten der Platten angeordnet. Dasselbe Stück Film wird unter drei verschiedenen Bedingungen belichtet:

- erstens bei $B = 0$ und $V = 0$,
- zweitens bei $B = B_0$ und $V = V_0$ und
- drittens bei $B = -B_0$ und $V = -V_0$;

dabei sind V_0 und B_0 positive Konstanten. Beachten Sie bitte, dass die obere Platte bei $V > 0$ positiv geladen ist (bei $V < 0$ negativ) und dass das Magnetfeld bei $B > 0$ in die in Abbildung 2.5 festgelegte Richtung zeigt (bei $B < 0$ in die entgegengesetzte Richtung). Für diesen Aufgabenteil dürfen Sie annehmen, dass der Spalt vernachlässigbar klein ist.

Zwei Bereiche des Films sind in Abbildung 2.5 mit A und B bezeichnet. Eine Skizze eines dieser Bereiche nach der Belichtung und Entwicklung ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Aus welchem Bereich stammt dieses Stück (schreiben Sie A oder B auf Ihren Antwortbogen)? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie die Richtungen der auf das Elektron wirkenden Kräfte angeben.

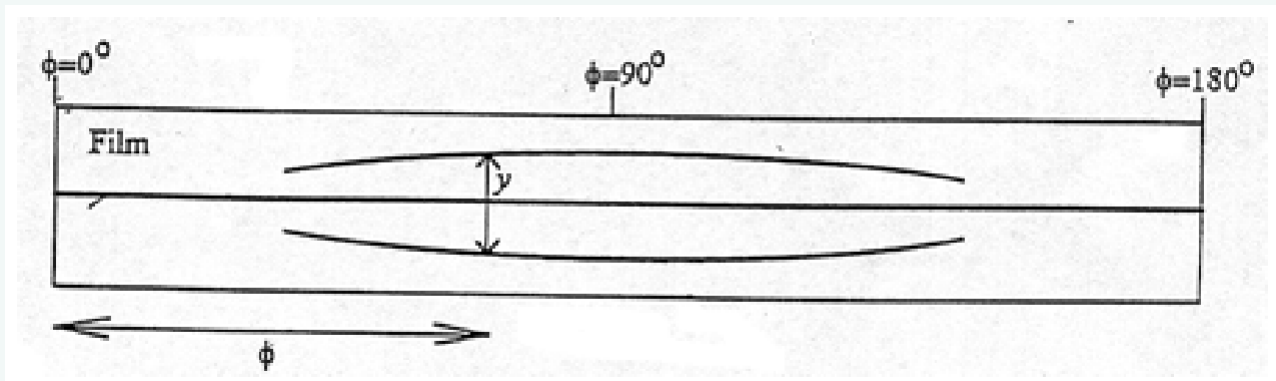


Abbildung 2.6

(c) Eine Skizze des Films nach der Belichtung und Entwicklung ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Der Abstand der beiden äußersten Spuren wird mit einem Mikroskop gemessen; dieser Abstand (y) ist in Abbildung 2.6 auch für einen bestimmten Winkel eingezeichnet. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle angegeben. Der Winkel ϕ ist in Abbildung 2.5 als der Winkel zwischen dem Magnetfeld und einer Verbindungslinie vom Mittelpunkt der Platten zu dem Punkt auf dem Film definiert.

Winkel zum Feld /Grad	ϕ	90	60	50	40	30	23
Abstand /mm	y	17.4	12.7	9.7	6.4	3.3	Ende der Spur

Die Zahlenwerte der Systemparameter sind nachstehend angegeben:

$$B_0 = 6.91 \text{ mT} \quad V_0 = 580 \text{ V} \quad t = 0.80 \text{ mm} \\ s = 41.0 \text{ mm}$$

Außerdem dürfen Sie für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ und für die Ruhemasse des Elektrons $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ verwenden.

Bestimmen Sie die größte beobachtete kinetische Energie der β -Teilchen.

Tragen Sie die maximale kinetische Energie als Zahlenwert in eV in das Kästchen in Abschnitt 2f des Antwortbogens ein.

(d) Bestimmen Sie anhand der in Teil (f) [d. h. Teil (c) oben] gegebenen Informationen einen Wert für das Verhältnis von Ladung zu Ruhemasse des Elektrons. Zeichnen Sie dazu ein geeignetes Diagramm auf das bereitgestellte Papier.

Geben Sie die auf der horizontalen und der vertikalen Achse aufgetragenen Größen als *algebraische Ausdrücke* an, sowohl im Diagramm selbst als auch in den dafür vorgesehenen Kästchen in Abschnitt 2g des Antwortbogens.

