

IPhO 1999

Teorik sorular ve çözümler · Padova, İtalya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1999/

Soru 1: Işınlamanın bir gaz tarafından soğurulması

Ekseni düşey olan silindirik bir kap, termodinamik dengede bulunan moleküler bir gaz içermektedir. Silindirin üst tabanı serbestçe hareket edebilen bir cam levhadan yapılmıştır; gaz sızıntısı olmadığını ve cam levha ile silindirin duvarları arasındaki sürtünmenin salınımları sönümlemeye yetecek kadar olduğunu, ancak söz konusu diğer enerjilere kıyasla kayda değer bir enerji kaybına yol açmadığını varsayalım. Başlangıçta gazın sıcaklığı, çevresindeki ortamın sıcaklığına eşittir. Gaz, iyi bir yaklaşıklıkla ideal kabul edilebilir. Silindirin duvarlarının (tabanlar dâhil) ısı iletkenliğinin ve ısı kapasitesinin çok düşük olduğunu, dolayısıyla gaz ile ortam arasındaki ısı aktarımının çok yavaş gerçekleştiğini ve bu sorunun çözümünde ihmal edilebileceğini varsayalım.

Sabit güçlü bir lazerin yaydığı ışığı cam levhadan geçirerek silindirin içine gönderiyoruz; bu ışınlama hava ve camdan kolayca geçmekte, ancak kabın içindeki gaz tarafından tamamen soğurulmaktadır. Bu ışınlama soğuran moleküller uyarılmış durumlara geçer; bu durumlarda hızla kızılötesi ışınlama yayarak basamaklar hâlinde moleküler temel duruma dönerler. Ancak bu kızılötesi ışınlama, başka moleküller tarafından yeniden soğurulur ve cam levha da dâhil olmak üzere kabın duvarlarından yansır. Dolayısıyla lazerden soğurulan enerji çok kısa bir sürede ısı hareketine (moleküler kaosa) aktarılır ve ardından yeterince uzun bir süre gazın içinde kalır.

Cam levhanın yukarı doğru hareket ettiğini gözlemliyoruz; belirli bir ışınlama süresinin ardından lazeri kapatıyor ve bu yer değiştirmeyi ölçüyoruz.

1. Aşağıdaki verileri ve gerekirse fiziksel sabitler sayfasındaki verileri kullanarak ışınlama sonrasında gazın sıcaklığını ve basıncını hesaplayınız. [2 puan]
2. Işınlamanın soğurulması sonucunda gazın yaptığı mekanik işi hesaplayınız. [1 puan]
3. Işınlama sırasında soğurulan ışınlama enerjisini hesaplayınız. [2 puan]
4. Lazerin yaydığı gücün gaz tarafından soğurulan kısmını ve buna karşılık gelen birim zamandaki foton sayısını (dolayısıyla temel soğurma süreçlerinin sayısını) hesaplayınız. [1.5 puan]
5. Optik enerjinin cam levhanın mekanik potansiyel enerjisindeki değişime dönüştürülmesi sürecinin verimini hesaplayınız. [1 puan]

Ardından silindirin ekseni yavaşça 90° döndürülerek yatay doğrultuya getirilir. Gaz ile kap arasındaki ısı alışverişi yine ihmal edilebilir.

6. Böyle bir döndürme sonucunda gazın basıncının ve/veya sıcaklığının değişip değişmediğini ve değişiyorsa yeni değerinin/değerlerinin ne olduğunu belirtiniz. [2.5 puan]

Veriler

Ortam basıncı: $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

Ortam sıcaklığı: $T_0 = 20.0^\circ\text{C}$

Silindirin iç çapı: $2r = 100 \text{ mm}$

Cam levhanın kütlesi: $m = 800 \text{ g}$

Kap içindeki gazın madde miktarı: $n = 0.100 \text{ mol}$

Gazın sabit hacimdeki molar ısı kapasitesi: $c_V = 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Lazerin yaydığı ışığın dalga boyu: $\lambda = 514 \text{ nm}$

Işınlama süresi: $\Delta t = 10.0 \text{ s}$

Hareketli levhanın ışınlama sonrasındaki yer değiştirmesi: $\Delta s = 30.0 \text{ mm}$

Fiziksel sabitler ve genel veriler

Her bir sorunun metninde verilen sayısal verilere ek olarak, bazı genel verilerin ve fiziksel sabitlerin bilinmesi yararlı olabilir; bunları aşağıda bulabilirsiniz. Bunlar günümüzde mevcut olan en hassas verilere yakın olduklarından çok sayıda basamakla verilmiştir; ancak sonuçlarınızı her soruya uygun sayıda basamakla yazmanız beklenmektedir.

