

المسألة 1: خمسة أجزاء قصيرة: قافز بالحبل المرن، ومحرك حراري، وعمر الأرض من التأريخ ب U-Pb، وكرة مشحونة بانتظام، وحلقة نحاسية تدور في المجال المغناطيسي للأرض

A

يرتبط قافز بالحبل المرن بأحد طرفي حبل مرن طويل. والطرف الآخر للحبل المرن مثبت بجسر مرتفع. يخطو القافز خارج الجسر ويسقط من السكون نحو النهر أسفله، دون أن يلامس الماء. كتلة القافز هي m ، وطول الحبل غير الممدود هو L ، وثابت قوة الحبل (القوة اللازمة لإحداث استطالة مقدارها m) هو k ، وشدة مجال الجاذبية هي g .

يمكنك افتراض أن

- القافز يمكن اعتباره كتلة نقطية m مرتبطة بطرف الحبل،
- كتلة الحبل مهملة مقارنة بـ m ،
- الحبل يخضع لقانون هوك،
- يمكن إهمال مقاومة الهواء طوال سقوط القافز.

أوجد تعبيرات للكميات الآتية ودونها في ورقة الإجابة:

- المسافة y التي يهبطها القافز قبل أن يسكن لحظياً لأول مرة،
- السرعة القصوى v التي يبلغها القافز أثناء هذا الهبوط،
- الزمن t المستغرق أثناء الهبوط حتى يسكن لأول مرة.

B

يعمل محرك حراري بين جسمين متماثلين عند درجتَي حرارة مختلفتين T_A و T_B ($T_A > T_B$)، ولكل جسم كتلة m وسعة حرارية نوعية ثابتة s . يظل الجسمان عند ضغط ثابت ولا يطرأ عليهما أي تغير في الطور.

(a) أوجد، مع إظهار خطوات الحل كاملةً، تعبيراً لدرجة الحرارة النهائية T_0 التي يبلغها الجسمان A و B، إذا استخلص المحرك الحراري من النظام أكبر مقدار من الشغل الميكانيكي ممكن نظرياً.

اكتب تعبيرك لدرجة الحرارة النهائية T_0 في ورقة الإجابة.

(b) ومن ثم، أوجد تعبيراً لهذا المقدار الأقصى من الشغل المتاح واكتبه في ورقة الإجابة.

يعمل المحرك الحراري بين خزانين من الماء، حجم كل منهما 2.50 m^3 . درجة حرارة أحد الخزانين 350 K ، ودرجة حرارة الآخر 300 K .

(c) احسب أكبر مقدار من الطاقة الميكانيكية يمكن الحصول عليه. دُون القيمة في ورقة الإجابة.

$$\text{السعة الحرارية النوعية للماء } = 4.19 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\text{كثافة الماء } = 1.00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

C

يُفترض أنه عند تشكّل الأرض كان النظيران ^{238}U و ^{235}U موجودين، بينما لم تكن نواتج اضمحلالهما موجودة. ويُستخدم اضمحلال ^{235}U و ^{238}U لتحديد عمر الأرض، T .

(a) يضمحل النظير ^{238}U بعمر نصف مقداره 4.50×10^9 سنة. ونواتج الاضمحلال في السلسلة الإشعاعية الناتجة أعمار نصف قصيرة مقارنةً بهذا العمر؛ ويمكن إهمال وجودها في تقريب أول. تنتهي سلسلة الاضمحلال بنظير الرصاص المستقر ^{206}Pb .

أوجد تعبيراً لعدد ذرات ^{206}Pb ، الذي يُرمز إليه بـ n^{206} ، الناتجة عن الاضمحلال الإشعاعي خلال الزمن t ، بدلالة العدد الحالي لذرات ^{238}U ، الذي يُرمز إليه بـ N^{238} ، وعمر النصف لـ ^{238}U ، ودوّنه في ورقة الإجابة. (قد تجد من المفيد استخدام وحدات مقداره 10^9 سنة.)

(b) وبالمثل، يضمحل ^{235}U بعمر نصف مقداره 0.710×10^9 سنة عبر سلسلة من النواتج ذات أعمار نصف أقصر، ليعطي النظير المستقر ^{207}Pb .

اكتب في ورقة الإجابة معادلة تربط n^{207} بـ N^{235} وعمر النصف لـ ^{235}U .

(c) يُحلّل خام يورانيوم مخلوط بخام رصاص باستخدام مطياف الكتلة. تُقاس التراكيز النسبية لنظائر الرصاص الثلاثة ^{204}Pb و ^{206}Pb و ^{207}Pb ، ويوجد أن أعداد الذرات تتناسب بالنسب $1.00 : 29.6 : 22.6$ على الترتيب. يُستخدم النظير ^{204}Pb مرجعاً لأنه ليس ذا منشأ إشعاعي. ويعطي تحليل خام رصاص نقي النسب $1.00 : 17.9 : 15.5$.

بمعرفة أن النسبة $N^{235} : N^{238}$ هي $1 : 137$ ، اشتق معادلة تتضمن T ودوّنها في ورقة الإجابة.

(d) افترض أن T أكبر بكثير من عمري النصف لكلا نظيري اليورانيوم، ومن ثم أوجد قيمة تقريبية لـ T .

(e) من الواضح أن هذه القيمة التقريبية ليست أكبر بدرجة ملحوظة من عمر النصف الأطول، ولكن يمكن استخدامها للحصول على قيمة أدق بكثير لـ T . ومن ثم، أو بأي طريقة أخرى، قدّر قيمة لعمر الأرض بدقة في حدود 2%.

D

تتوزع شحنة Q بانتظام في الفراغ في كامل حجم كرة نصف قطرها R .

(a) اشتق تعبيرين لشدة المجال الكهربائي على بُعد r من مركز الكرة لكل من $r \leq R$ و $r > R$.

(b) أوجد تعبيراً للطاقة الكهربائية الكلية المرتبطة بهذا التوزيع للشحنة.

دوّن إجابتيك عن (a) و (b) في ورقة الإجابة.

E

تُجعل حلقة دائرية من سلك نحاسي رفيع تدور حول قطر رأسي عند نقطة ضمن المجال المغناطيسي للأرض. تبلغ كثافة الفيض المغناطيسي للمجال المغناطيسي للأرض عند هذه النقطة $44.5 \mu\text{T}$ ، وتتجه بزاوية 64° تحت الأفقي. علماً بأن كثافة النحاس $8.90 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ومقاومته الكهربائية $1.70 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ ، احسب الزمن اللازم لانخفاض السرعة الزاوية للحلقة إلى النصف. بيّن خطوات الحل ودوّن قيمة الزمن في ورقة الإجابة. هذا الزمن أطول بكثير من زمن دورة واحدة.

يمكنك افتراض أن تأثيرات احتكاك المساند والهواء مهمة، وعليك، لأغراض هذا السؤال، إهمال تأثيرات الحث الذاتي، مع أنها ليست مهمة في الواقع.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• **A(a)**:

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

• **A(b)**:

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

• **A(c)**:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan \sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

• **B(a)**:

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

• **B(b)**:

$$W_{\max} = ms \left(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B} \right) = ms \left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B} \right)^2.$$

• **B(c)**:

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

• **C(a)** بوضع $h_{238} = 4.50 \times 10^9 \text{ yr}$:

$$^{206}_{\text{n}} = ^{238}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right).$$

• **C(b)** بوضع $h_{235} = 0.710 \times 10^9 \text{ yr}$:

$$^{207}_{\text{n}} = ^{235}_{\text{N}} \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right).$$

• **C(c)**:

$$\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7}, \quad T > 0.$$

• **C(d)**:

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}.$$

• **C(e)**:

$$T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr}.$$

• **D(a)**: المركبة الشعاعية للمجال الكهربائي هي

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3}, & 0 \leq r \leq R, \\ \frac{1}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

يتجه المجال إلى الخارج عندما $Q > 0$ ، وإلى الداخل عندما $Q < 0$ ، ويساوي صفراً عند المركز.

• **D(b)**:

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

• **E**:

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

الحل

A(a)

لتكن z المسافة المقاسة إلى الأسفل من الجسر. يظل الحبل مرتخياً حتى $z = L$ ؛ وبعد ذلك تكون استطالته $x = z - L$ ، ويكون شده kx .

