

IPhO 1999

理论题与解答 · 意大利帕多瓦 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iphO/1999/

题目 1: 气体对辐射的吸收

一个轴线竖直的圆柱形容器内装有处于热力学平衡状态的分子气体。圆柱体的上底面由一块可以自由移动的玻璃板构成；假设气体不会泄漏，玻璃板与圆柱体侧壁之间的摩擦仅足以使振动衰减，而与所涉及的其他能量相比，摩擦造成的能量损失可以忽略。初始时，气体的温度与周围环境的温度相同。可以很好地将该气体近似为理想气体。假设圆柱体的器壁（包括两个底面）的热导率和热容都很小，因此气体与环境之间的热传递非常缓慢，在本题的求解中可以忽略。

将一台功率恒定的激光器发出的光通过玻璃板射入圆柱体；这种辐射很容易透过空气和玻璃，但会被容器内的气体完全吸收。分子吸收这种辐射后跃迁到激发态，随后迅速发出红外辐射，逐级返回分子基态；然而，这些红外辐射又会被其他分子吸收，并被包括玻璃板在内的容器壁反射。因此，从激光吸收的能量在极短时间内转化为热运动（分子的无规则运动）的能量，此后在足够长的时间内留在气体中。

可以观察到玻璃板向上移动；照射一定时间后，关闭激光器并测量这一位移。

1. 利用下面的数据，以及在必要时利用物理常数表中的数据，计算照射后气体的温度和压强。[2 分]
2. 计算气体因吸收辐射而对外做的机械功。[1 分]
3. 计算照射过程中吸收的辐射能。[2 分]
4. 计算激光器发出的、被气体吸收的功率，以及相应的单位时间内的光子数（也就是基本吸收过程的次数）。[1.5 分]
5. 计算光能转化为玻璃板机械势能增量的效率。[1 分]

随后，将圆柱体的轴线缓慢转动 90° ，使其变为水平方向。气体与容器之间的热交换仍可忽略。

6. 说明这种转动是否会使气体的压强和/或温度发生变化；如果会，求出变化后的数值。[2.5 分]

数据

室内压强: $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

室内温度: $T_0 = 20.0^\circ\text{C}$

圆柱体内径: $2r = 100 \text{ mm}$

玻璃板质量: $m = 800 \text{ g}$

容器内气体的物质的量: $n = 0.100 \text{ mol}$

气体的定容摩尔热容: $c_V = 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

激光器的发射波长: $\lambda = 514 \text{ nm}$

照射时间: $\Delta t = 10.0 \text{ s}$

照射后可动玻璃板的位移: $\Delta s = 30.0 \text{ mm}$

物理常数和通用数据

除了各题题干给出的数值数据外，了解一些通用数据和物理常数也可能有所帮助，下表列出了这些数据。这些数值几乎是目前可获得的最精确数据，因此位数较多；不过，作答时应根据各题的情况，采用适当的有效数字位数。

真空中的光速： $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

真空磁导率： $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

真空介电常数： $\varepsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

万有引力常数： $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

气体常数： $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

玻尔兹曼常数： $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

斯特藩常数： $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

质子电荷： $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

电子质量： $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

普朗克常数： $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

摄氏温标零点对应的热力学温度： $T_K = 273.15 \text{ K}$

太阳质量： $M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

地球质量： $M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

地球平均半径： $r_E = 6.373 \text{ Mm}$

地球轨道半长轴： $R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$

恒星日： $d_S = 86.16406 \text{ ks}$

年： $y = 31.558150 \text{ Ms}$

地球表面重力场强度的标准值： $g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

海平面大气压强的标准值： $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

标准压强、 15°C 时空气对可见光的折射率： $n_{\text{air}} = 1.000277$

太阳常数： $S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

木星质量： $M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

木星赤道半径： $R_B = 69.8 \text{ Mm}$

木星轨道平均半径： $R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$

木星日： $d_J = 35.6 \text{ ks}$

木星年： $y_J = 374.32 \text{ Ms}$

π ：3.14159265

题目译自官方英文原文。

答案

1. 照射后：

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ\text{C}, \quad p_1 = 102.3 \text{ kPa.}$$

2. 气体所做的机械功：

$$W = 24.1 \text{ J.}$$

3. 吸收的辐射能：

$$E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J.}$$

4. 吸收的激光功率和光子吸收速率:

$$P_{\text{abs}} = 8.44 \text{ W}, \quad \dot{N} = 2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}.$$

5. 转化为玻璃板重力势能增量的效率:

$$\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%.$$

6. 压强和温度均降低。转动后:

$$p_2 = 101.3 \text{ kPa}, \quad T_2 = 321.2 \text{ K} = 48.1^\circ\text{C}.$$

解答

采用理想气体近似和题给的恒定摩尔热容, 并忽略热量散失及摩擦造成的能量损失。初态和末态均无宏观动能。下文使用的室内压强为本题给定的数值 $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$ 。

圆柱体的横截面积和由测量得到的体积增量为

$$A = \pi r^2 = \pi(0.0500)^2 = 7.85398 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \\ \Delta V = A\Delta s = (7.85398 \times 10^{-3})(0.0300) = 2.35619 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

1. 照射后的温度和压强

在竖直方向的力学平衡状态下, 气体向上的作用力与大气压力及玻璃板的重力平衡:

$$p_1 A = p_0 A + mg.$$

因此

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{A} = 101300 + \frac{(0.800)(9.80665)}{7.85398 \times 10^{-3}} = 102298.9 \text{ Pa}.$$