Işığın boşluktaki hızı: $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Boşluğun manyetik geçirgenliği: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Boşluğun dielektrik sabiti: $\epsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

Kütleçekim sabiti: $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

Gaz sabiti: $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Boltzmann sabiti: $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Stefan sabiti: $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

Protonun yükü: $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Elektronun kütlesi: $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Planck sabiti: $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Santigrat ölçeğinin sıfır noktasının mutlak sıcaklığı: $T_K = 273.15 \text{ K}$

Güneş'in kütlesi: $M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Dünya'nın kütlesi: $M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Dünya'nın ortalama yarıçapı: $r_E = 6.373 \text{ Mm}$

Dünya'nın yörüngesinin büyük yarı eksen: $R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Yıldız günü: $d_S = 86.16406 \text{ ks}$

Yıl: $y = 31.558150 \text{ Ms}$

Dünya yüzeyindeki yerçekimi alanının standart değeri: $g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Deniz seviyesindeki atmosfer basıncının standart değeri: $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

Standart basınçta ve 15°C sıcaklıkta havanın görünür ışık için kırılma indisi: $n_{\text{air}} = 1.000277$

Güneş sabiti: $S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

Jüpiter'in kütlesi: $M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Jüpiter'in ekvator yarıçapı: $R_B = 69.8 \text{ Mm}$

Jüpiter'in yörüngesinin ortalama yarıçapı: $R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Jüpiter günü: $d_J = 35.6 \text{ ks}$

Jüpiter yılı: $y_J = 374.32 \text{ Ms}$

$\pi: 3.14159265$

Cevaplar

1. Işınlama sonrasında:

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ\text{C}, \quad p_1 = 102.3 \text{ kPa.}$$

2. Gazın yaptığı mekanik iş:

$$W = 24.1 \text{ J.}$$

3. Soğurulan ışınlam enerjisi:

$$E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J.}$$

4. Soğurulan lazer gücü ve foton soğurma hızı:

$$P_{\text{abs}} = 8.44 \text{ W}, \quad \dot{N} = 2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}.$$

5. Levhanın kütleçekim potansiyel enerjisini artırma verimi:

$$\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%.$$

6. Hem basınç hem de sıcaklık azalır. Döndürme sonrasında:

$$p_2 = 101.3 \text{ kPa}, \quad T_2 = 321.2 \text{ K} = 48.1^\circ\text{C.}$$

Çözüm

İdeal gaz yaklaşımını ve verilen sabit molar ısı kapasitesini kullanıyor, ısı sızıntısını ve sürtünmeden kaynaklanan enerji kaybını ihmal ediyoruz. Başlangıç ve son durumlarda makroskopik kinetik enerji yoktur. Aşağıda kullanılan ortam basıncı, soruya özgü $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$ değeridir.

Silindirin kesit alanı ve ölçülen hacim artışı şöyledir:

$$A = \pi r^2 = \pi(0.0500)^2 = 7.85398 \times 10^{-3} \text{ m}^2,$$

$$\Delta V = A\Delta s = (7.85398 \times 10^{-3})(0.0300) = 2.35619 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

1. Işınlama sonrasında sıcaklık ve basınç

Düşey doğrultudaki mekanik dengede, gazın yukarı yönlü kuvveti atmosfer basıncının kuvvetini ve levhanın ağırlığını dengeler:

$$p_1 A = p_0 A + mg.$$

Böylece

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{A} = 101300 + \frac{(0.800)(9.80665)}{7.85398 \times 10^{-3}} = 102298.9 \text{ Pa.}$$

Aynı denge ışınlama öncesinde de geçerli olduğundan gazın başlangıç ve son basınçları eşittir:

$$p_1 = 102.3 \text{ kPa.}$$

Gazın ısınlama öncesindeki ve sonrasındaki hacimleri sırasıyla V_0 ve V_1 olsun. İdeal gaz yasasını her iki duruma uyguladığımızda

$$p_1 V_0 = nRT_0, \quad p_1 V_1 = nRT_1.$$

İki denklemi birbirinden çıkarınca

$$p_1 \Delta V = nR(T_1 - T_0).$$

$T_0 = 293.15$ K değeriyle

$$T_1 - T_0 = \frac{(102298.9)(2.35619 \times 10^{-4})}{(0.100)(8.314510)} = 28.9898 \text{ K}.$$