لا يوجد تبديد، ولذلك تحفظ الطاقة الميكانيكية. عند أدنى نقطة، $z = y$ ، يكون القافز ساكناً لحظياً. ومن ثم

$$mgy = \frac{1}{2}k(y - L)^2.$$

وبصورة مكافئة، بوضع $x = y - L$

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mgL}{k} = 0.$$

الجزر المقبول فيزيائياً يعطي استطالة موجبة:

$$x = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgL}{k}}.$$

إن

$$y = L + \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kL}{mg}} \right).$$

A(b)

تزداد السرعة ما دام التسارع نحو الأسفل موجباً. وبعد أن يصبح الحبل مشدوداً،

$$m\ddot{z} = mg - k(z - L).$$

لذلك تبلغ السرعة قيمتها العظمى عندما يصبح التسارع صفراً لأول مرة:

$$z = L + \frac{mg}{k}.$$

يعطي انحفاظ الطاقة عند أي نقطة يكون فيها الحبل مشدوداً

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz - \frac{1}{2}k(z - L)^2.$$

وعند موضع السرعة القصوى،

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\left(L + \frac{mg}{k}\right) - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = mgL + \frac{m^2g^2}{2k}.$$

ومن ثم

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}.$$

A(c)

أثناء السقوط الحر الأولي مسافة L ، يكون الزمن المنقضي والسرعة النهائية

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}, \quad v_1 = \sqrt{2gL}.$$

نضع $\tau = 0$ عند اللحظة التي يصبح فيها الحبل مشدوداً لأول مرة، ونعرّف

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad x_{\text{eq}} = \frac{mg}{k}.$$

معادلة الحركة اللاحقة هي

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g.$$

مع $x(0) = 0$ و $\dot{x}(0) = v_1$ يكون حلها

$$x(\tau) = x_{\text{eq}}(1 - \cos \omega_0 \tau) + \frac{v_1}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau,$$

ومن ثم

$$\dot{x}(\tau) = x_{\text{eq}} \omega_0 \sin \omega_0 \tau + v_1 \cos \omega_0 \tau.$$

تتعدم هذه السرعة لأول مرة عندما يكون $\pi/2 < \omega_0 \tau < \pi$. وبناءً عليه،

$$\omega_0 \tau = \pi - \arctan\left(\frac{v_1}{x_{\text{eq}} \omega_0}\right) = \pi - \arctan\sqrt{\frac{2kL}{mg}}.$$

بإضافة زمن السقوط الحر نحصل على

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left[\pi - \arctan\sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right].$$

B(a)

يُحصل على الشغل الأقصى بتشغيل المحرك بصورة عكوسة بين درجتي الحرارة اللحظيتين للجسمين، حتى يبلغا درجة حرارة مشتركة. جميع درجات الحرارة فيما يأتي درجات حرارة مطلقة.

لكل جسم سعة حرارية ثابتة ms عند ضغط ثابت. لذلك يكون تغير إنتروبيته

$$\Delta S = ms \int \frac{dT}{T}.$$

يعمل المحرك دورياً، ولذلك يكون صافي تغير إنتروبيته صفراً. وفي التشغيل العكوس، يكون مجموع تغيري إنتروبية الجسمين صفراً أيضاً:

$$ms \int_{T_A}^{T_0} \frac{dT}{T} + ms \int_{T_B}^{T_0} \frac{dT}{T} = 0.$$

إذن

$$\ln \frac{T_0}{T_A} + \ln \frac{T_0}{T_B} = 0,$$

وهذا يعطي

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B}.$$

ولبيان سبب إعطاء ذلك القيمة العظمى، فإن عملية غير عكوسة ستولد بدلاً من ذلك إنتروبية كلية موجبة، مما يستلزم

$$T_0 \geq \sqrt{T_A T_B}.$$

إن ارتفاع درجة الحرارة النهائية يُبقي طاقة حرارية أكبر في الجسمين، وبالتالي يسمح باستخلاص شغل أقل.

B(b)

الحرارة المستخلصة من الجسم الذي كان أسخن في البداية هي

$$Q_H = ms(T_A - T_0),$$

والحرارة المنتقلة إلى الجسم الذي كان أبرد في البداية هي

$$Q_C = ms(T_0 - T_B).$$

يعطي انحفاظ الطاقة للمحرك الدوري

$$W = Q_H - Q_C = ms(T_A + T_B - 2T_0).$$

بالتعويض بدرجة الحرارة النهائية للعملية العكوسة،

$$W_{\max} = ms \left(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B} \right) = ms \left(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B} \right)^2.$$

B(c)

كتلة الماء في كل خزان هي

$$m = \rho V = (1.00 \times 10^3)(2.50) = 2.50 \times 10^3 \text{ kg}.$$

درجة الحرارة النهائية للعملية العكوسة هي

$$T_0 = \sqrt{350 \times 300} = 324.037 \dots \text{ K}.$$

باستخدام هذه القيمة دون تقريب مبكر،

$$\begin{aligned} W_{\max} &= (2.50 \times 10^3)(4.19 \times 10^3) \left[350 + 300 - 2\sqrt{350 \times 300} \right] \\ &= 2.0174 \dots \times 10^7 \text{ J}. \end{aligned}$$

إن

$$W_{\max} = 2.02 \times 10^7 \text{ J} = 20.2 \text{ MJ}.$$

C(a)

لنظير أم مشع عمر نصفه h ،

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{h}.$$

ومن ثم يمكن التعبير عن العدد الابتدائي لذرات النظير الأم بدلالة العدد الحالي:

$$N(0) = N(t)e^{\lambda t} = N(t)2^{t/h}.$$

بإهمال أعمار النواتج الوسيطة، تنتج كل ذرة يورانيوم اضمحلت ذرة رصاص واحدة في نهاية السلسلة. وبما أنه لم تكن هناك نواتج اضمحلال في البداية،

$$n(t) = N(0) - N(t) = N(t) \left(2^{t/h} - 1 \right).$$

بالنسبة إلى سلسلة ^{238}U ،

$$\boxed{{}^{206}\text{n} = {}^{238}\text{N} \left(2^{t/h_{238}} - 1 \right)}, \quad h_{238} = 4.50 \times 10^9 \text{ yr.}$$

C(b)

بتطبيق الاستدلال نفسه على سلسلة ^{235}U ،

$$\boxed{{}^{207}\text{n} = {}^{235}\text{N} \left(2^{t/h_{235}} - 1 \right)}, \quad h_{235} = 0.710 \times 10^9 \text{ yr.}$$

C(c)

يوفر خام الرصاص النقي نسب النظائر الموجودة أصلاً. ويجب طرح هذه الكميات الأصلية من العينة المختلطة لإيجاد الرصاص الناتج عن اضمحلال اليورانيوم.

ليكن N_{204} عدد ذرات ^{204}Pb في العينة المختلطة. بما أن هذا النظير ليس ناتجاً عن اضمحلال إشعاعي،

$${}^{206}\text{n} = (29.6 - 17.9)N_{204} = 11.7N_{204},$$

و

$${}^{207}\text{n} = (22.6 - 15.5)N_{204} = 7.1N_{204}.$$

إذن

$$\frac{{}^{207}\text{n}}{{}^{206}\text{n}} = \frac{7.1}{11.7}.$$

باستخدام معادلتني الاضمحلال والنسبة الحالية لليورانيوم،

$$\frac{7.1}{11.7} = \frac{{}^{235}\text{N}}{{}^{238}\text{N}} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = \frac{1}{137} \frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1}.$$

إن المعادلة المطلوبة هي

$$\boxed{\frac{2^{T/h_{235}} - 1}{2^{T/h_{238}} - 1} = 137 \frac{7.1}{11.7} = 83.13675 \dots}, \quad T > 0.$$

C(d)

وفق التقريب المذكور h_{238}, h_{235} ، $T \gg h_{238}, h_{235}$

$$2^{T/h} - 1 \simeq 2^{T/h}.$$

تصبح معادلة التأريخ

$$2^{T(1/h_{235} - 1/h_{238})} \simeq 137 \frac{7.1}{11.7}.$$

بأخذ اللوغاريتمات،

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(137 \times 7.1/11.7)}{(\ln 2)(h_{235}^{-1} - h_{238}^{-1})}.$$

عددياً،

$$T_{\text{approx}} = \frac{\ln(83.13675 \dots)}{(\ln 2)(1/0.710 - 1/4.50)} \times 10^9 \text{ yr,}$$

ومن ثم

$$T_{\text{approx}} = 5.38 \times 10^9 \text{ yr}.$$

لا يساوي هذا إلا نحو $1.19h_{238}$ ، ولذلك فإن إهمال طرح 1 في تعبير ^{238}U غير مبرر للحصول على نتيجة دقيقة.