Tragen Sie Ihren Wert für das Ladungs-Masse-Verhältnis des Elektrons in das dafür vorgesehene Kästchen in Abschnitt 2g des Antwortbogens ein.

Beachten Sie bitte, dass Ihr Ergebnis aufgrund eines systematischen Fehlers in den Beobachtungen vom anerkannten Wert abweichen kann.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **(a)** Für das kleinste positive Fokussierungsfeld $B_{\min}$ gilt

$$\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}.$$

- **(b)** Bereich B. Für $B = B_0$, $V = V_0$ wirkt die elektrische Kraft nach oben und die magnetische Kraft nach unten. Bei Umkehr beider Felder kehren sich auch beide Kräfte um.

- **(c)**

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV}$$

Dies entspricht $v_{\max} \simeq 2.69 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

- **(d)** Tragen Sie $Y = y$ auf der vertikalen Achse gegen die dimensionslose Größe

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}$$

auf der horizontalen Achse auf. Die Gerade hat eine Steigung von ungefähr $1.855 \times 10^{-2} \text{ m}$, woraus sich

$$\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$$

ergibt.

Lösung

Im Folgenden bezeichnet $e > 0$ stets den Betrag der Elektronenladung; die Ladung des Elektrons ist $-e$. Seine Ruhemasse ist m_0 .

(a)

Da die Beschleunigungsspannung unter 2 kV liegt, ist die kinetische Energie des Elektrons viel kleiner als seine Ruheenergie. Wir verwenden die nichtrelativistische Mechanik mit $m \simeq m_0$:

$$eV = \frac{1}{2} m v^2.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten beim Verlassen der Elektronenkanone sind

$$v_{\parallel} = v \cos \beta, \quad v_{\perp} = v \sin \beta.$$

Das Magnetfeld übt keine Kraft parallel zu seiner eigenen Richtung aus. Die parallele Bewegung ist daher gleichförmig, während die senkrechte Bewegung eine Kreisbewegung ist, mit

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB}, \quad \omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Die resultierende Bahn ist eine Schraubenlinie. Ein Elektron, das auf der Achse startet, kehrt nach jedem vollständigen Umlauf zur Achse zurück. Das kleinste positive Fokussierungsfeld entspricht einem Umlauf vor dem Erreichen des Schirms, sodass

$$D = v \cos \beta T = \frac{2\pi m v \cos \beta}{eB_{\min}}.$$

Quadrieren und Einsetzen von $v^2 = 2eV/m$ ergibt

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V \cos^2 \beta}{B_{\min}^2 D^2}.$$

Für den eng gebündelten Strahl mit $\beta \leq 5^\circ$ setzen wir $\cos \beta \simeq 1$. Damit folgt

$$\boxed{\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}}.$$

Bei einem Strahl mit unterschiedlichen Winkeln β ist die Fokussierung nur näherungsweise gegeben: Die axialen Geschwindigkeiten der Elektronen unterscheiden sich geringfügig. Bei 5° beträgt $1 - \cos \beta$ nur etwa 0.0038.

(b)

Die Lorentzkraft lautet

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Für $V = V_0 > 0$ ist die obere Platte positiv geladen, sodass das elektrische Feld nach unten und die elektrische Kraft auf ein Elektron nach oben zeigt.

Für $B = B_0 > 0$ ergibt die Anwendung der Regel für das Kreuzprodukt auf die Draufsicht:

Elektron bewegt sich in Richtung	Elektrische Kraft	Magnetische Kraft
Bereich A	Nach oben	Nach oben
Bereich B	Nach oben	Nach unten

Bei einem vernachlässigbar kleinen Spalt können Elektronen den Bereich zwischen den Platten nur durchqueren, wenn sich die vertikalen Kräfte aufheben. Dies ist im **Bereich B** möglich.

Sei θ der Winkel zwischen der Geschwindigkeit des Elektrons und dem Magnetfeld während seiner Bewegung zwischen den Platten. Unter Vernachlässigung der Randfelder gilt

$$E_0 = \frac{V_0}{t}.$$

Das Kräftegleichgewicht erfordert

$$eE_0 = eB_0 v \sin \theta,$$

oder

$$\boxed{v \sin \theta = \frac{V_0}{B_0 t}}.$$

Bei Umkehr sowohl von B als auch von V kehren sich beide Kräfte um, sodass sie sich für Elektronen, die sich in Richtung des Bereichs B bewegen, weiterhin aufheben.