Dolayısıyla

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ \text{C}.$$

2. Gazın yaptığı mekanik iş

Harekete karşı koyan $p_0 A + mg$ kuvveti sabittir. Sürtünmeden kaynaklanan kayıp ihmal edildiğinde ve levhanın başlangıç ve son kinetik enerjileri sıfır olduğunda gazın yaptığı iş

$$W = (p_0 A + mg)\Delta s = p_0 \Delta V + mg\Delta s = p_1 \Delta V.$$

Sayısal olarak,

$$W = (102298.9)(2.35619 \times 10^{-4}) = 24.1036 \text{ J},$$

böylece

$$W = 24.1 \text{ J}.$$

Bu iş, atmosfer basıncına karşı yapılan 23.8683 J iş ile levhayı kaldırmak için yapılan 0.235360 J işten oluşur.

3. Soğurulan ısıtım enerjisi

Soğurulan ısıtım hızla ısı enerjisiye dönüşür. Gazın yaptığı iş pozitif kabul edildiğinde, enerjinin korunumu şu bağıntıyı verir:

$$E_{\text{abs}} = \Delta U + W.$$

İdeal gaz için,

$$\Delta U = nc_V(T_1 - T_0) = (0.100)(20.8)(28.9898) = 60.2988 \text{ J}.$$

Sonuç olarak,

$$E_{\text{abs}} = 60.2988 + 24.1036 = 84.4024 \text{ J},$$

ya da

$$E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J}.$$

Eşdeğer olarak, $W = nR(T_1 - T_0)$ olduğundan,

$$E_{\text{abs}} = n(c_V + R)(T_1 - T_0) = nc_P(T_1 - T_0),$$

burada

$$c_P = c_V + R = 29.114510 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}.$$

4. Soğurulan güç ve foton soğurma hızı

Lazerin gücü sabittir, dolayısıyla

$$P_{\text{abs}} = \frac{E_{\text{abs}}}{\Delta t} = \frac{84.4024}{10.0} = \boxed{8.44 \text{ W}}.$$

Gelen her bir lazer fotonunun enerjisi şöyledir:

$$\varepsilon_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.6260755 \times 10^{-34})(299792458)}{514 \times 10^{-9}} = 3.86468 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Gaza giren tüm lazer fotonları soğurulduğundan, soğurulma hızları

$$\dot{N} = \frac{P_{\text{abs}}}{\varepsilon_\gamma} = \frac{8.44024}{3.86468 \times 10^{-19}} = \boxed{2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}}.$$

Bu aynı zamanda lazer fotonlarının temel soğurma olaylarının gerçekleşme hızıdır.

5. Levhanın potansiyel enerjisine dönüşümün verimi

Levhanın kütleçekim potansiyel enerjisindeki artış şöyledir:

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg\Delta s = (0.800)(9.80665)(0.0300) = 0.235360 \text{ J}.$$

Dolayısıyla istenen verim

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{E_{\text{abs}}} = \frac{0.235360}{84.4024} = 2.78854 \times 10^{-3}.$$

Böylece

$$\boxed{\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%}.$$

Verimin küçük olması, gazı ısıtmak ve çevredeki atmosferi yer değiştirmek için enerji kullanılmasından kaynaklanır.

6. Döndürme sonrasında basınç ve sıcaklık

Silindirin ekseni ile yukarı yönlü düşey doğrultu arasındaki açı θ olsun. Yavaş döndürme sırasında eksen doğrultusundaki mekanik denge

$$p(\theta)A = p_0A + mg \cos \theta,$$

bağıntısını verir, dolayısıyla

$$p(\theta) = p_0 + \frac{mg}{A} \cos \theta.$$

$\theta = 90^\circ$ olduğunda levhanın ağırlığının eksen doğrultusunda bir bileşeni yoktur. Bu nedenle