C(e)

نُبقي عمليتي طرح 1 كليهما. وبوضع

$$u = \frac{T}{10^9 \text{ yr}},$$

يجب أن نحل

$$F(u) \equiv \frac{2^{u/0.710} - 1}{2^{u/4.50} - 1} = 83.13675 \dots$$

تعطي الحسابات عند قيم قريبة

$$F(4.55) = 82.666 \dots, \quad F(4.56) = 83.232 \dots$$

إن يقع العمر المطلوب بين 4.55 و 4.56 مليار سنة. والحل العددي الأدق هو $u = 4.5583157 \dots$ ، مما يعطي

$$T \simeq 4.56 \times 10^9 \text{ yr},$$

وهو ضمن هامش الخطأ المطلوب البالغ 2% بفارق كبير.

D(a)

الكثافة الحجمية المنتظمة للشحنة هي

$$\rho_q = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3}.$$

يجعل التناظر الكروي المجال الكهربائي شعاعياً وثابت المقدار على سطح غاوسي كروي متحد المركز مع الكرة.

عندما $r \leq R$ ، تكون الشحنة المحصورة

$$Q_{\text{enc}} = \rho_q \frac{4\pi r^3}{3} = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

يعطي قانون غاوس

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0},$$

ومن ثم

$$E_r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (r \leq R).$$

عندما $r > R$ ، تكون الشحنة المحصورة Q ، ولذلك

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R).$$

يساوي المجال صفراً عند المركز، وهو متصل عند السطح، حيث

$$E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

D(b)

في الفراغ، تكون كثافة الطاقة الكهروستاتيكية

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2.$$

تشمل الطاقة الكلية المجال داخل الكرة المشحونة وخارجها:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[\int_0^R E^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty E^2 4\pi r^2 dr \right].$$

بالتعويض بتعابير المجال اللذين أوجداً أعلاه،

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right].$$

إذن

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right),$$

و

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}.$$

E

ليكن نصف قطر الحلقة a ، ولتكن مساحة المقطع العرضي للسلك S . نرمز لكثافة كتلة النحاس بـ ρ_m ، ولقاوميته الكهربائية بـ ρ_e . كتلة الحلقة ومقاومتها هما

$$M = 2\pi a S \rho_m, \quad \mathcal{R} = \rho_e \frac{2\pi a}{S}.$$

لحظة رفيعة تدور حول قطر، يكون عزم القصور الذاتي

$$I = \frac{1}{2} M a^2 = \pi \rho_m S a^3.$$

يبقى مستوى الحلقة رأسياً، ولذلك يكون العمود عليه أفقياً. ولا تسهم في الفيض المغناطيسي إلا المركبة الأفقية لمجال الأرض:

$$B_h = B \cos 64^\circ.$$

لتكن θ الزاوية بين العمود على مستوى الحلقة وهذا المجال الأفقي. يكون الفيض

$$\Phi = B_h \pi a^2 \cos \theta.$$

مع $\omega = \dot{\theta}$ ، يعطي قانون فاراداي

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = B_h \pi a^2 \omega \sin \theta.$$

بإهمال الحث الذاتي وفقاً للتعليمات، يكون التيار

$$i = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}}.$$

وبالتالي يكون المعدل اللحظي لتوليد حرارة جول

$$P = i^2 \mathcal{R} = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{\mathcal{R}} \omega^2 \sin^2 \theta.$$

زمن التخميد المذكور أطول بكثير من زمن دورة واحدة، ولذلك لا تتغير ω إلا قليلاً خلال كل دورة. ومن ثم يمكننا استخدام

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2},$$

مما يعطي

$$\langle P \rangle = \frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2\mathcal{R}} \omega^2.$$

في غياب الاحتكاك، تأتي هذه الحرارة من طاقة الحركة الدورانية:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) = -\langle P \rangle.$$

إذن تحقق السرعة الزاوية المتوسطة

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2 \pi^2 a^4}{2I\mathcal{R}} \omega.$$

لكن

$$I\mathcal{R} = (\pi \rho_m S a^3) \left(\rho_e \frac{2\pi a}{S} \right) = 2\pi^2 \rho_m \rho_e a^4,$$

فتُختزل الكميات الهندسية:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B_h^2}{4\rho_m \rho_e} \omega.$$

ومن ثم

$$\omega(t) = \omega(0) \exp \left(-\frac{B_h^2 t}{4\rho_m \rho_e} \right).$$

بوضع $\omega(t_{1/2}) = \omega(0)/2$ نحصل على

$$t_{1/2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B_h^2} = \frac{4\rho_m \rho_e \ln 2}{B^2 \cos^2 64^\circ}.$$

عدديًا،

$$B_h = (44.5 \times 10^{-6}) \cos 64^\circ = 1.95075 \dots \times 10^{-5} \text{ T},$$

و

$$t_{1/2} = \frac{4(8.90 \times 10^3)(1.70 \times 10^{-8}) \ln 2}{(44.5 \times 10^{-6})^2 \cos^2 64^\circ}.$$

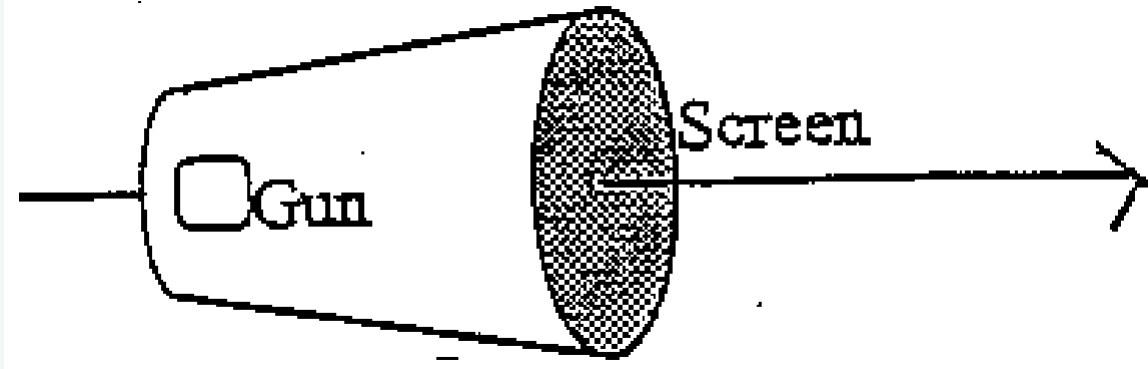
إذن

$$t_{1/2} \simeq 1.10 \times 10^6 \text{ s} \simeq 12.8 \text{ days}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

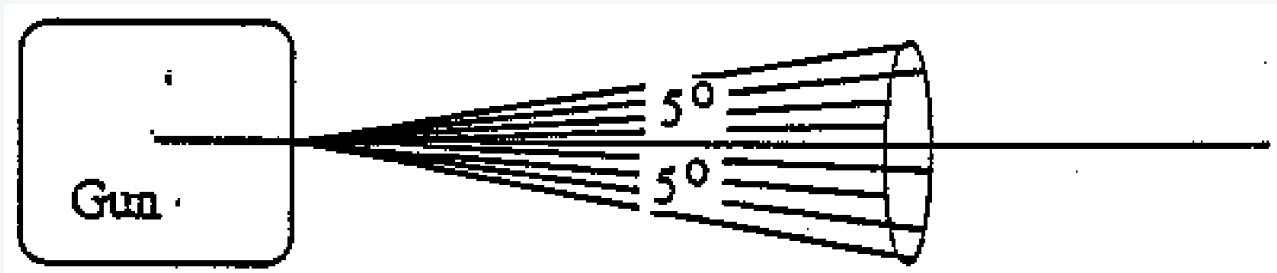
المسألة 2: نسبة شحنة الإلكترون إلى كتلته (التركيز المغناطيسي في أنبوب أشعة المهبط CRT؛ جسيمات بيتا بين لوحين مشحونين)

(a) يوضع أنبوب أشعة المهبط (CRT)، المكوّن من مدفع إلكتروني وشاشة، داخل مجال مغناطيسي منتظم وثابت مقداره B ، بحيث يكون المجال المغناطيسي موازيًا لمحور حزمة المدفع، كما هو موضح في الشكل 2.3.



الشكل 2.3

تخرج حزمة الإلكترونات من مصعد المدفع الإلكتروني على المحور، ولكن بتباعد عن المحور يصل إلى 5° ، كما هو موضح في الشكل 2.4. وتتكون عمومًا بقعة منتشرة على الشاشة، غير أنه عند قيم معينة للمجال المغناطيسي تتكون بقعة مركزة بوضوح.