照射前也满足相同的平衡条件, 因此气体的初态和末态压强相等:

$$p_1 = 102.3 \text{ kPa}.$$

设 V_0 和 V_1 分别为照射前后气体的体积。对这两个状态分别应用理想气体状态方程, 得到

$$p_1 V_0 = nRT_0, \quad p_1 V_1 = nRT_1.$$

相减得

$$p_1 \Delta V = nR(T_1 - T_0).$$

代入 $T_0 = 293.15 \text{ K}$, 得

$$T_1 - T_0 = \frac{(102298.9)(2.35619 \times 10^{-4})}{(0.100)(8.314510)} = 28.9898 \text{ K}.$$

因此

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ\text{C}.$$

2. 气体所做的机械功

阻碍玻璃板运动的力 $p_0 A + mg$ 恒定。摩擦损失可忽略, 且玻璃板初态和末态的动能均为零, 因此气体所做的功为

$$W = (p_0 A + mg)\Delta s = p_0 \Delta V + mg\Delta s = p_1 \Delta V.$$

代入数值得

$$W = (102298.9)(2.35619 \times 10^{-4}) = 24.1036 \text{ J},$$

所以

$$\boxed{W = 24.1 \text{ J.}}$$

其中，克服大气压力所做的功为 23.8683 J，抬升玻璃板所做的功为 0.235360 J。

3. 吸收的辐射能

吸收的辐射能迅速转化为热运动的能量。取气体对外做功为正，由能量守恒得

$$E_{\text{abs}} = \Delta U + W.$$

对于理想气体，

$$\Delta U = nc_V(T_1 - T_0) = (0.100)(20.8)(28.9898) = 60.2988 \text{ J}.$$

因此，

$$E_{\text{abs}} = 60.2988 + 24.1036 = 84.4024 \text{ J},$$

即

$$\boxed{E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J.}}$$

等价地，由于 $W = nR(T_1 - T_0)$ ，有

$$E_{\text{abs}} = n(c_V + R)(T_1 - T_0) = nc_P(T_1 - T_0),$$

其中

$$c_P = c_V + R = 29.114510 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}.$$

4. 吸收的功率和光子吸收速率

激光功率恒定，因此

$$P_{\text{abs}} = \frac{E_{\text{abs}}}{\Delta t} = \frac{84.4024}{10.0} = \boxed{8.44 \text{ W}}.$$

每个入射激光光子的能量为

$$\varepsilon_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.6260755 \times 10^{-34})(299792458)}{514 \times 10^{-9}} = 3.86468 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

所有进入气体的入射激光光子都被吸收，因此其吸收速率为

$$\dot{N} = \frac{P_{\text{abs}}}{\varepsilon_\gamma} = \frac{8.44024}{3.86468 \times 10^{-19}} = \boxed{2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}}.$$

这也是激光光子的基本吸收事件发生的速率。

5. 转化为玻璃板势能的效率

玻璃板的重力势能增量为

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg\Delta s = (0.800)(9.80665)(0.0300) = 0.235360 \text{ J}.$$

因此，所求效率为

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{E_{\text{abs}}} = \frac{0.235360}{84.4024} = 2.78854 \times 10^{-3}.$$

所以

$$\boxed{\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%}.$$

这一效率很低，反映出能量还用于加热气体和推开周围大气。

6. 转动后的压强和温度

设 θ 为圆柱体轴线与竖直向上方向之间的夹角。在缓慢转动过程中，由轴向力学平衡得

$$p(\theta)A = p_0A + mg \cos \theta,$$

所以

$$p(\theta) = p_0 + \frac{mg}{A} \cos \theta.$$

当 $\theta = 90^\circ$ 时，玻璃板的重力没有轴向分量。因此

$$p_2 = p_0 = 101.3 \text{ kPa}.$$

转动过程缓慢，且热交换和摩擦耗散均可忽略。因此，气体经历准静态绝热膨胀。由热力学第一定律得

$$nc_V dT = -p dV.$$

利用 $p = nRT/V$ ，得

$$c_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}.$$

积分得

$$TV^{R/c_V} = \text{常数},$$

或者，定义

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1.399736,$$
$$TV^{\gamma-1} = \text{常数}.$$

利用理想气体状态方程消去体积，得

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{R/(c_V+R)}.$$

因此

$$T_2 = 322.1398 \left(\frac{101300}{102298.9} \right)^{8.314510/29.114510} = 321.2384 \text{ K}.$$