Nachdem ein Elektron die Platten verlassen hat, verschwindet die elektrische Kraft, während die magnetische Kraft bestehen bleibt. Daher gilt:

- $B = B_0, V = V_0$ erzeugt die untere gekrümmte Spur.
- $B = -B_0, V = -V_0$ erzeugt die obere gekrümmte Spur.
- $B = V = 0$ erzeugt die mittlere gerade Spur.

Dies sind die drei in Abbildung 2.6 gezeigten Spuren; damit ergibt sich

Bereich B.

(c)

Wir verwenden die Näherung eines schmalen Spalts und setzen in führender Ordnung bezüglich der anschließenden Ablenkung den Austrittswinkel θ des Elektrons mit dem beobachteten Winkel ϕ gleich. Wir definieren

$$u = \frac{V_0}{B_0 t}.$$

Numerisch ergibt sich

$$u = \frac{580}{(6.91 \times 10^{-3})(0.80 \times 10^{-3})} = 1.0492 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

Die Bedingung für die Geschwindigkeitsselektion lautet damit

$$v(\phi) = \frac{u}{\sin \phi}.$$

Wenn ϕ ausgehend von 90° abnimmt, steigt die selektierte Geschwindigkeit. Der kleinste beobachtete Winkel, 23° , entspricht daher der maximalen Geschwindigkeit:

$$v_{\max} = \frac{1.0492 \times 10^8}{\sin 23^\circ} = 2.6852 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 0.8951c.$$

Der Eintrag „Ende der Spur“ gibt diese Winkelgrenze an; er liefert keinen numerischen Messwert für y .

Es muss die relativistische kinetische Energie verwendet werden:

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} = 2.2426,$$

$$K_{\max} = (\gamma_{\max} - 1)m_0c^2.$$

Daher gilt

$$K_{\max} = (2.2426 - 1)(9.11 \times 10^{-31})(3.00 \times 10^8)^2 = 1.0188 \times 10^{-13} \text{ J}.$$

Mit der üblichen Einheitenumrechnung $1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$ ergibt sich

$$K_{\max} = 6.36 \times 10^5 \text{ eV}.$$

Mit einer der Genauigkeit des Grenzwinkels angemessenen Rundung ergibt sich

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV} = 0.64 \text{ MeV}.$$

(d)

Außerhalb der Platten vernachlässigen wir das elektrische Randfeld und berücksichtigen die magnetische Ablenkung in führender Ordnung. Die horizontale Bewegung des Elektrons ist dann näherungsweise gleichförmig, und seine Flugzeit vom Plattenrand bis zum Film beträgt

$$\tau \simeq \frac{s}{v}.$$

Das Magnetfeld verrichtet keine Arbeit, sodass der Geschwindigkeitsbetrag und der Lorentzfaktor des Elektrons konstant bleiben. In führender Ordnung hat die vertikale magnetische Kraft den Betrag

$$F_z = eB_0 v \sin \phi,$$

woraus sich die vertikale Beschleunigung

$$a_z = \frac{eB_0 v \sin \phi}{\gamma m_0}$$

ergibt.

Die Auslenkung jeder der beiden gekrümmten Spuren gegenüber der mittleren Spur beträgt folglich

$$\delta \simeq \frac{1}{2} a_z \tau^2 = \frac{eB_0 s^2 \sin \phi}{2\gamma m_0 v}.$$

Die beiden Feldeinstellungen erzeugen entgegengesetzte Auslenkungen. Der Abstand der Spuren beträgt daher

$$y = 2\delta \simeq \frac{eB_0 s^2 \sin \phi}{\gamma m_0 v}.$$

Durch Einsetzen von

$$v = \frac{V_0}{B_0 t c \sin \phi}, \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0 t c \sin \phi} \right)^2},$$

erhalten wir

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0} \sin^2 \phi \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0 t c \sin \phi} \right)^2}.$$

Da $0 < \phi < 180^\circ$ gilt, lässt sich dies schreiben als

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0} \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}.$$

Wir wählen daher für die Diagrammachsen

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}, \quad Y = y.$$

Die horizontale Größe ist dimensionslos. Hier gilt

$$\frac{V_0}{B_0 t c} = 0.349735.$$

Die einzuzeichnenden Punkte sind:

ϕ	Horizontale Koordinate X	Vertikale Koordinate Y / mm
90°	0.93685	17.4
60°	0.68612	12.7
50°	0.52210	9.7
40°	0.34667	6.4
30°	0.17867	3.3