الشكل 2.4

بالنظر في حركة إلكترون يتحرك في البداية بزاوية β (حيث $0 \leq \beta \leq 5^\circ$) مع المحور عند مغادرته المدفع الإلكتروني، وبالنظر في مركبتي حركته الموازية للمحور والعمودية عليه، اشتق تعبيرًا لنسبة شحنة الإلكترون إلى كتلته e/m بدلالة الكميات الآتية:

أصغر مجال مغناطيسي تتكون عنده بقعة مركزة،

فرق جهد التسريع بين طرفي المدفع الإلكتروني V

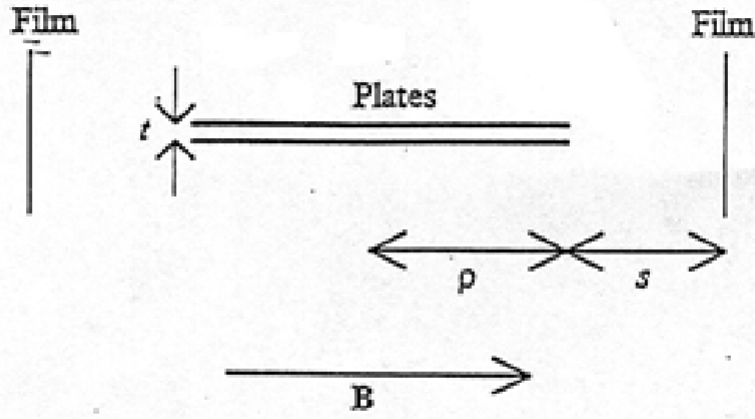
(لاحظ أن $V < 2 \text{ kV}$)،

و D ، وهي المسافة بين المصعد والشاشة.

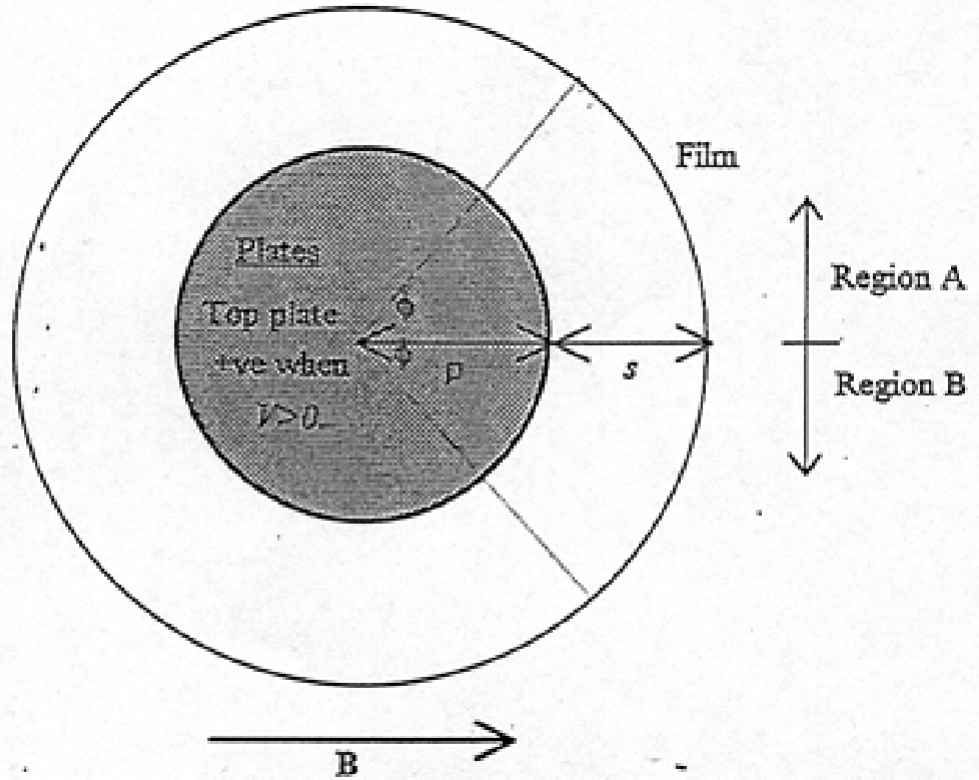
اكتب التعبير الذي توصلت إليه في المربع المخصص في القسم 2a من ورقة الإجابة.

(b) انظر في طريقة أخرى لتعيين نسبة شحنة الإلكترون إلى كتلته. يبين الشكل 2.5 الترتيب التجريبي في منظر جانبي ومسقط أفقي (من أعلى)، مع الإشارة إلى اتجاه المجال المغناطيسي بالرمز $\mathbf{B}$. يوضع داخل هذا المجال المغناطيسي المنتظم $\mathbf{B}$ لوحان دائريان من النحاس الأصفر، نصف قطر كل منهما ρ ، وتفصل بينهما مسافة صغيرة جدًا t . ويحافظ على فرق جهد V بينهما. اللوحان متوازيان ومتحدا المحور، إلا أن محورهما عمودي على المجال المغناطيسي. ويغطي فيلم فوتوغرافي السطح الداخلي المنحني لأسطوانة نصف قطرها $\rho + s$ ، تُثبت بحيث تكون متحدة المحور مع اللوحين. وبعبارة أخرى، يقع الفيلم على مسافة شعاعية s من حافتي اللوحين. يوضع الترتيب بأكمله في الفراغ. لاحظ أن t أصغر بكثير من كل من s و ρ .

Side View:



View from above:



الشكل 2.5

يوضع بين مركزي اللوحين مصدر نقطتي لجسيمات β ، يصدر جسيمات β بانتظام في جميع الاتجاهات بسرعات ضمن نطاق من القيم، وتُعرض قطعة الفيلم نفسها للجسيمات في ثلاث حالات مختلفة:

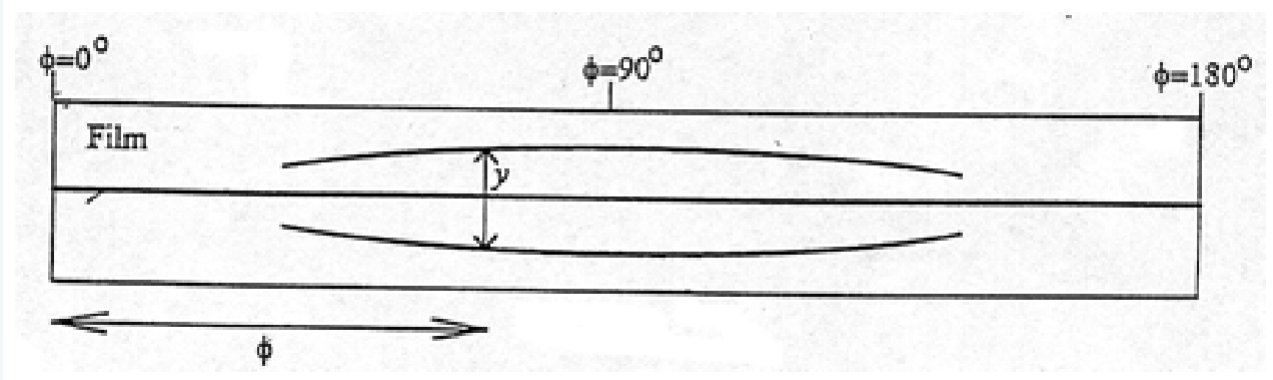
أولاً عند $B = 0$ و $V = 0$ ،

ثانياً عند $B = B_0$ و $V = V_0$ ، و

ثالثاً عند $B = -B_0$ و $V = -V_0$ ؛

حيث V_0 و B_0 ثابتان موجبان. يرجى ملاحظة أن اللوح العلوي موجب الشحنة عندما $V > 0$ (وسالب الشحنة عندما $V < 0$)، وأن المجال المغناطيسي يكون في الاتجاه المحدد في الشكل 2.5 عندما $B > 0$ (وفي الاتجاه المعاكس عندما $B < 0$). يمكنك في هذا الجزء افتراض أن الفجوة صغيرة إلى حد يمكن إهماله.

تُشار إلى منطقتين من الفيلم بالرمزين A و B في الشكل 2.5. وبعد التعريض والتحميض، يُعطى رسم تخطيطي لإحدى هاتين المنطقتين في الشكل 2.6. من أي منطقة أُخذت هذه القطعة (اكتب A أو B في ورقة إجابتك)؟ علّل إجابتك بإظهار اتجاهات القوى المؤثرة في الإلكترون.