所以

$$T_2 = 321.2 \text{ K} = 48.1^\circ\text{C}.$$

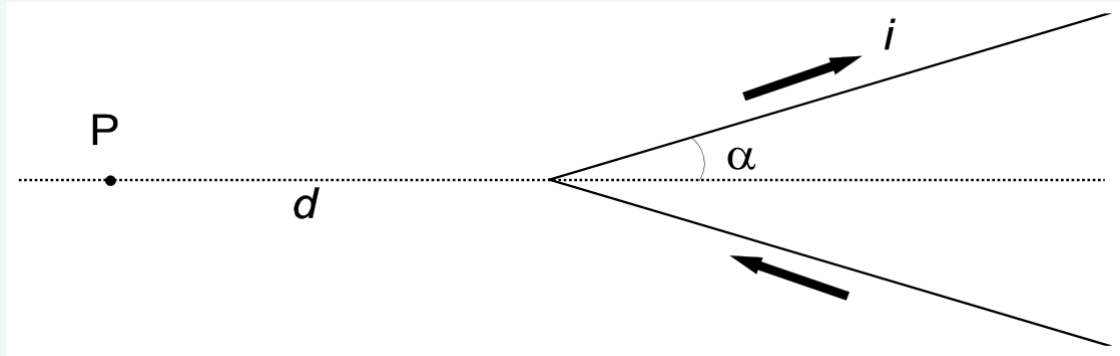
压强和温度均降低；温度下降约 0.90 K，因为膨胀的气体消耗内能对外做功。

解答已与官方解答核对。

题目 2：V 形导线产生的磁场

安培对磁现象的解释所取得的最早成果之一，是计算载流导线产生的磁场 $\mathbf{B}$ ，并与毕奥和萨伐尔最初提出的早期假设进行比较。

一个特别有趣的情形是：一根很长的细导线由两段直线部分组成，弯成“V”形，夹角的一半¹为 α ，其中通有恒定电流 i （见图）。根据安培的计算，在“V”形外部的对称轴上、距顶点为 d 的给定点 P 处，磁场的大小 B 与 $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 成正比。安培的工作后来被纳入麦克斯韦电磁理论，并得到普遍认可。



运用我们现今的电磁学知识，

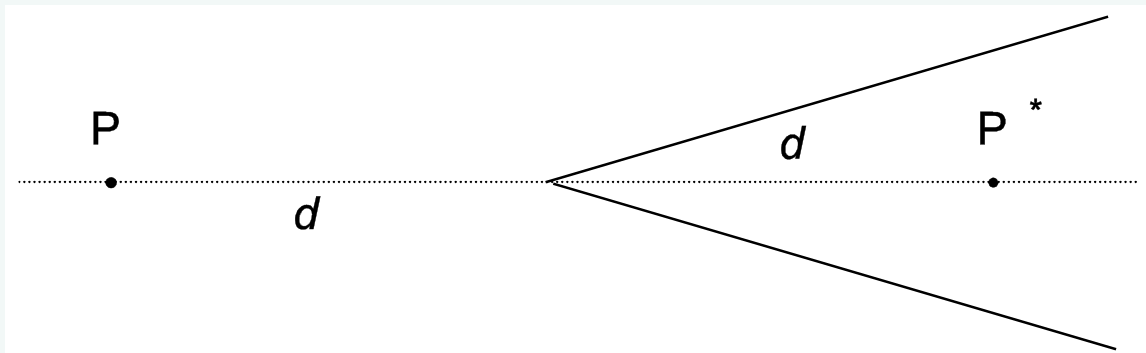
1. 求 P 点处磁场 $\mathbf{B}$ 的方向。[1 分]
2. 已知磁场与 $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 成正比，求下式中的比例系数 k ：

$$|\mathbf{B}(P)| = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

[1.5 分]

3. 计算与 P 关于顶点对称的 P^* 点处的磁场 $\mathbf{B}$ ，即该点同样位于对称轴上，距顶点的距离也为 d ，但位于“V”形内部（见图）。[2 分]

¹ 本题中 α 均以弧度表示



4. 为了测量磁场，我们在 P 点放置一根转动惯量为 I 、磁偶极矩为 μ 的小磁针；它在包含 $\mathbf{B}$ 方向的平面内绕一个固定点振动。求该磁针的小振动周期与 B 的函数关系。[2.5 分]

在相同条件下，毕奥和萨伐尔却曾假设 P 点处的磁场可能为（这里采用现代记号） $B(P) = \frac{i\mu_0\alpha}{\pi^2 d}$ ，其中 μ_0 为真空磁导率。事实上，他们曾尝试通过实验测量磁针振动周期随“V”形夹角的变化关系，以判定这两种解释（安培的解释与毕奥和萨伐尔的解释）孰是孰非。然而，对于某些 α 值，两者的差异太小，难以测量。

5. 如果为了在实验上区分 P 点处磁针振动周期 T 的两种预测，我们需要至少 10% 的差异，即 $T_1 > 1.10 T_2$ （ T_1 为安培的预测， T_2 为毕奥—萨伐尔的预测），请指出，要能判别这两种解释，“V”形夹角的一半 α 大致应选在哪个范围内。[3 分]

提示

根据你所采用的解题方法，下列三角恒等式可能有用：

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

物理常量和一般数据

除各题题干中给出的数值数据外，一些一般数据和物理常量也可能有用，可在下列数据中查找。这些数据几乎是目前能获得的最精确数据，因此保留了较多位数；不过，你应根据各题的具体情况，以适当的位数写出结果。

真空中的光速： $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

真空磁导率： $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

真空介电常数： $\varepsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

万有引力常量： $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

气体常量： $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

玻尔兹曼常量： $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

斯特藩常量： $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

质子电荷： $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

电子质量： $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

普朗克常量： $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

摄氏温标零点对应的热力学温度： $T_K = 273.15 \text{ K}$

太阳质量： $M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

地球质量： $M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

地球平均半径： $r_E = 6.373 \text{ Mm}$

地球轨道半长轴： $R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$

恒星日： $d_S = 86.16406 \text{ ks}$

年： $y = 31.558150 \text{ Ms}$

地球表面重力场强的标准值： $g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

海平面气压的标准值： $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

标准气压和 15°C 下空气对可见光的折射率： $n_{\text{air}} = 1.000277$

太阳常量： $S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

木星质量： $M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

木星赤道半径： $R_B = 69.8 \text{ Mm}$

木星轨道平均半径： $R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$

木星日： $d_J = 35.6 \text{ ks}$

木星年： $y_J = 374.32 \text{ Ms}$

π : 3.14159265

题目译自官方英文原文。

答案

令 $\hat{z}$ 指向纸外，即朝向读者，并令 $\mu = |\boldsymbol{\mu}|$ 。

1. P 点处的磁场垂直于导线所在平面，指向纸外。

2.