Das Diagramm zeigt nahezu eine Gerade durch den Ursprung. Geeignete Achsenbereiche sind $0 \leq X \leq 1$ und $0 \leq Y \leq 20$ mm. Eine Ausgleichsgerade durch den Ursprung ergibt

$$Y \simeq (18.55 \text{ mm})X.$$

Schreiben wir die Steigung in Metern,

$$S = 1.855 \times 10^{-2} \text{ m},$$

so ergibt die theoretische Beziehung

$$S = \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0}.$$

Damit folgt

$$\frac{e}{m_0} = \frac{SV_0}{B_0^2 t s^2} \simeq \frac{(1.855 \times 10^{-2})(580)}{(6.91 \times 10^{-3})^2 (0.80 \times 10^{-3})(41.0 \times 10^{-3})^2}.$$

Der aus den Beobachtungen abgeleitete Wert lautet daher

$$\boxed{\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}}.$$

Diese Herleitung berücksichtigt die Ablenkung in führender Ordnung. Beim größten gemessenen Abstand gilt $\delta/s = 8.7/41.0 \simeq 0.21$; Korrekturen aufgrund der endlichen Bahnkrümmung können daher Effekte von einigen Prozent beitragen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Gravitationswellendetektor (Teil A) und gravitative Ablenkung des Lichts durch die Sonne (Teil B)

Gravitationswellen und die Auswirkungen der Gravitation auf Licht.

Teil A

Dieser Teil behandelt die Schwierigkeiten beim Nachweis von Gravitationswellen, die durch astronomische Ereignisse erzeugt werden. Man muss sich dabei vor Augen halten, dass die Explosion einer weit entfernten Supernova Schwankungen der Gravitationsfeldstärke an der Erdoberfläche von etwa $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$ hervorrufen kann.

Ein Modell für einen Gravitationswellendetektor (siehe Abbildung 3.1) besteht aus zwei jeweils 1m langen Metallstäben, die im rechten Winkel zueinander angeordnet sind. Ein Ende jedes Stabes ist optisch eben poliert, während das andere Ende fest eingespannt ist. Die Position eines Stabes

wird so eingestellt, dass das von der Fozelle empfangene Signal minimal ist (siehe Abbildung 3.1).

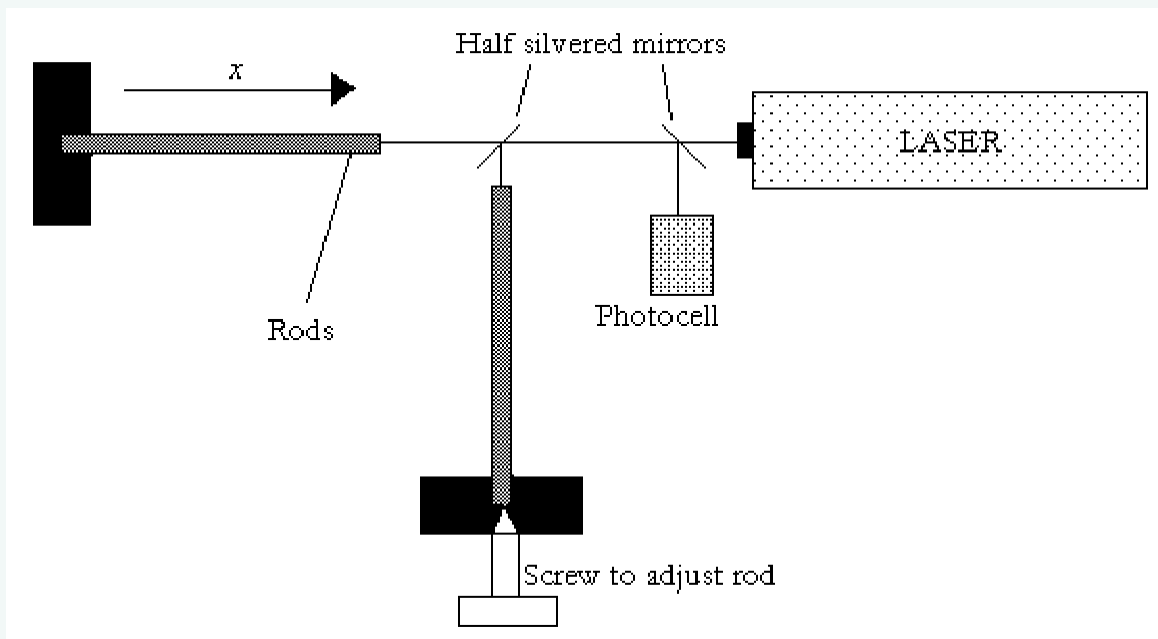


Abbildung 3.1

Den Stäben wird durch eine piezoelektrische Vorrichtung ein kurzer, kräftiger Stoß versetzt. Dadurch schwingen die freien Enden der Stäbe mit einer longitudinalen Auslenkung Δx_t , wobei

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi),$$

und a, μ, ω und ϕ Konstanten sind.