الشكل 2.6

(C) بعد التعريض والتحميض، يُعطى رسم تخطيطي للفيلم في الشكل 2.6. تُقاس المسافة الفاصلة بين الأثرين الخارجيين باستخدام مجهر، ويُشار أيضًا إلى هذه المسافة (y) عند زاوية معينة في الشكل 2.6. وترد النتائج في الجدول أدناه، حيث تُعرف الزاوية ϕ في الشكل 2.5 بأنها الزاوية بين المجال المغناطيسي والخط الواصل بين مركز اللوحين والنقطة على الفيلم.

الزاوية مع المجال / بالدرجات	ϕ	90	60	50	40	30	23
المسافة الفاصلة mm/	y	17.4	12.7	9.7	6.4	3.3	نهاية الأثر

ترد أدناه القيم العددية لمعطيات المنظومة:

$$B_0 = 6.91 \text{ mT} \quad V_0 = 580 \text{ V} \quad t = 0.80 \text{ mm} \\ s = 41.0 \text{ mm}$$

بالإضافة إلى ذلك، يمكنك أخذ سرعة الضوء في الفراغ مساوية لـ $3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ، وكتلة سكون الإلكترون مساوية لـ $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

حدّد أكبر طاقة حركية مرصودة لجسيمات β .

اكتب أكبر طاقة حركية بوصفها نتيجة عددية بوحدة eV في المربع الموجود في القسم 2f من ورقة الإجابة.

(d) باستخدام المعلومات الواردة في الجزء (f) [أي الجزء (c) أعلاه]، أوجد قيمة لنسبة شحنة الإلكترون إلى كتلة سكونه. ينبغي إجراء ذلك برسم منحني بياني مناسب على الورق المقدم.

بيّن جبريًا الكميتين الممثلتين على المحورين الأفقي والرأسي، على الرسم البياني نفسه وفي المربعين المخصصين في القسم 2g من ورقة الإجابة.

اكتب القيمة التي حصلت عليها لنسبة شحنة الإلكترون إلى كتلته في المربع المخصص في القسم 2g من ورقة الإجابة.

يرجى ملاحظة أن الإجابة التي تحصل عليها قد لا تتفق مع القيمة المعتمدة بسبب خطأ منهجي في القياسات.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) لأصغر مجال تركيز موجب $B_{\min}$ ،

$$\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}.$$

- (b) المنطقة B عند $B = B_0$, $V = V_0$ ، تتجه القوة الكهربائية إلى أعلى والقوة المغناطيسية إلى أسفل. ويؤدي عكس المجالين إلى عكس القوتين.
- (c)

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV}$$

وهو ما يقابل $v_{\max} \simeq 2.69 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

- (d) مثل $Y = y$ رأسياً بدلالة الكمية الأفقية عديمة الأبعاد

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}.$$

ميل الخط المستقيم يساوي تقريباً $1.855 \times 10^{-2} \text{ m}$ ، مما يعطي

$$\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}.$$

الحل

في جميع ما يأتي، يرمز $e > 0$ إلى مقدار شحنة الإلكترون؛ أما شحنة الإلكترون فهي $-e$. وكتلة سكونه هي m_0 .

(a)

بما أن جهد التسريع أقل من 2 kV ، فإن الطاقة الحركية للإلكترون أصغر بكثير من طاقة سكونه. نستخدم الميكانيكا غير النسبية، مع $m \simeq m_0$:

$$eV = \frac{1}{2}mv^2.$$

مركبتا السرعة عند مغادرة المدفع هما

$$v_{\parallel} = v \cos \beta, \quad v_{\perp} = v \sin \beta.$$

لا يؤثر المجال المغناطيسي بقوة موازية لاتجاهه. لذلك تكون الحركة الموازية منتظمة، بينما تكون الحركة العمودية دائرية، حيث

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB}, \quad \omega = \frac{eB}{m}, \quad T = \frac{2\pi m}{eB}.$$

المسار الناتج لولبي. ويعود الإلكترون الذي ينطلق من المحور إلى المحور بعد كل دورة كاملة. ويقابل أصغر مجال تركيز موجب إتمام دورة واحدة قبل الوصول إلى الشاشة، ومن ثم

$$D = v \cos \beta T = \frac{2\pi m v \cos \beta}{eB_{\min}}.$$

بالتربيع والتعويض بـ $v^2 = 2eV/m$ نحصل على

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V \cos^2 \beta}{B_{\min}^2 D^2}.$$

للحزمة الضيقة، $\beta \leq 5^\circ$ ، نأخذ $\cos \beta \simeq 1$. ومن ثم

$$\frac{e}{m} \simeq \frac{8\pi^2 V}{B_{\min}^2 D^2}.$$

يكون التركيز تقريبياً لحزمة تضم إلكترونات ذات قيم مختلفة لـ β : إذ تختلف سرعاتها المحورية اختلافاً طفيفاً. عند 5° ، لا تتجاوز قيمة $1 - \cos \beta$ نحو 0.0038 .

(b)

قوة لورنتز هي

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

عند $V = V_0 > 0$ ، يكون اللوح العلوي موجباً، ولذلك يتجه المجال الكهربائي إلى أسفل وتتجه القوة الكهربائية المؤثرة في الإلكترون إلى أعلى.

عند $B = B_0 > 0$ ، يعطي تطبيق قاعدة الضرب الاتجاهي على المسقط الأفقي ما يأتي:

الإلكترون المتجه نحو	القوة الكهربائية	القوة المغناطيسية
المنطقة A	إلى أعلى	إلى أعلى
المنطقة B	إلى أعلى	إلى أسفل

عندما تكون الفجوة صغيرة إلى حد يمكن إهماله، لا تستطيع الإلكترونات اجتياز الحيز بين اللوحين إلا عندما تتوازن القوى الرأسية المؤثرة فيها. وهذا ممكن في المنطقة B.

لتكن θ الزاوية بين سرعة الإلكترون والمجال المغناطيسي أثناء حركته بين اللوحين. بإهمال تأثيرات الحواف،

$$E_0 = \frac{V_0}{t}.$$

يتطلب توازن القوى أن

$$eE_0 = eB_0v \sin \theta,$$

أو

$$v \sin \theta = \frac{V_0}{B_0 t}.$$

يؤدي عكس كل من B و V إلى عكس القوتين، ولذلك تبقىان متوازنتين للإلكترونات المتجهة نحو المنطقة B.

بعد مغادرة الإلكترون اللوحين، تزول القوة الكهربائية بينما تبقى القوة المغناطيسية. ومن ثم:

- ينتج عن $B = B_0, V = V_0$ الأثر المنحني السفلي.
- ينتج عن $B = -B_0, V = -V_0$ الأثر المنحني العلوي.
- ينتج عن $B = V = 0$ الأثر المستقيم الأوسط.

هذه هي الآثار الثلاثة الموضحة في الشكل 2.6، مما يثبت أن الإجابة هي

$$\boxed{\text{B المنطقة}}.$$

(c)

نستخدم تقريب الفجوة الضيقة، ونساوي، إلى الرتبة الأولى في الانحراف اللاحق، زاوية مغادرة الإلكترون θ بالزاوية المرصودة ϕ . نعرّف

$$u = \frac{V_0}{B_0 t}.$$

عددياً،

$$u = \frac{580}{(6.91 \times 10^{-3})(0.80 \times 10^{-3})} = 1.0492 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

يصبح شرط انتقاء السرعة

$$v(\phi) = \frac{u}{\sin \phi}.$$

كلما تناقصت ϕ ابتداءً من 90° ، ازدادت السرعة المنتقاة. ولذلك تقابل أصغر زاوية مرصودة، وهي 23° ، أكبر سرعة:

$$v_{\max} = \frac{1.0492 \times 10^8}{\sin 23^\circ} = 2.6852 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = 0.8951c.$$

تحدد خانة «نهاية الأثر» هذه الزاوية الحدية؛ ولا تقدم قياساً عددياً لـ y .