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

3.

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}},$$

方向指向纸内。

4.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

5. 对于题目给出的严格不等式 $T_1 > 1.10T_2$,

$$0 < \alpha < \alpha_c, \quad \alpha_c \simeq 0.768 \text{ rad} \simeq 44.0^\circ.$$

当 $\alpha = \alpha_c$ 时, 差异恰好为 10%。

解答

将两条细长的臂视为真空中的半无限长直导线。如图所示, 电流沿下臂流入顶点, 再沿上臂流出。取顶点为原点, x 轴正方向指向 V 形内部, $\hat{\mathbf{z}}$ 指向纸外。

1. P 点处磁场的方向

现代的毕奥—萨伐尔定律为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

其中, $d\boldsymbol{\ell}$ 沿电流方向, $\mathbf{R}$ 从电流元指向观察点。

这两个矢量都位于图示平面内, 因此每个电流元产生的磁场都垂直于该平面。在 P 点, 根据右手定则, 两臂产生的磁场均指向纸外: 下臂中的电流流向顶点, 而上臂中的电流背离顶点流动。因此, 两者的磁场相加:

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) \text{ 指向纸外.}$$

2. 确定 k

题目已给出磁场对角度的依赖关系:

$$B(\mathbf{P}) = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

考虑 $\alpha = \pi/2$ 的极限构型。此时两臂构成一根无限长直导线, P 点到导线的垂直距离为 d 。

对于这根直导线, 由柱对称性和安培环路定理可得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B(2\pi d) = \mu_0 i.$$

因此,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

由于 $\tan(\pi/4) = 1$, 由此确定

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

代入给定的磁导率,

$$k = (2 \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}) \frac{i}{d}.$$

所以,

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

3. $\mathbf{P}^*$ 点处的磁场

在 $\mathbf{P}^*$ 点, 根据右手定则, 原有两臂各自产生的磁场均指向纸内。

为求其大小, 将两臂分别穿过顶点延长, 并保持各自的电流方向, 使每条臂都成为一根无限长直导线。 $\mathbf{P}^*$ 到任意一根延长后的完整导线的垂直距离为

$$\rho = d \sin \alpha.$$

每根完整导线产生的磁场都指向纸内, 其大小为

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi \rho}.$$

因此, 它们的总磁场大小为

$$B_{\text{complete}} = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

新增的两条半直线构成一个开口向左的 V 形, 它是原导线的镜像。相对于这个新增的 V 形, $\mathbf{P}^*$ 是其外部对称轴上距顶点为 d 的点。因此, 新增部分在该点产生的磁场大小为 $B(\mathbf{P})$, 根据右手定则, 其方向也指向纸内。

由叠加原理可得

$$B(\mathbf{P}^*) + B(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

代入第 2 问的结果,

$$B(\mathbf{P}^*) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \left[\frac{2}{\sin \alpha} - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right].$$

利用

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

方括号内的表达式变为

$$\frac{2 - (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

于是

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

4. 小振动周期

将小磁针视为磁偶极子, 认为磁场在其长度范围内均匀, 并忽略阻尼及其他力矩。令 θ 为磁针的磁矩与磁场之间的夹角。

磁力矩为

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}.$$

当 $\boldsymbol{\mu}$ 与 $\mathbf{B}$ 同向平行时，平衡是稳定的。以 θ 表示相对于这一平衡位置的角位移，转动运动方程为

$$I\ddot{\theta} = -\mu B \sin \theta.$$

对于小振动， $|\theta| \ll 1 \text{ rad}$ ，且 $\sin \theta \simeq \theta$ ，因此

$$\ddot{\theta} + \frac{\mu B}{I} \theta = 0.$$

这是简谐运动，其角频率为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu B}{I}},$$

因而

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

当 I 、 μ 和 B 均采用国际单位制单位时，周期的单位为秒。

5. 使周期差异大于 10% 的角度范围

对 P 点处磁场的两种预测为

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad B_2 = \frac{\mu_0 i \alpha}{\pi^2 d},$$

其中，第二个表达式是题目引用的历史假设。

由于 $T \propto B^{-1/2}$ ，

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)}}.$$

实验要求化为

$$\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)} > 1.10^2 = 1.21.$$

周期之比随 α 增大而减小。为验证这一点，令 $x = \alpha/2$ ；周期之比的平方正比于 $x \cot x$ ，且

$$\frac{d}{dx}(x \cot x) = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} < 0,$$

这是因为，对于所考虑的正角度，有 $\sin(2x) < 2x$ 。

其极限值为

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \simeq 1.1284, \quad \left. \frac{T_1}{T_2} \right|_{\alpha=\pi/2} = 1.$$