$$\boxed{p_2 = p_0 = 101.3 \text{ kPa.}}$$

Döndürme yavaştır; ısı alışverişi ve sürtünmeden kaynaklanan enerji kaybı ihmal edilebilir. Dolayısıyla gaz, sanki statik bir adyabatik genleşme geçirir. Termodinamiğin birinci yasası şu bağıntıyı verir:

$$nc_V dT = -p dV.$$

$p = nRT/V$ kullanıldığında,

$$c_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}.$$

İntegral alındığında

$$TV^{R/c_V} = \text{sabit},$$

ya da

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1.399736,$$

tanımıyla

$$TV^{\gamma-1} = \text{sabit.}$$

İdeal gaz yasasıyla hacim elendiğinde

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{R/(c_V+R)}.$$

Dolayısıyla

$$T_2 = 322.1398 \left(\frac{101300}{102298.9} \right)^{8.314510/29.114510} = 321.2384 \text{ K.}$$

Böylece

$$T_2 = 321.2 \text{ K} = 48.1^\circ\text{C.}$$

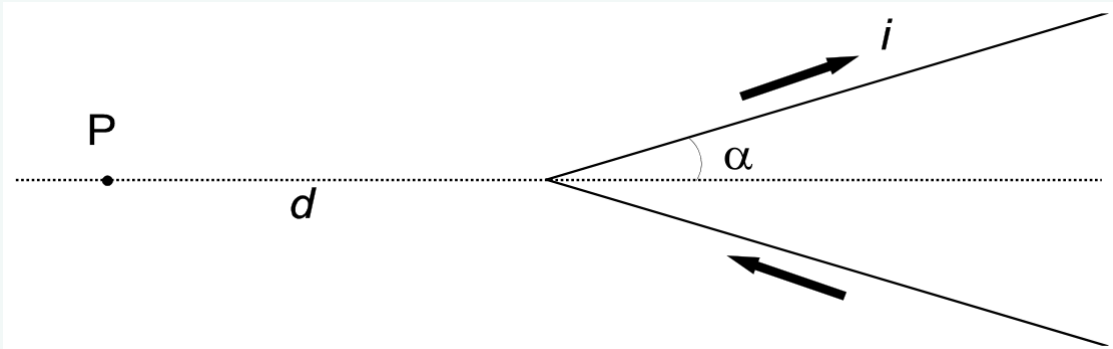
Hem basınç hem de sıcaklık azalır; genleşen gaz yaptığı işi iç enerjisinden karşıladığı için sıcaklık yaklaşık 0.90 K düşer.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: V biçiminde bir telin manyetik alanı

*Ampère'in manyetik olaylara ilişkin yorumunun ilk başarıları arasında, Biot ve Savart'ın başlangıçta ortaya attığı varsayımlarla karşılaştırılan, elektrik akımı taşıyan tellerin oluşturduğu manyetik alanın **B** hesaplanması yer alır.*

Özellikle ilginç bir durum, sabit bir i akımı taşıyan, iki doğrusal parçadan oluşan ve yarı açıklık açısı α olacak şekilde "V" biçiminde bükülmüş çok uzun, ince bir teldir (şekle bakınız). Ampère'in hesaplamalarına göre, "V"nin eksenı üzerinde, dışında ve tepe noktasından d uzaklıkta bulunan bir P noktasındaki manyetik alanın B büyüklüğü, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ile orantılıdır. Ampère'in çalışması daha sonra Maxwell'in elektromanyetik kuramının bir parçası olmuş ve evrensel olarak kabul görmüştür.



Günümüzdeki elektromanyetizma bilgilerimizi kullanarak,

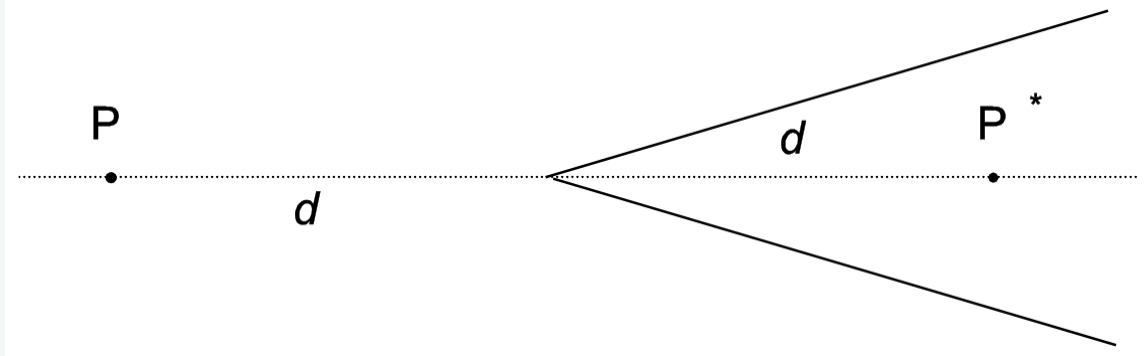
1. P noktasındaki **B** alanının yönünü bulunuz. [1 puan]
2. Alanın $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ile orantılı olduğunu bilerek,