- Wenn die Amplitude der Bewegung innerhalb eines Zeitintervalls von 50s um 20% abnimmt, bestimmen Sie einen Wert für μ .
- Bestimmen Sie auch einen Wert für ω , wenn die Stäbe aus Aluminium mit einer Dichte (ρ) von 2700 kg m^{-3} und einem Elastizitätsmodul (E) von $7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$ bestehen.
- Es ist unmöglich, die Stäbe exakt gleich lang herzustellen, sodass das Signal der Fozelle eine Schwebungsfrequenz von 0.005 Hz aufweist. Wie groß ist der Längenunterschied zwischen den Stäben?
- Leiten Sie für den Stab der Länge l einen algebraischen Ausdruck für die Längenänderung Δl infolge einer Änderung Δg der Gravitationsfeldstärke g in Abhängigkeit von l und weiteren Konstanten des Stabmaterials her.
- Das vom Laser erzeugte Licht ist monochromatisch und hat eine Wellenlänge von 656 nm . Wenn die kleinste nachweisbare Streifenverschiebung 10^{-4} der Wellenlänge des Lasers beträgt, welcher Mindestwert von l ist erforderlich, damit ein solches System Änderungen von g um $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$ nachweisen kann?

Eine richtungsunabhängige Form eines Gravitationswellendetektors besteht aus einer Kugel aus einer Kupferlegierung mit einer Masse von 1168 kg , die im Vakuum an einer schwingungsdämpfenden Aufhängung hängt. An der Kugel sind Messwandler mit abgestimmten

Schwingkreisen angebracht, um Änderungen ihrer Abmessungen nachzuweisen. Die Messwandler erfassen jedoch auch sämtliche Störschwingungen, beispielsweise durch Temperatureinflüsse, sowie Rauschen durch elektrische Einstreuungen.

(f) Um Schwingungen durch Temperatureinflüsse zu verringern, wird die Kugel auf einer Temperatur von 100 mK gehalten. Um welchen Faktor wird die Amplitude der atomaren Schwingungen beim Abkühlen der Anordnung von 300 K verringert?

(g) Die Kugel wird zunächst mithilfe von flüssigem Stickstoff und flüssigem Helium auf 4.2 K abgekühlt. Die Temperatur T wird durch einen Kälteprozess, der dem System Energie mit einer mittleren Leistung von 1 mW entzieht, weiter auf 100 mK gesenkt. Die spezifische Wärmekapazität s der Kupferlegierung ist bei diesen niedrigen Temperaturen direkt proportional zu T^3 . Schätzen Sie die Zeit ab, die benötigt wird, um das System von 4.2 K auf 100 mK abzukühlen, wenn bei 4.2 K gilt: $s = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Teil B

Dieser Teil behandelt die Wirkung eines Gravitationsfeldes auf die Ausbreitung von Licht im Raum.

(a) Ein Photon, das von der Oberfläche der Sonne (Masse M , Radius R) emittiert wird, erfährt eine Rotverschiebung. Nehmen Sie für die Photonenenergie ein Ruhemasseäquivalent an und zeigen Sie mithilfe der Newtonschen Gravitationstheorie, dass die effektive (oder gemessene) Frequenz des Photons im Unendlichen um den Faktor $(1 - GM/Rc^2)$ verringert (rotverschoben) ist.

(b) Eine Verringerung der Frequenz des Photons entspricht einer Verlängerung seiner Periodendauer oder, wenn man das Photon als Referenzuhr verwendet, einer Zeitdilatation. Außerdem lässt sich zeigen, dass eine Zeitdilatation stets mit einer Kontraktion der Längeneinheit um denselben Faktor einhergeht.

Wir wollen nun versuchen, die Auswirkung dieses Effekts auf die Lichtausbreitung in Sonnennähe zu untersuchen. Definieren wir zunächst einen effektiven Brechungsindex n_r an einem Punkt im Abstand r vom Mittelpunkt der Sonne. Es sei

$$n_r = \frac{c}{c'_r},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist, die in einem Koordinatensystem weit außerhalb des gravitativen Einflusses der Sonne ($r \rightarrow \infty$) gemessen wird, und c'_r die Lichtgeschwindigkeit, die in einem Koordinatensystem im Abstand r vom Mittelpunkt der Sonne gemessen wird.

Zeigen Sie, dass n_r näherungsweise wie folgt dargestellt werden kann:

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2},$$

für kleine Werte von GM/rc^2 , wobei α eine von Ihnen zu bestimmende Konstante ist.