因此，可区分与不可区分的范围由唯一的临界值分隔。

对方程

$$\frac{2\alpha_c}{\pi \tan(\alpha_c/2)} = 1.21$$

进行数值求解，得到

$$\alpha_c \simeq 0.7682 \text{ rad} \simeq 44.01^\circ.$$

因此，所需的半夹角近似满足

$$0 < \alpha < 0.77 \text{ rad} \quad (\text{约小于 } 44^\circ) .$$

如果将“至少 10%”理解为包含等号，则应包含精确的临界值；题目明确写出的严格不等式则不包含该值。退化情形 $\alpha = 0$ 也应排除，因为此时两种磁场均为零，不存在有限的磁针振动周期。

解答已与官方解答核对。

题目 3：飞往木星的空间探测器

本题讨论一种常用于使空间探测器沿所需方向加速的方法。空间探测器飞掠一颗行星时，可以从行星的轨道运动中获取极少量的能量，从而显著提高自身的速率，并大幅改变飞行方向。这里，我们分析空间探测器经过木星附近时的这一效应。

木星沿椭圆轨道绕太阳运行，该轨道可以近似为半径等于平均轨道半径 R 的圆；为了进一步分析这一物理情境，我们首先需要：

1. 求木星沿绕日轨道运行的速率 V 。[1.5 分]
2. 当探测器位于太阳与木星之间（在太阳—木星连线上）时，求太阳与木星对探测器的引力相平衡的位置到木星的距离。[1 分]

一艘质量为 $m = 825 \text{ kg}$ 的空间探测器飞掠木星。为简化问题，假设探测器的轨迹完全位于木星轨道平面内；这样，我们就忽略了探测器被抛出木星轨道平面这一重要情形。

我们只考虑木星引力远大于其他所有引力的区域内所发生的情况。

在太阳质心参考系中，空间探测器的初始速率为 $v_0 = 1.00 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ （沿 y 轴正方向），而木星的速度沿 x 轴负方向（见图 1）；这里的“初始速率”是指探测器处于行星际空间中、仍远离木星，但已进入太阳引力相对于木星引力可以忽略的区域时的速率。我们假设交会过程的持续时间足够短，可以忽略木星沿绕日轨道运动时方向的变化。还假设探测器从木星后方经过，即当探测器与木星的 y 坐标相同时，探测器的 x 坐标大于木星的 x 坐标。

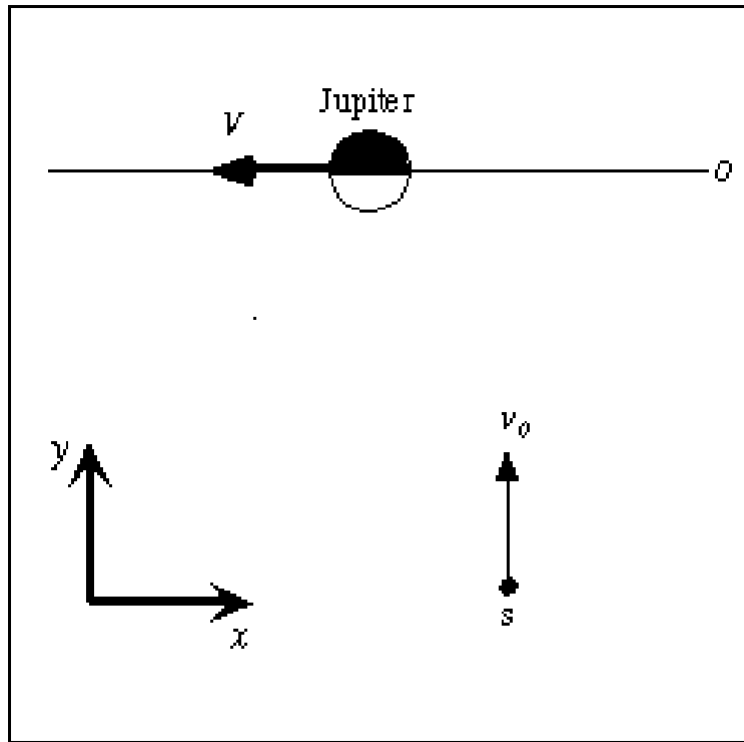


图 1: 太阳质心参考系中的示意图。O 表示木星轨道，s 表示空间探测器。

3. 求探测器仍远离木星时，在木星参考系中的运动方向（用其运动方向与 x 轴之间的夹角 φ 表示）和速率 v' 。[2 分]
4. 求探测器在木星参考系中的总机械能 E 。按照惯例，将极远处的势能取为零；这里的极远处是指距离足够远、所有引力相互作用都很微弱，以致探测器几乎以恒定速度运动的位置。[1 分]

在木星参考系中，探测器的轨迹是一条双曲线，其在该参考系中的极坐标方程为

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right). \quad (1)$$

其中， b 是一条渐近线与木星之间的距离（即所谓的**碰撞参数**）， E 是探测器在木星参考系中的总机械能， G 是引力常量， M 是木星的质量， r 和 θ 是极坐标（径向距离和极角）。

图 2 给出了方程 (1) 所描述的双曲线的两支，同时标出了渐近线和极坐标。注意，方程 (1) 的原点位于双曲线的“吸引焦点”。探测器的轨迹是吸引力作用下的轨迹（图中加粗的一支）。