$$|\mathbf{B}(\mathbf{P})| = k \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

bağıntısındaki k orantı katsayısını bulunuz. [1.5 puan]

3. P noktasının tepe noktasına göre simetriği olan, yani eksen üzerinde ve aynı d uzaklığında, ancak "V"nin içinde bulunan bir P^* noktasındaki $\mathbf{B}$ alanını hesaplayınız (şekle bakınız). [2 puan]

¹ Bu soru boyunca α radyan cinsinden ifade edilmektedir



4. Manyetik alanı ölçmek için P noktasına, eylemsizlik momenti I ve manyetik dipol momenti μ olan küçük bir manyetik iğne yerleştiriyoruz; iğne, $\mathbf{B}$ yönünü içeren bir düzlemde sabit bir nokta etrafında salınmaktadır. Bu iğnenin küçük salınımlarının periyodunu B 'nin bir fonksiyonu olarak hesaplayınız. [2.5 puan]

Aynı koşullar altında Biot ve Savart ise P noktasındaki manyetik alanın (burada modern gösterimi kullanıyoruz) $B(\mathbf{P}) = \frac{i\mu_0\alpha}{\pi^2 d}$ olabileceğini varsaymışlardı; burada μ_0 , boşluğun manyetik geçirgenliğidir. Nitekim manyetik iğnenin salınım periyodunu "V"nin açıklık açısının bir fonksiyonu olarak ölçerek, iki yorum (Ampère'in yorumu ile Biot ve Savart'ın yorumu) arasında deneysel bir karar vermeye çalışmışlardı. Ancak bazı α değerleri için farklar kolayca ölçülemeyecek kadar küçüktür.

5. P noktasındaki manyetik iğnenin salınım periyodu T için verilen iki öngörüü deneysel olarak ayırt edebilmek amacıyla en az %10'luk bir farka, yani $T_1 > 1.10 T_2$ koşuluna (T_1 Ampère'in, T_2 ise Biot–Savart'ın öngörüsüdür) ihtiyaç duyuyorsak, iki yorum arasında karar verebilmek için "V"nin yarı açıklık açısı α 'yı yaklaşık olarak hangi aralıkta seçmemiz gerektiğini belirtiniz. [3 puan]

İpucu

Çözümünüzde izlediğiniz yola bağlı olarak, aşağıdaki trigonometrik eşitlik yararlı olabilir:

$$\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Fiziksel sabitler ve genel veriler

Her bir sorunun metninde verilen sayısal verilere ek olarak, bazı genel verilerin ve fiziksel sabitlerin bilinmesi yararlı olabilir; bunları aşağıda bulabilirsiniz. Bunlar, günümüzde mevcut en hassas verilere yakın olduklarından çok sayıda basamak içerir; ancak sizden sonuçlarınızı her soruya uygun sayıda basamakla yazmanız beklenmektedir.