يلزم استخدام الطاقة الحركية النسبية:

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} = 2.2426,$$

$$K_{\max} = (\gamma_{\max} - 1)m_0c^2.$$

وعليه

$$K_{\max} = (2.2426 - 1)(9.11 \times 10^{-31})(3.00 \times 10^8)^2 = 1.0188 \times 10^{-13} \text{ J}.$$

باستخدام التحويل القياسي للوحدات $1 \text{ eV} = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ J}$

$$K_{\max} = 6.36 \times 10^5 \text{ eV}.$$

بدقة مناسبة لدقة زاوية نهاية الأثر،

$$K_{\max} \simeq 6.4 \times 10^5 \text{ eV} = 0.64 \text{ MeV}.$$

(d)

خارج اللوحين، نهمل المجال الكهربائي عند الحواف ونحتفظ بالحد الرئيسي للانحراف المغناطيسي. وتكون الحركة الأفقية للإلكترون عندئذ منتظمة تقريباً، ويكون زمن انتقاله من حافة اللوح إلى الفيلم

$$\tau \simeq \frac{s}{v}.$$

لا يبذل المجال المغناطيسي شغلاً، ولذلك تبقى سرعة الإلكترون ومعامل لورنتز ثابتين. وإلى الرتبة الأولى، يكون مقدار القوة المغناطيسية الرأسية

$$F_z = eB_0v \sin \phi,$$

مما يعطي تسارعاً رأسياً

$$a_z = \frac{eB_0v \sin \phi}{\gamma m_0}.$$

وعليه تكون إزاحة أيٍّ من الأثرين المنحنيين عن الأثر الأوسط

$$\delta \simeq \frac{1}{2} a_z \tau^2 = \frac{eB_0s^2 \sin \phi}{2\gamma m_0v}.$$

تنتج عن حالتي ضبط المجالين إزاحتان متعاكستان. ولذلك تكون المسافة الفاصلة بينهما

$$y = 2\delta \simeq \frac{eB_0s^2 \sin \phi}{\gamma m_0v}.$$

بالتعويض بـ

$$v = \frac{V_0}{B_0t \sin \phi}, \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0tc \sin \phi} \right)^2},$$

نحصل على

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2ts^2}{V_0} \sin^2 \phi \sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{B_0tc \sin \phi} \right)^2}.$$

بما أن $0 < \phi < 180^\circ$ ، يمكن كتابة ذلك على الصورة

$$y \simeq \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0} \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}.$$

إذن نختار كميتي محوري الرسم البياني على النحو الآتي

$$X = \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - \left(\frac{V_0}{B_0 t c} \right)^2}, \quad Y = y.$$

الكمية الأفقية عديمة الأبعاد. وهنا

$$\frac{V_0}{B_0 t c} = 0.349735.$$

النقاط المطلوب تمثيلها هي:

ϕ	الإحداثي الأفقي X	الإحداثي الرأسي Y / mm
90°	0.93685	17.4
60°	0.68612	12.7
50°	0.52210	9.7
40°	0.34667	6.4
30°	0.17867	3.3

الرسم البياني خط شبه مستقيم يمر بنقطة الأصل. والمديان المناسبان للمحورين هما $0 \leq X \leq 1$ و $0 \leq Y \leq 20$ mm. وتعطي الملاءمة بخط يمر بنقطة الأصل

$$Y \simeq (18.55 \text{ mm}) X.$$

بكتابة الميل بالأمتار،

$$S = 1.855 \times 10^{-2} \text{ m},$$

تعطي العلاقة النظرية

$$S = \frac{e}{m_0} \frac{B_0^2 t s^2}{V_0}.$$

ومن ثم

$$\frac{e}{m_0} = \frac{S V_0}{B_0^2 t s^2} \simeq \frac{(1.855 \times 10^{-2})(580)}{(6.91 \times 10^{-3})^2 (0.80 \times 10^{-3})(41.0 \times 10^{-3})^2}.$$

وعليه فإن القيمة المستنتجة من القياسات هي

$$\frac{e}{m_0} \simeq 1.68 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}.$$

يحتفظ هذا الاشتقاق بالحد الرئيسي للانحراف. وعند أكبر مسافة فاصلة مقاسة، تكون $\delta/s = 8.7/41.0 \simeq 0.21$ ؛ ولذلك يمكن أن تسهم التصحيحات الناشئة عن الانحناء غير المتناهي في الصغر بتأثيرات تبلغ بضعة في المئة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

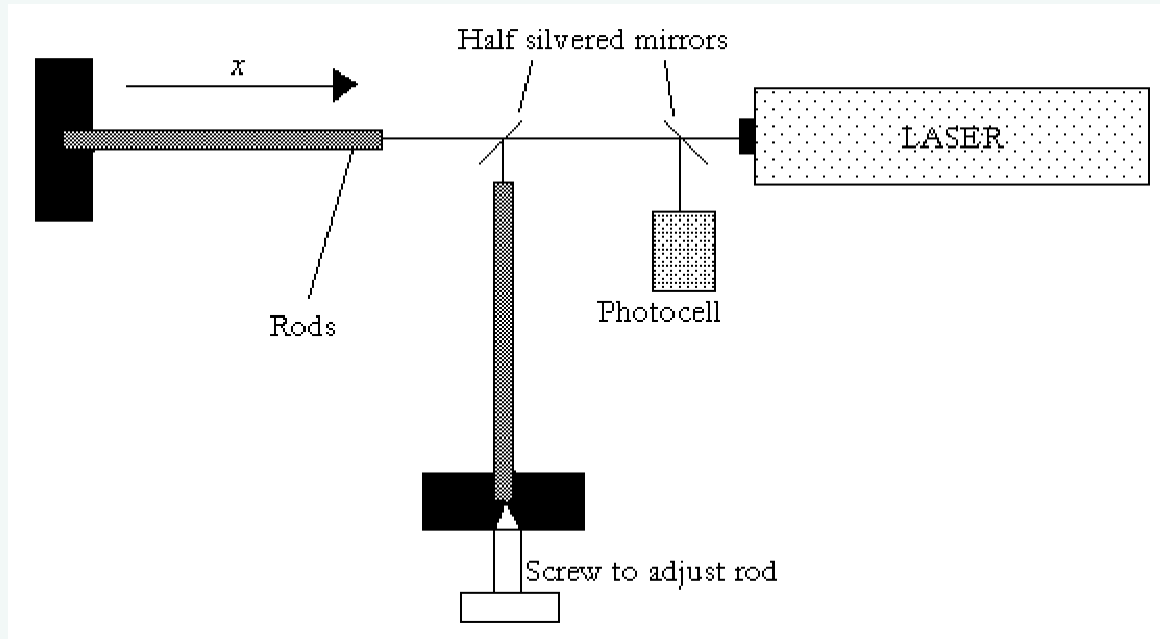
المسألة 3: كاشف موجات الجاذبية (الجزء A) وانحراف الضوء بفعل جاذبية الشمس

موجات الجاذبية وتأثيرات الجاذبية في الضوء.

الجزء A

يتناول هذا الجزء صعوبات الكشف عن موجات الجاذبية الناشئة عن أحداث فلكية. وينبغي إدراك أن انفجار مستعر أعظم بعيد قد يحدث تقلبات في شدة مجال الجاذبية عند سطح الأرض تبلغ نحو $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$.

يتكون نموذج لكاشف موجات الجاذبية (انظر الشكل 3.1) من قضيبين معدنيين، طول كل منهما 1m، موضوعين بحيث يتعامدان. صُقل أحد طرفي كل قضيب ليصبح مستويًا بدقة بصرية، وثُبت الطرف الآخر تثبيتًا محكمًا. ويضبط موضع أحد القضيبين بحيث تصبح الإشارة المستقبلية من الخلية الكهروضوئية عند قيمتها الدنيا (انظر الشكل 3.1).



الشكل 3.1

يُعطى القضيبان دفعة حادة قصيرة بواسطة جهاز كهروضغطي. ونتيجة لذلك، يهتز طرفاهما الحران بإزاحة طولية Δx_t ، حيث

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi),$$

و a, μ, ω و ϕ ثوابت.

- (a) إذا انخفضت سعة الحركة بنسبة 20% خلال فترة زمنية مقدارها 50s، فحدد قيمة μ .
 (b) حدد أيضًا قيمة ω ، علمًا بأن القضيبين مصنوعان من الألومنيوم الذي تبلغ كثافته $(\rho) 2700 \text{ kg m}^{-3}$ ، ومعامل يونغ (E) له $7.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$.

(c) يستحيل صنع القضيبين بالطول نفسه تمامًا، ولذلك يظهر في إشارة الخلية الكهروضوئية تردد خفقان مقداره 0.005 Hz. ما الفرق بين طولي القضيبين؟

(d) لقضيب طوله l ، اشتق تعبيرًا جبريًا للتغير في الطول، Δl ، الناتج عن تغير، Δg ، في شدة مجال الجاذبية، g ، بدلالة l وثوابت أخرى لمادة القضيب.