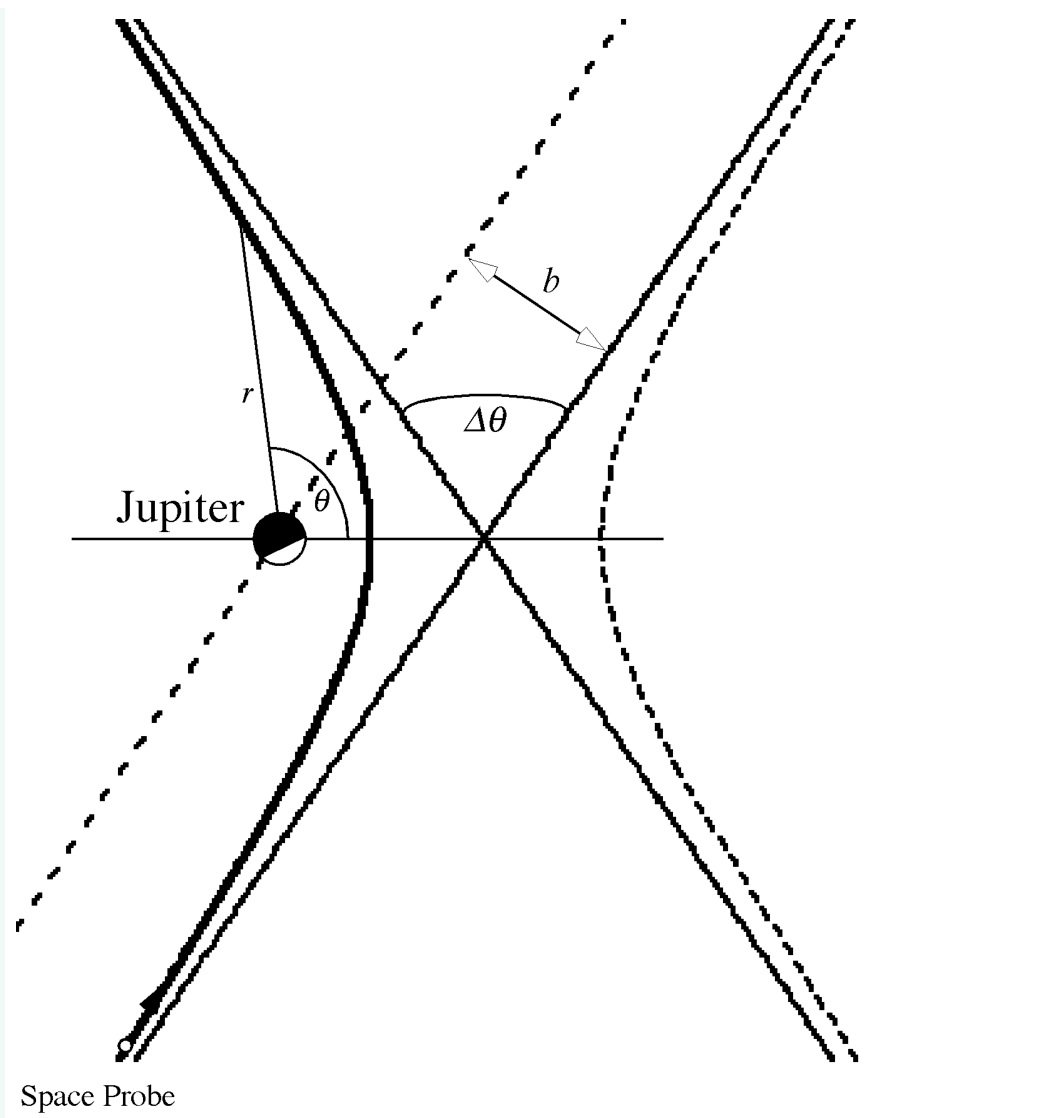


图 2

5. 利用描述探测器轨迹的方程 (1)，求木星参考系中的总偏转角 $\Delta\theta$ (如图 2 所示)，并将其表示为初始速率 v' 和碰撞参数 b 的函数。[2 分]
6. 假设探测器经过木星时，到木星中心的距离不能小于木星半径的三倍；求可能的最小碰撞参数和最大偏转角。[1 分]
7. 求探测器在太阳参考系中的最终速率 v'' 的表达式，使其仅为木星速率 V 、探测器初始速率 v_0 和偏转角 $\Delta\theta$ 的函数。[1 分]
8. 利用上一问的结果，求偏转角达到可能的最大值时，探测器在太阳参考系中的最终速率 v'' 的数值。[0.5 分]

提示

根据你所采用的解题方法，以下三角公式可能有所帮助：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

物理常量和通用数据

除各题正文中给出的数值数据外，一些通用数据和物理常量也可能有用，可在下表中查找。这些数据几乎是目前可获得的最精确数据，因此给出了较多位数；不过，你应根据各题的具体情况，选用适当的位数表示结果。