(c) Berechnen Sie mithilfe dieses Ausdrucks für n_r im Bogenmaß die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bahn, wenn er am Sonnenrand vorbeiläuft.

Daten:

Gravitationskonstante, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Masse der Sonne, $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$.

Radius der Sonne, $R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$.

Lichtgeschwindigkeit, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Möglicherweise benötigen Sie auch das folgende Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **A(a):** $\mu = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.
- **A(b):** Für die longitudinale Grundschiwingung gilt $\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$.
- **A(c):** $|l_1 - l_2| \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.90 \text{ } \mu\text{m}$.
- **A(d):** $\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}$, wobei Δg entlang des Stabes und in Richtung seines freien Endes positiv angesetzt wird.
- **A(e):** $l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m}$, wenn die Nachweisgrenze als optischer Gangunterschied interpretiert und die axiale Reaktion eines Arms relativ zum anderen betrachtet wird.
- **A(f):** Die Amplitude nimmt im klassischen harmonischen Modell um den Faktor 54.8 auf 0.0183 ihres Anfangswerts ab.
- **A(g):** $t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}$.
- **B(a):** $\nu_{\infty} \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right)$.
- **B(b):** $\alpha = 2, \quad n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}$.
- **B(c):** $\theta = \frac{4GM}{Rc^2} = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad}$, zur Sonne hin.

Lösung

A(a)

Die Amplitudenhüllkurve ist

$$A(t) = ae^{-\mu t}.$$

Eine Verringerung um 20% bedeutet, dass die Amplitude nach 50 s das 0.80-Fache ihres vorherigen Werts beträgt:

$$\frac{A(t+50)}{A(t)} = e^{-50\mu} = 0.80.$$

Daher gilt

$$\mu = -\frac{\ln(0.80)}{50} = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

A(b)

Wir behandeln den Stab als homogenes elastisches Kontinuum und nehmen an, dass die beobachtete Schwingung seine longitudinale Grundschiwingung ist.

Es seien $u(x, t)$ die longitudinale Auslenkung und S die Querschnittsfläche. Die Längskraft ist $ES \partial u / \partial x$. Das zweite Newtonsche Gesetz liefert für ein kurzes Stabelement

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Somit breiten sich Longitudinalwellen mit folgender Geschwindigkeit aus:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Am eingespannten Ende verschwindet die Auslenkung, während am freien Ende die Längsspannung verschwindet:

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Für eine Schwingungsmode mit der Ortsabhängigkeit $\sin(kx)$ verlangt die Randbedingung am freien Ende

$$\cos(kl) = 0.$$

Für die Grundschiwingung gilt $kl = \pi/2$, sodass die Stablänge einem Viertel der Wellenlänge entspricht. Folglich ist

$$\omega_0 = vk = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$v = \sqrt{\frac{7.1 \times 10^{10}}{2700}} = 5.128 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

und für $l = 1 \text{ m}$ gilt

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} (5.128 \times 10^3) = 8.055 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}.$$

Bei linearer Dämpfung beträgt die beobachtete Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$. Da $\mu \ll \omega_0$, ist diese Korrektur vernachlässigbar:

$$\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}.$$

Die zugehörige Frequenz ist

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{4l} \simeq 1.282 \times 10^3 \text{ Hz}.$$

A(c)

Für Stäbe aus demselben Material, die in derselben Grundschiwingungsmode schwingen, gilt

$$f(l) = \frac{v}{4l}.$$

Ihre Schwebungsfrequenz beträgt daher

$$f_b = |f_1 - f_2| = \frac{v}{4} \left| \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right|.$$

Für einen kleinen Längenunterschied $\delta l = |l_1 - l_2|$, wobei beide Längen näherungsweise l betragen, gilt

$$f_b \simeq \frac{v}{4l^2} \delta l = \frac{f}{l} \delta l.$$

Daher ist

$$\delta l \simeq \frac{l f_b}{f} = \frac{(1)(0.005)}{1281.998} \text{ m},$$

woraus folgt:

$$\boxed{\delta l \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ m}}.$$

Das Verhältnis $\delta l/l \simeq 3.9 \times 10^{-6}$ bestätigt die Gültigkeit der Näherung für kleine Längenunterschiede.

A(d)

Wir verwenden die lineare Elastizitätstheorie und nehmen eine quasistatische gravitative Störung an. Die Koordinate x verlaufe vom eingespannten Ende bei $x = 0$ zum freien Ende bei $x = l$, und Δg bezeichne die vorzeichenbehaftete Komponente der Feldänderung entlang dieser Richtung.