Işığın boşluktaki hızı: $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 Boşluğun manyetik geçirgenliği: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
 Boşluğun dielektrik sabiti: $\varepsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$
 Evrensel kütleçekim sabiti: $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
 Gaz sabiti: $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
 Boltzmann sabiti: $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
 Stefan sabiti: $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
 Protonun yükü: $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 Elektronun kütlesi: $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
 Planck sabiti: $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
 Santigrat ölçeğinin sıfır noktası: $T_K = 273.15 \text{ K}$
 Güneş'in kütlesi: $M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
 Dünya'nın kütlesi: $M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
 Dünya'nın ortalama yarıçapı: $r_E = 6.373 \text{ Mm}$
 Dünya yörüngesinin büyük yarı eksen: $R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$
 Yıldız günü: $d_S = 86.16406 \text{ ks}$
 Yıl: $y = 31.558150 \text{ Ms}$
 Dünya yüzeyindeki kütleçekim alanının standart değeri: $g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
 Deniz seviyesindeki atmosfer basıncının standart değeri: $p_0 = 101325 \text{ Pa}$
 Standart basınçta ve 15°C sıcaklıkta, görünür ışık için havanın kırılma indisi: $n_{\text{air}} = 1.000277$
 Güneş sabiti: $S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
 Jüpiter'in kütlesi: $M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
 Jüpiter'in ekvator yarıçapı: $R_B = 69.8 \text{ Mm}$
 Jüpiter yörüngesinin ortalama yarıçapı: $R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$
 Jüpiter günü: $d_J = 35.6 \text{ ks}$
 Jüpiter yılı: $y_J = 374.32 \text{ Ms}$
 $\pi: 3.14159265$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$\hat{\mathbf{z}}$ sayfa düzleminde dışarıya, okuyucuya doğru yönelsin ve $\mu = |\mu|$ olsun.

1. P noktasındaki alan **telin bulunduğu düzleme dik, sayfa düzleminde dışarıya doğrudur.**

2. $k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}, \quad \mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$

3. $\mathbf{B}(P^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}},$

sayfa düzleminde içeriye yönelmiştir.

4. $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$

5. Belirtilen kesin eşitsizlik $T_1 > 1.10T_2$ için,

$$0 < \alpha < \alpha_c, \quad \alpha_c \simeq 0.768 \text{ rad} \simeq 44.0^\circ.$$

$\alpha = \alpha_c$ olduğunda fark tam olarak %10'dur.

Çözüm

İki uzun, ince kolu boşlukta bulunan yarı sonsuz doğrusal teller olarak ele alıyoruz. Şekilde gösterildiği gibi akım, alt kol boyunca tepe noktasına girer ve üst kol boyunca tepe noktasından çıkar. Tepe noktasını başlangıç noktası olarak alalım; pozitif x eksenini V 'nin içine, $\hat{z}$ ise sayfa düzleminden dışarıya yönelsin.

1. P noktasındaki alanın yönü

Modern Biot–Savart yasası

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

şeklindedir; burada $d\boldsymbol{\ell}$ akım yönündedir ve $\mathbf{R}$, akım elemanından gözlem noktasına yönelir.

Her iki vektör de şeklin düzleminde bulunduğundan her bir katkı bu düzleme diktir. P noktasında sağ el kuralı, her iki koldan da dışarıya doğru bir katkı verir: alt koldaki akım tepe noktasına doğru, üst koldaki akım ise tepe noktasından uzağa doğru akar. Dolayısıyla katkıları toplanır:

$$\mathbf{B}(P) \text{ sayfa düzleminden dışarıya yönelir.}$$

2. k 'nın belirlenmesi

Açıya bağımlılık verilmiştir:

$$B(P) = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

$\alpha = \pi/2$ sınır durumunu ele alalım. Bu durumda iki kol, tek bir sonsuz doğrusal tel oluşturur ve P noktasının bu tele dik uzaklığı d 'dir.

Bu doğrusal tel için silindirik simetri ve Ampère'in dolaşım yasası

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B(2\pi d) = \mu_0 i.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

$\tan(\pi/4) = 1$ olduğundan buradan

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

bulunur.

Verilen manyetik geçirgenlik kullanılırsa,

$$k = (2 \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}) \frac{i}{d}.$$

Böylece,

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

3. P* noktasındaki alan

P* noktasında sağ el kuralı, başlangıçtaki her iki kolun da sayfa düzleminden içeriye doğru bir alan oluşturduğunu gösterir.

Alanın büyüklüğünü bulmak için her iki kolu, akım yönlerini koruyarak tepe noktasının ötesine uzatalım; böylece her biri sonsuz bir doğrusal tel olsun. P* noktasının tamamlanan tellerin her birine dik uzaklığı

$$\rho = d \sin \alpha.$$

olur. Tamamlanan tellerin her biri, sayfa düzleminden içeriye doğru, büyüklüğü

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi \rho}.$$

olan bir alan oluşturur. Dolayısıyla toplam alanlarının büyüklüğü

$$B_{\text{complete}} = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

olur.