真空中的光速：	$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
真空磁导率：	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
真空介电常数：	$\varepsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$
引力常量：	$G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
气体常量：	$R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
玻尔兹曼常量：	$k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
斯特藩常量：	$\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
质子电荷量：	$e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
电子质量：	$m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
普朗克常量：	$h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
摄氏温标零点对应的热力学温度：	$T_K = 273.15 \text{ K}$
太阳质量：	$M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
地球质量：	$M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
地球平均半径：	$r_E = 6.373 \text{ Mm}$
地球轨道半长轴：	$R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$
恒星日：	$d_S = 86.16406 \text{ ks}$
年：	$y = 31.558150 \text{ Ms}$
地球表面重力场强度的标准值：	$g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
海平面大气压的标准值：	$p_0 = 101325 \text{ Pa}$
标准气压、15 °C 时空气对可见光的折射率：	$n_{\text{air}} = 1.000277$
太阳常量：	$S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
木星质量：	$M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
木星赤道半径：	$R_B = 69.8 \text{ Mm}$
木星轨道平均半径：	$R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$
木星日：	$d_J = 35.6 \text{ ks}$
木星年：	$y_J = 374.32 \text{ Ms}$
π ：	3.14159265

题目译自官方英文原文。

答案

1. 木星的轨道速率为

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \simeq 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

2. 从木星朝向太阳方向量取的距离为

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_S/M}} \simeq 2.33 \times 10^{10} \text{ m}.$$

3. 在木星参考系中的初始速度为 $\mathbf{v}'_i = (V, v_0)$ 。因此

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{V}\right) = 37.4^\circ, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2} = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

该角度从 x 轴正方向起逆时针量取。

4. 在木星参考系中的总机械能为

$$E = \frac{1}{2}m(V^2 + v_0^2) = 1.12 \times 10^{11} \text{ J}.$$

5. 偏转角为

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{GM}{bv'^2}\right).$$

6. 取 $r_0 = 3R_B$, 有

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}} = 4.90 \times 10^8 \text{ m},$$

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{1 + r_0 v'^2/(GM)}\right) = 87.4^\circ \simeq 1.53 \text{ rad}.$$

7. 在太阳参考系中的最终速率为

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2Vv_0 \sin \Delta\theta}.$$

8. 在允许的最大偏转角下,

$$v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.$$

解答

我们采用牛顿引力理论以及题目中指定的近似。木星的轨道为圆形，且在交会过程中，其速度可视为恒定。与木星质量相比，探测器的质量可以忽略。飞掠过程中忽略太阳的引力，因此将木星参考系视为惯性系，探测器在以下势能场中运动：

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

初始速度和最终速度均指这一二体近似中的渐近速度。数值计算保留未经舍入的中间值。

1. 木星的轨道速率

太阳的引力提供木星的向心力：

$$\frac{GM_{\text{S}}M}{R^2} = \frac{MV^2}{R}.$$

因此

$$V = \sqrt{\frac{GM_{\text{S}}}{R}}.$$

利用给定的常量，

$$V = \sqrt{\frac{(6.67259 \times 10^{-11})(1.991 \times 10^{30})}{7.783 \times 10^{11}}} = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

于是

$$\boxed{V = 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.}$$

也可以用圆轨道公式 $V = 2\pi R/y_{\text{J}}$ 计算，得到 $1.30642 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ ，在所报告的精度下与上述结果一致。

2. 引力平衡点

设 d 为从木星朝向太阳方向量取的距离，则到太阳的距离为 $R - d$ 。两个引力的方向相反，因此平衡条件为

$$\frac{GMm}{d^2} = \frac{GM_{\text{S}}m}{(R - d)^2}.$$

两边取正平方根，得

$$\frac{R - d}{d} = \sqrt{\frac{M_{\text{S}}}{M}}.$$

解得

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_{\text{S}}/M}}.$$

代入数值得

$$d = \frac{7.783 \times 10^{11}}{1 + \sqrt{(1.991 \times 10^{30})/(1.901 \times 10^{27})}} = 2.33285 \times 10^{10} \text{ m}.$$

因此

$$\boxed{d = 2.33 \times 10^{10} \text{ m}.}$$

3. 木星参考系中的初始运动

在太阳参考系中，初始速度分别为

$$\mathbf{v}_{\text{i}} = v_0 \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{V}_{\text{J}} = -V \hat{\mathbf{x}}.$$

由伽利略速度变换得

$$\mathbf{v}'_{\text{i}} = \mathbf{v}_{\text{i}} - \mathbf{V}_{\text{J}} = V \hat{\mathbf{x}} + v_0 \hat{\mathbf{y}}.$$

两个分量均为正，因此速度方向位于第一象限：

$$\tan \varphi = \frac{v_0}{V}, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2}.$$

代入数值得

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{1.00 \times 10^4}{1.30650 \times 10^4} \right) = 37.4306^\circ,$$

$$v' = \sqrt{(1.30650 \times 10^4)^2 + (1.00 \times 10^4)^2} = 1.64528 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

于是

$$\boxed{\varphi = 37.4^\circ, \quad v' = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.}$$

4. 木星参考系中的总机械能

在无限远处势能为零。因此，守恒的总能量等于初始渐近动能：

$$E = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m (V^2 + v_0^2).$$

代入得

$$E = \frac{1}{2} (825) (1.64528 \times 10^4)^2 = 1.11661 \times 10^{11} \text{ J}.$$

因此

$$\boxed{E = 1.12 \times 10^{11} \text{ J}.}$$

该值为正，与非束缚的双曲线轨道相符。

5. 偏转角

利用 $E = \frac{1}{2} m v'^2$ ，将方程 (1) 写成

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

其中

$$p = \frac{v'^2 b^2}{GM}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2 v'^4}{G^2 M^2}} > 1.$$