Das Material jenseits eines Querschnitts bei x hat die Masse

$$m(x) = \rho S(l - x).$$

Die zusätzliche Axialkraft, die durch diesen Querschnitt übertragen wird, ist daher

$$\Delta F(x) = \rho S(l - x) \Delta g.$$

Aus der Definition des Elastizitätsmoduls ergibt sich für die Änderung der lokalen Dehnung

$$\Delta \epsilon(x) = \frac{\Delta F(x)}{ES} = \frac{\rho(l - x) \Delta g}{E}.$$

Durch Integration der Verlängerungen aller Elemente erhalten wir

$$\Delta l = \int_0^l \Delta \epsilon(x) dx = \frac{\rho \Delta g}{E} \int_0^l (l - x) dx.$$

Somit gilt

$$\boxed{\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}}.$$

Eine zum eingespannten Ende gerichtete Feldänderung führt zu einer Stauchung, die durch ein negatives Δg beschrieben wird.

A(e)

Eine Verschiebung Δl eines reflektierenden Endes ändert den optischen Weg für Hin- und Rückweg um $2\Delta l$. Nehmen wir an, dass die Feldänderung entlang eines Stabes erfolgt, während der andere als longitudinale Referenz dient, so gilt

$$|\Delta D| = 2|\Delta l|.$$

Eine Änderung des optischen Weges um eine Wellenlänge verschiebt die Interferenzbedingung um einen Streifen. Die angegebene Empfindlichkeit entspricht daher

$$|\Delta D|_{\min} = 10^{-4} \lambda = 10^{-4} (656 \times 10^{-9}) = 6.56 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Die kleinste nachweisbare Verschiebung des Stabendes beträgt folglich

$$|\Delta l|_{\min} = 3.28 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Mit A(d) ergibt sich

$$2|\Delta l| = \frac{\rho l^2 |\Delta g|}{E}.$$

An der Nachweisgrenze gilt

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{E 10^{-4} \lambda}{\rho |\Delta g|}}.$$

Einsetzen ergibt

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{(7.1 \times 10^{10})(10^{-4})(656 \times 10^{-9})}{(2700)(10^{-19})}},$$

also

$$l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m}.$$

Allgemeiner wird, wenn beide Stäbe reagieren, Δg in diesem Ausdruck durch die Differenz ihrer vorzeichenbehafteten axialen Feldänderungen ersetzt.

A(f)

In der klassischen harmonischen Näherung besitzt eine atomare Auslenkung x die elastische potenzielle Energie $\frac{1}{2} \kappa x^2$. Der Gleichverteilungssatz liefert

$$\frac{1}{2} \kappa \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

Bei unveränderter effektiver Steifigkeit κ skaliert die charakteristische Schwingungsamplitude daher gemäß

$$A \propto \sqrt{T}.$$

Da $100 \text{ mK} = 0.100 \text{ K}$, gilt

$$\frac{A_{\text{cold}}}{A_{\text{warm}}} = \sqrt{\frac{0.100}{300}} = \frac{1}{\sqrt{3000}} = 0.0183.$$

Die Amplitude wird somit um folgenden Faktor verringert:

$$\frac{A_{\text{warm}}}{A_{\text{cold}}} = \sqrt{3000} \simeq 54.8.$$

Diese Abschätzung verwendet klassische thermische Schwingungen und vernachlässigt die quantenmechanische Nullpunktbewegung.

A(g)

Es seien

$$T_i = 4.2 \text{ K}, \quad T_f = 0.100 \text{ K}, \quad s_i = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Das angegebene Gesetz für die Wärmekapazität lautet

$$s(T) = s_i \left(\frac{T}{T_i} \right)^3.$$

Die Wärme, die der Kugel entzogen werden muss, beträgt

$$Q = m \int_{T_f}^{T_i} s(T) dT = \frac{ms_i}{T_i^3} \int_{T_f}^{T_i} T^3 dT.$$

Daher gilt

$$Q = \frac{ms_i}{4T_i^3} (T_i^4 - T_f^4) = \frac{ms_i T_i}{4} \left[1 - \left(\frac{T_f}{T_i} \right)^4 \right].$$

Numerisch ergibt sich

$$Q = \frac{(1168)(0.072)(4.2)}{4} \left[1 - \left(\frac{0.100}{4.2} \right)^4 \right] \simeq 88.3 \text{ J}.$$

Bei einer mittleren Kühlleistung von $P = 1.00 \times 10^{-3} \text{ W}$ gilt

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{88.3}{10^{-3}} \text{ s}.$$