(e) الضوء الذي ينتجه الليزر أحادي اللون وطوله الموجي 656nm. إذا كانت أصغر إزاحة للأهداب يمكن كشفها تساوي 10^{-4} من الطول الموجي لليزر، فما أصغر قيمة لازمة لـ l لكي يكون مثل هذا النظام قادرًا على كشف تغيرات في g مقدارها $10^{-19} \text{ N kg}^{-1}$ ؟

يتكون نوع غير اتجاهي من كواشف موجات الجاذبية من كرة من سبيكة نحاسية كتلتها 1168 kg، معلقة في فراغ من منظومة لتقليل الاهتزازات. وتثبت على الكرة محوّلات تحتوي على دوائر موائفة لكشف التغيرات في أبعادها. إلا أن هذه المحوّلات تلتقط جميع الاهتزازات الطفيلية الناجمة، على سبيل المثال، عن التأثيرات الحرارية، وكذلك الضجيج الناتج عن التقاط التشويش الكهربائي.

(f) لتقليل الاهتزازات الناتجة عن التأثيرات الحرارية، تُحفظ الكرة عند درجة حرارة 100 mK. بأي عامل تنخفض سعة الاهتزازات الذرية عند تبريد المنظومة من 300 K؟

(g) تُبرد الكرة أولاً إلى 4.2 K باستخدام النيتروجين السائل والهيليوم السائل. ثم تُخفّض درجة الحرارة، T ، إلى 100 mK بعملية تبريد تسحب الطاقة من النظام بمعدل متوسط قدره 1 mW. علماً بأن السعة الحرارية النوعية، s ، للسبيكة النحاسية تتناسب طردياً مع T^3 عند درجات الحرارة المنخفضة هذه، قدر الزمن اللازم لتبريد النظام من 4.2 K إلى 100 mK، إذا كانت $s = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ عند 4.2 K.

B الجزء

يتناول هذا الجزء تأثير مجال الجاذبية في انتشار الضوء في الفضاء.

(a) يتعرض فوتون ينبعث من سطح الشمس (كتلتها M ونصف قطرها R) لانزياح نحو الأحمر. بافتراض كتلة سكون مكافئة لطاقة الفوتون، طبق نظرية نيوتن للجاذبية لتبين أن التردد الفعّال (أو المقاس) للفوتون عند اللانهاية ينخفض (ينزاح نحو الأحمر) بالعامل $(1 - GM/Rc^2)$.

(b) يكافئ انخفاض تردد الفوتون زيادةً في زمنه الدوري، أو تمديدًا للزمن إذا استُخدم الفوتون ساعةً معيارية. ويمكن، إضافةً إلى ذلك، إثبات أن تمدد الزمن يصاحبه دائماً انكماش في وحدة الطول بالعامل نفسه.

سنحاول الآن دراسة تأثير ذلك في انتشار الضوء بالقرب من الشمس. لنعرّف أولاً معامل انكسار فعّالاً n_r عند نقطة تبعد مسافة r عن مركز الشمس. ليكن

$$n_r = \frac{c}{c'_r},$$

حيث c سرعة الضوء كما تُقاس في نظام إحداثيات بعيد عن تأثير جاذبية الشمس ($r \rightarrow \infty$)، و c'_r سرعة الضوء كما تُقاس في نظام إحداثيات يقع على مسافة r من مركز الشمس.

بين أنه يمكن تقريب n_r إلى:

$$n_r = 1 + \frac{\alpha GM}{rc^2},$$

عندما تكون GM/rc^2 صغيرة، حيث α ثابت عليك تحديده.

(c) باستخدام هذا التعبير لـ n_r ، احسب بالراديان انحراف شعاع ضوئي عن مساره المستقيم عند مروره بمحاذاة حافة الشمس.

المعطيات:

ثابت الجاذبية، $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

كتلة الشمس، $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$.

نصف قطر الشمس، $R = 6.95 \times 10^8 \text{ m}$.

سرعة الضوء، $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

قد تحتاج أيضاً إلى التكامل الآتي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- **A(a)** : $\mu = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.
- **A(b)** : للنمط الطولي الأساسي، $\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$.
- **A(c)** : $|l_1 - l_2| \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.90 \text{ } \mu\text{m}$.
- **A(d)** : $\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}$ ، حيث تؤخذ Δg على امتداد القضيب، وتكون موجبة باتجاه طرفه الحر.
- **A(e)** : $l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m}$ ، بتفسير عتبة الكشف على أنها فرق في المسار البصري، وأخذ الاستجابة المحورية لأحد الذراعين بالنسبة إلى الآخر.
- **A(f)** : تنخفض السعة بعامل [54.8]، لتصبح [0.0183] من قيمتها الابتدائية، في النموذج التوافقي الكلاسيكي.
- **A(g)** : $t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}$.
- **B(a)** : $\nu_{\infty} \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right)$.
- **B(b)** : $\alpha = 2, \quad n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}$.
- **B(c)** : $\theta = \frac{4GM}{Rc^2} = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad}$ ، باتجاه الشمس.

الحل

A(a)

غلاف سعة الاهتزاز هو

$$A(t) = ae^{-\mu t}.$$

يعني الانخفاض بنسبة 20% أن السعة بعد 50 s تساوي 0.80 من قيمتها السابقة:

$$\frac{A(t+50)}{A(t)} = e^{-50\mu} = 0.80.$$

إذًا،

$$\mu = -\frac{\ln(0.80)}{50} = 4.46 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

A(b)

نُمثل القضيب بوسط متصل مرن منتظم، ونعدّ الاهتزاز المرصود نمطه الطولي الأساسي.

لتكن $u(x, t)$ الإزاحة الطولية و S مساحة المقطع العرضي. القوة الطولية هي $ES \partial u / \partial x$. ويعطي قانون نيوتن الثاني لعنصر قصير

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

ومن ثم تنتقل الموجات الطولية بسرعة

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

تكون الإزاحة عند الطرف المثبت صفرًا، بينما يكون الإجهاد الطولي عند الطرف الحر صفرًا:

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

لنمط ذي اعتماد مكاني على الصورة $\sin(kx)$ ، يقتضي شرط الطرف الحر أن

$$\cos(kl) = 0.$$

في النمط الأساسي، $kl = \pi/2$ ، ولذلك يساوي طول القضيب ربع طول موجي. ومن ثم

$$\omega_0 = vk = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

عدديًا،

$$v = \sqrt{\frac{7.1 \times 10^{10}}{2700}} = 5.128 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

وعندما يكون $l = 1 \text{ m}$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} (5.128 \times 10^3) = 8.055 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}.$$

في حالة التخميد الخطي، يكون التردد الزاوي المرصود $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ ، وبما أن $\omega_0 \gg \mu$ ، فإن هذا التصحيح مهم:

$$\boxed{\omega \simeq 8.06 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}}.$$

والتردد المقابل هو

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{4l} \simeq 1.282 \times 10^3 \text{ Hz}.$$

A(c)

لقضيبين مصنوعين من المادة نفسها ويهتزان في النمط الأساسي نفسه،

$$f(l) = \frac{v}{4l}.$$

وعليه، فإن تردد الخفقان بينهما هو

$$f_b = |f_1 - f_2| = \frac{v}{4} \left| \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} \right|.$$

إذا كان الفرق بين الطولين صغيرًا، $\delta l = |l_1 - l_2|$ ، وكان كلا الطولين يساوي تقريبًا l ، فإن

$$f_b \simeq \frac{v}{4l^2} \delta l = \frac{f}{l} \delta l.$$

إذًا،

$$\delta l \simeq \frac{l f_b}{f} = \frac{(1)(0.005)}{1281.998} \text{ m},$$

فنحصل على

$$\boxed{\delta l \simeq 3.90 \times 10^{-6} \text{ m}}.$$

تؤكد النسبة $\delta l/l \simeq 3.9 \times 10^{-6}$ صلاحية تقريب الفرق الصغير.

A(d)

نستخدم المرونة الخطية واضطرابًا شبه ساكن في مجال الجاذبية. ليكن x ممتدًا من الطرف المثبت، $x = 0$ ، إلى الطرف الحر، $x = l$ ، ولتدلّ Δg على المركبة ذات الإشارة لتغير المجال على امتداد هذا الاتجاه.

كتلة المادة الواقعة بعد مقطع عرضي عند x هي

$$m(x) = \rho S(l - x).$$

لذلك تكون القوة المحورية الإضافية المنقولة عبر ذلك المقطع

$$\Delta F(x) = \rho S(l - x)\Delta g.$$

وفقاً لتعريف معامل يونغ، يكون التغير في الانفعال الموضعي

$$\Delta \epsilon(x) = \frac{\Delta F(x)}{ES} = \frac{\rho(l - x)\Delta g}{E}.$$

وبتكامل استطالة جميع العناصر،

$$\Delta l = \int_0^l \Delta \epsilon(x) dx = \frac{\rho \Delta g}{E} \int_0^l (l - x) dx.$$

إذاً

$$\boxed{\Delta l = \frac{\rho l^2 \Delta g}{2E}}.$$

يؤدي تغير المجال باتجاه الطرف المثبت إلى انضغاط، وتمثله قيمة سالبة لـ Δl .