趋近任一渐近线时， $r \rightarrow \infty$ ，因此

$$1 + e \cos \theta = 0.$$

设渐近极角为 $\pm \theta_\infty$ ，其中

$$\cos \theta_\infty = -\frac{1}{e}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta_\infty < \pi.$$

在入射渐近线上，速度方向与径向相反。因此，其相对于近心点轴的角度为 $\pi - \theta_\infty$ 。在出射渐近线上，速度沿径向，其角度为 θ_∞ 。两者之差为

$$\Delta \theta = \theta_\infty - (\pi - \theta_\infty) = 2\theta_\infty - \pi.$$

由此可得

$$\sin \frac{\Delta \theta}{2} = \sin \left(\theta_\infty - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \theta_\infty = \frac{1}{e}.$$

由于 $0 < \Delta\theta/2 < \pi/2$,

$$\tan \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{GM}{bv'^2}.$$

于是

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{bv'^2} \right).$$

等价地,

$$\Delta\theta = 2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + b^2 v'^4 / (G^2 M^2)}} \right].$$

6. 最小碰撞参数和最大偏转角

设 r_p 为到木星中心的最近距离, v_p 为该处的速率。由能量守恒得

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2}mv'^2,$$

所以

$$v_p^2 = v'^2 + \frac{2GM}{r_p}.$$

该力为有心力, 因此相对于木星的角动量守恒。在最近点处, 速度与径向垂直:

$$mbv' = mr_p v_p.$$

两边平方, 并代入能量守恒的结果, 得

$$b^2 v'^2 = r_p^2 \left(v'^2 + \frac{2GM}{r_p} \right),$$

由此得到

$$b^2 = r_p^2 + \frac{2GM r_p}{v'^2}.$$

该表达式随 r_p 增大而增大。因此, 允许的最小碰撞参数对应于

$$r_p = r_0 = 3R_B = 3(69.8 \times 10^6) \text{ m}.$$

因此

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}}.$$

利用

$$GM = 1.268459359 \times 10^{17} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2},$$

得到

$$b_{\min} = 4.89996 \times 10^8 \text{ m},$$

即

$$b_{\min} = 4.90 \times 10^8 \text{ m}.$$

偏转角随 b 增大而减小, 因此其最大值在 $b_{\min}$ 处取得。于是

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{b_{\min} v'^2} \right).$$

为了直接用最近距离表示这一结果，将 $b_{\min}^2$ 的关系式代入离心率表达式：

$$e_{\min}^2 = 1 + \frac{b_{\min}^2 v'^4}{G^2 M^2} = \left(1 + \frac{r_0 v'^2}{GM} \right)^2.$$

因此

$$e_{\min} = 1 + \frac{r_0 v'^2}{GM} = 1.44687$$

且

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{e_{\min}} \right) = 1.52615 \text{ rad} = 87.4421^\circ.$$

因此

$$\boxed{\Delta\theta_{\max} = 87.4^\circ.}$$

7. 太阳参考系中的最终速率

木星参考系中的能量守恒保证了出射渐近速率仍为 v' 。

由于探测器从木星后方经过，引力造成的偏转使其速度在给定的 x, y 坐标系中逆时针转动。因此，出射相对速度与 x 轴正方向的夹角为 $\varphi + \Delta\theta$ ：

$$\mathbf{v}'_f = v' \cos(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{x}} + v' \sin(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{y}}.$$

利用

$$v' \cos \varphi = V, \quad v' \sin \varphi = v_0,$$

由和角公式得

$$v'_{f,x} = V \cos \Delta\theta - v_0 \sin \Delta\theta,$$

$$v'_{f,y} = V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta.$$

变换回太阳参考系时，需要加上木星的速度 $-V\hat{\mathbf{x}}$ ：

$$v''_x = V(\cos \Delta\theta - 1) - v_0 \sin \Delta\theta,$$

$$v''_y = V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta.$$

因此

$$\begin{aligned} v''^2 &= (v''_x)^2 + (v''_y)^2 \\ &= V^2 [(\cos \Delta\theta - 1)^2 + \sin^2 \Delta\theta] \\ &\quad + v_0^2 [\sin^2 \Delta\theta + \cos^2 \Delta\theta] + 2Vv_0 \sin \Delta\theta \\ &= 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + v_0^2 + 2Vv_0 \sin \Delta\theta. \end{aligned}$$

于是所求表达式为

$$\boxed{v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2Vv_0 \sin \Delta\theta}.}$$

作为一致性检验，令 $\Delta\theta = 0$ ，可得 $v'' = v_0$ 。

8. 最大偏转角下的最终速率

代入未经舍入的数值

$$V = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad v_0 = 1.00 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad \Delta\theta_{\max} = 1.52615 \text{ rad},$$

得到

$$\begin{aligned} v'' &= \left[(1.00 \times 10^4)^2 + 2(1.30650 \times 10^4)^2(1 - \cos 1.52615) \right. \\ &\quad \left. + 2(1.30650 \times 10^4)(1.00 \times 10^4) \sin 1.52615 \right]^{1/2} \\ &= 2.62144 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

因此

$$v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.$$

木星引力改变了探测器在木星参考系中的渐近速度方向。这一变化使探测器在太阳参考系中的速率和动能增加，所需能量来自木星轨道能量微不足道的减少。

解答已与官方解答核对。