Folglich ist

$$t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}.$$

B(a)

Die emittierte Frequenz sei ν_R . Entsprechend dem vorgegebenen Newtonschen Modell ordnen wir dem Photon eine seiner Energie äquivalente schwere Masse zu:

$$m_\gamma = \frac{h\nu_R}{c^2}.$$

Die Arbeit, die erforderlich ist, um diese Masse von der Sonnenoberfläche ins Unendliche zu bewegen, beträgt

$$W = \int_R^\infty \frac{GMm_\gamma}{r^2} dr = \frac{GMm_\gamma}{R}.$$

Aus der Energieerhaltung folgt

$$h\nu_\infty = h\nu_R - \frac{GMm_\gamma}{R}.$$

Einsetzen von $m_\gamma = h\nu_R/c^2$ ergibt

$$h\nu_\infty = h\nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right),$$

und daher

$$\boxed{\nu_{\infty} \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right)}.$$

Dies ist ein Ergebnis erster Ordnung in der Schwachfeldnäherung. Die Verwendung der emittierten Energie zur Berechnung von m_{γ} führt nur zu Korrekturen höherer Ordnung. Für die Sonne gilt

$$\frac{GM}{Rc^2} = 2.12 \times 10^{-6} \ll 1,$$

sodass die Näherung gut gerechtfertigt ist.

B(b)

Wir definieren

$$\epsilon = \frac{GM}{rc^2}, \quad q = 1 - \epsilon.$$

Die Verringerung der Frequenz um den Faktor q entspricht einer Verlängerung der Taktperiode der Uhr um den Faktor $1/q$. Nach der in der Aufgabe angegebenen Regel zur Längenkontraktion nimmt der zugehörige Längenmaßstab um den Faktor q ab.

Damit skaliert die effektive Geschwindigkeit beim in der Aufgabe vorgenommenen Vergleich mit weit entfernten Koordinaten gemäß

$$\frac{c'_r}{c} \simeq \frac{q}{1/q} = q^2.$$

Daraus folgt

$$n_r = \frac{c}{c'_r} \simeq \frac{1}{(1 - \epsilon)^2}.$$

Die Entwicklung bis zur ersten Ordnung ergibt

$$(1 - \epsilon)^{-2} = 1 + 2\epsilon + O(\epsilon^2).$$

Daher ist

$$\boxed{n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}}, \quad \boxed{\alpha = 2}.$$

Hier ist c'_r die effektive Koordinatengeschwindigkeit, die im Brechungsindexmodell der Aufgabe verwendet wird. Eine lokale Messung mit Eigenlängen und Eigenzeiten ergibt weiterhin die Vakuumlichtgeschwindigkeit c .

B(c)

Der einfallende Lichtstrahl breite sich näherungsweise entlang der x -Richtung mit dem Stoßparameter b aus. Entlang seiner ungestörten Bahn gilt

$$y = b, \quad r = \sqrt{x^2 + b^2}.$$

Der Brechungsindex ist

$$n(x, y) = 1 + \frac{\alpha GM}{c^2 \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Das Snelliussche Brechungsgesetz liefert für einen kontinuierlich veränderlichen Brechungsindex die Strahlgleichung

$$\frac{d}{ds}(n\hat{\mathbf{t}}) = \nabla n,$$

wobei $\hat{\mathbf{t}}$ der Einheitstangentenvektor des Strahls ist. Für eine kleine Ablenkung gelten $ds \simeq dx$ und $n \simeq 1$, sodass sich für die transversale Komponente der Gleichung ergibt:

$$\frac{d\theta}{dx} \simeq \frac{\partial n}{\partial y}.$$

Differenzieren ergibt

$$\frac{\partial n}{\partial y} = -\frac{\alpha GM y}{c^2(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

In erster Ordnung kann dies entlang der geraden Bahn $y = b$ ausgewertet werden:

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha GM b}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Mit dem angegebenen Integral folgt

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha GM b}{c^2} \frac{2}{b^2} = -\frac{2\alpha GM}{bc^2}.$$

Das negative Vorzeichen zeigt an, dass die Ablenkung zur Sonne hin erfolgt. Für einen Strahl, der den Sonnenrand streift, gilt $b \simeq R$, und mit $\alpha = 2$ ergibt sich der Betrag der Ablenkung zu

$$\theta = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\theta = \frac{4(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}{(6.95 \times 10^8)(3.00 \times 10^8)^2}.$$

Somit ist

$$\boxed{\theta = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad} \quad \text{zur Sonne hin}.}$$

Dies entspricht ungefähr 1.75 Bogensekunden.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.