A(e)

تؤدي إزاحة Δl لطرف عاكس إلى تغير المسار البصري ذهاباً وإياباً بمقدار $2\Delta l$. وبأخذ تغير المجال على امتداد أحد القضيبين، مع استخدام الآخر مرجعاً طولياً،

$$|\Delta D| = 2|\Delta l|.$$

يؤدي تغير المسار البصري بمقدار طول موجي واحد إلى انتقال شرط التداخل بمقدار هذب واحد. ولذلك تقابل الحساسية المذكورة

$$|\Delta D|_{\min} = 10^{-4} \lambda = 10^{-4} (656 \times 10^{-9}) = 6.56 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

وعليه، فإن أصغر إزاحة يمكن كشفها لطرف القضيب هي

$$|\Delta l|_{\min} = 3.28 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

باستخدام A(d)،

$$2|\Delta l| = \frac{\rho l^2 |\Delta g|}{E}.$$

عند عتبة الكشف،

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{E 10^{-4} \lambda}{\rho |\Delta g|}}.$$

يعطي التعويض

$$l_{\min} = \sqrt{\frac{(7.1 \times 10^{10})(10^{-4})(656 \times 10^{-9})}{(2700)(10^{-19})}},$$

ومن ثم

$$\boxed{l_{\min} \simeq 1.31 \times 10^8 \text{ m}}.$$

وبصورة أعم، إذا استجاب القضيبان معاً، تُستبدل Δg في هذا التعبير بالفرق بين تغيري المجال المحوريين ذوي الإشارة على امتدادهما.

A(f)

في التقريب التوافقي الكلاسيكي، تقابل الإزاحة الذرية x طاقة وضع مرونية $\frac{1}{2} \kappa x^2$. ويعطي مبدأ التوزيع المتساوي للطاقة

$$\frac{1}{2} \kappa \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T.$$

وعند ثبات الصلابة الفعالة κ ، تتناسب سعة الاهتزاز المميّزة وفقاً للعلاقة

$$A \propto \sqrt{T}.$$

بما أن $100 \text{ mK} = 0.100 \text{ K}$ ، فإن

$$\frac{A_{\text{cold}}}{A_{\text{warm}}} = \sqrt{\frac{0.100}{300}} = \frac{1}{\sqrt{3000}} = 0.0183.$$

إذاً تنخفض السعة بعامل

$$\boxed{\frac{A_{\text{warm}}}{A_{\text{cold}}} = \sqrt{3000} \simeq 54.8}.$$

يستخدم هذا التقدير الاهتزازات الحرارية الكلاسيكية ويهمل حركة نقطة الصفر الكمومية.

A(g)

لتكن

$$T_i = 4.2 \text{ K}, \quad T_f = 0.100 \text{ K}, \quad s_i = 0.072 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

قانون السعة الحرارية المعطى هو

$$s(T) = s_i \left(\frac{T}{T_i} \right)^3.$$

كمية الحرارة التي يجب سحبها من الكرة هي

$$Q = m \int_{T_f}^{T_i} s(T) dT = \frac{ms_i}{T_i^3} \int_{T_f}^{T_i} T^3 dT.$$

إذاً،

$$Q = \frac{ms_i}{4T_i^3} (T_i^4 - T_f^4) = \frac{ms_i T_i}{4} \left[1 - \left(\frac{T_f}{T_i} \right)^4 \right].$$

عددياً،

$$Q = \frac{(1168)(0.072)(4.2)}{4} \left[1 - \left(\frac{0.100}{4.2} \right)^4 \right] \simeq 88.3 \text{ J}.$$

عند قدرة تبريد متوسطة $P = 1.00 \times 10^{-3} \text{ W}$ ،

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{88.3}{10^{-3}} \text{ s}.$$

ومن ثم

$$\boxed{t \simeq 8.83 \times 10^4 \text{ s} \simeq 24.5 \text{ h}}.$$

B(a)

ليكن التردد عند الانبعاث ν_R . وفقاً للنموذج النيوتني المحدد، ننسب إلى الفوتون كتلة ثقالية مكافئة لطاقته

$$m_\gamma = \frac{h\nu_R}{c^2}.$$

الشغل اللازم لنقل هذه الكتلة من سطح الشمس إلى اللانهاية هو

$$W = \int_R^\infty \frac{GMm_\gamma}{r^2} dr = \frac{GMm_\gamma}{R}.$$

يعطي حفظ الطاقة

$$h\nu_{\infty} = h\nu_R - \frac{GMm_{\gamma}}{R}.$$

بالتعويض بـ $m_{\gamma} = h\nu_R/c^2$

$$h\nu_{\infty} = h\nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right),$$

وبالتالي

$$\boxed{\nu_{\infty} \simeq \nu_R \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right)}.$$

هذه نتيجة من الرتبة الأولى في تقريب المجال الضعيف. ولا يؤدي استخدام طاقة الانبعاث لحساب m_{γ} إلا إلى تصحيحات من رتب أعلى. وبالنسبة إلى الشمس،

$$\frac{GM}{Rc^2} = 2.12 \times 10^{-6} \ll 1,$$

ولذلك فإن التقريب مبرر تماماً.

B(b)

نعرف

$$\epsilon = \frac{GM}{rc^2}, \quad q = 1 - \epsilon.$$

يقابل انخفاض التردد بالعامل q زيادة في الزمن الدوري للساعة بالعامل $1/q$. ووفقاً لقاعدة انكماش الأطوال المعطاة في السؤال، ينخفض مقياس الطول المصاحب بالعامل q .

وعليه، في المقارنة مع الإحداثيات البعيدة المستخدمة في المسألة، تتغير السرعة الفعالة وفقاً للعلاقة

$$\frac{c'_r}{c} \simeq \frac{q}{1/q} = q^2.$$

ويترتب على ذلك أن

$$n_r = \frac{c}{c'_r} \simeq \frac{1}{(1 - \epsilon)^2}.$$

بالتوسيع حتى الرتبة الأولى،

$$(1 - \epsilon)^{-2} = 1 + 2\epsilon + O(\epsilon^2).$$

إذاً،

$$\boxed{n_r \simeq 1 + \frac{2GM}{rc^2}}, \quad \boxed{\alpha = 2}.$$

هنا تمثل c'_r السرعة الإحداثية الفعالة المستخدمة في نموذج معامل الانكسار الوارد في السؤال. أما القياس المحلي باستخدام الأطوال والأزمنة الخاصة، فيظل يعطي سرعة الضوء في الفراغ c .

B(c)

نفترض أن الشعاع الضوئي الوارد ينتشر تقريباً على امتداد الاتجاه x ، بمعامل تصادم b . وعلى امتداد مساره غير المضطرب،

$$y = b, \quad r = \sqrt{x^2 + b^2}.$$

معامل الانكسار هو

$$n(x, y) = 1 + \frac{\alpha GM}{c^2 \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

يعطي قانون سنيل لمعامل انكسار يتغير باستمرار معادلة الشعاع

$$\frac{d}{ds}(n\hat{t}) = \nabla n,$$

حيث $\hat{t}$ متجه الوحدة المماس للشعاع. وانحراف صغير، يكون $ds \simeq dx$ و $n \simeq 1$ ، فتصبح مركبتها العرضية

$$\frac{d\theta}{dx} \simeq \frac{\partial n}{\partial y}.$$

يعطي الاشتقاق

$$\frac{\partial n}{\partial y} = -\frac{\alpha GM y}{c^2 (x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

حتى الرتبة الأولى، يمكن حساب ذلك على امتداد المسار المستقيم $y = b$:

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha GM b}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{3/2}}.$$

باستخدام التكامل المعطى،

$$\Delta\theta = -\frac{\alpha GM b}{c^2} \frac{2}{b^2} = -\frac{2\alpha GM}{bc^2}.$$

تشير الإشارة السالبة إلى انحناء الشعاع باتجاه الشمس. ولشعاع يمر بمحاذاة حافتها، يكون $b \simeq R$ ، ومع $\alpha = 2$ ، نحصل على مقدار الانحراف

$$\theta = \frac{4GM}{Rc^2}.$$

عدديًا،

$$\theta = \frac{4(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})}{(6.95 \times 10^8)(3.00 \times 10^8)^2}.$$

إذاً

$$\boxed{\theta = 8.49 \times 10^{-6} \text{ rad} \quad \text{باتجاه الشمس}}.$$

يساوي ذلك نحو 1.75 ثانية قوسية.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.