Eklenen iki yarı doğru, başlangıçtaki telin ayna görüntüsü olan, sola açılan bir V oluşturur. Eklenen bu V'ye göre P*, dışarıda, eksen üzerinde ve d uzaklığında bir noktadır. Bu nedenle oluşturduğu alanın büyüklüğü $B(P)$ 'dir ve sağ el kuralı, bu alanın da sayfa düzleminden içeriye yöneldiğini gösterir.

Böylece süperpozisyon ilkesi

$$B(P^*) + B(P) = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

bağıntısını verir. 2. kısmın sonucu yerine konursa,

$$B(P^*) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \left[\frac{2}{\sin \alpha} - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right].$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

bağıntısı kullanıldığında köşeli parantez içindeki ifade

$$\frac{2 - (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

haline gelir. Dolayısıyla

$$\mathbf{B}(P^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

4. Küçük salınımların periyodu

Küçük iğneyi, uzunluğu boyunca düzgün olan bir alandaki manyetik dipol olarak ele alalım; sönümü ve diğer torkları ihmal edelim. Manyetik momenti ile alan arasındaki açı θ olsun.

Manyetik tork

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}.$$

şeklinde dir. $\boldsymbol{\mu}$ 'nin $\mathbf{B}$ 'ye paralel olduğu denge karardır. θ 'yu bu denge konumundan açısal sapma olarak alırsak dönme hareketinin denklemi

$$I\ddot{\theta} = -\mu B \sin \theta.$$

olur.

Küçük salınımlar için $|\theta| \ll 1$ rad ve $\sin \theta \simeq \theta$ olduğundan,

$$\ddot{\theta} + \frac{\mu B}{I} \theta = 0.$$

Bu, açısal frekansı

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu B}{I}},$$

olan basit harmonik harekettir ve dolayısıyla

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

I , μ ve B için SI birimleri kullanıldığında periyot saniye cinsindendir.

5. %10'dan büyük bir periyot farkı veren açı aralığı

P noktasındaki iki alan öngörüsü

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad B_2 = \frac{\mu_0 i \alpha}{\pi^2 d},$$

şeklinde; ikinci ifade, soruda aktarılan tarihsel varsayımdır.

$T \propto B^{-1/2}$ olduğundan,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)}}.$$

Deneysel koşul

$$\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)} > 1.10^2 = 1.21.$$

haline gelir.

α arttıkça periyot oranı azalır. Bunu doğrulamak için $x = \alpha/2$ alalım; bu oranın karesi $x \cot x$ ile orantılıdır ve

$$\frac{d}{dx}(x \cot x) = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} < 0,$$

çünkü ele alınan pozitif açılar için $\sin(2x) < 2x$ olur.

Sınır değerleri

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \simeq 1.1284, \quad \frac{T_1}{T_2} \Big|_{\alpha=\pi/2} = 1.$$

şeklinde. Dolayısıyla ayırt edilebilen ve ayırt edilemeyen aralıkları tek bir eşik ayırır.

$$\frac{2\alpha_c}{\pi \tan(\alpha_c/2)} = 1.21$$

denkleminin sayısal çözümü

$$\alpha_c \simeq 0.7682 \text{ rad} \simeq 44.01^\circ.$$

sonucunu verir. Bu nedenle gerekli yarı açıklık açısı yaklaşık olarak

$$0 < \alpha < 0.77 \text{ rad} \quad (\text{yaklaşık olarak } 44^\circ \text{ altında}).$$

olmalıdır.

"En az %10" ifadesi eşitliği de kapsayacak şekilde yorumlanırsa tam eşik değeri aralığa dahildir; açıkça yazılmış olan kesin eşitsizlik ise bu değeri dışlar. Her iki alan da sıfır olduğundan ve sonlu bir manyetik salınım periyodu bulunmadığından, dejenere durum olan $\alpha = 0$ değeri dışlanır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Jüpiter'e giden bir uzay sondası

Bu soruda, uzay sondalarını istenen yönde hızlandırmak için sıkça kullanılan bir yöntemi ele alıyoruz. Uzay sondası bir gezegenin yakınından geçer ve gezegenin yörünge hareketinden çok küçük miktarda enerji alarak süratini önemli ölçüde artırabilir ve uçuş yönünü büyük ölçüde değiştirebilir. Burada bu etkiyi Jüpiter'in yakınından geçen bir uzay sondası için inceliyoruz.

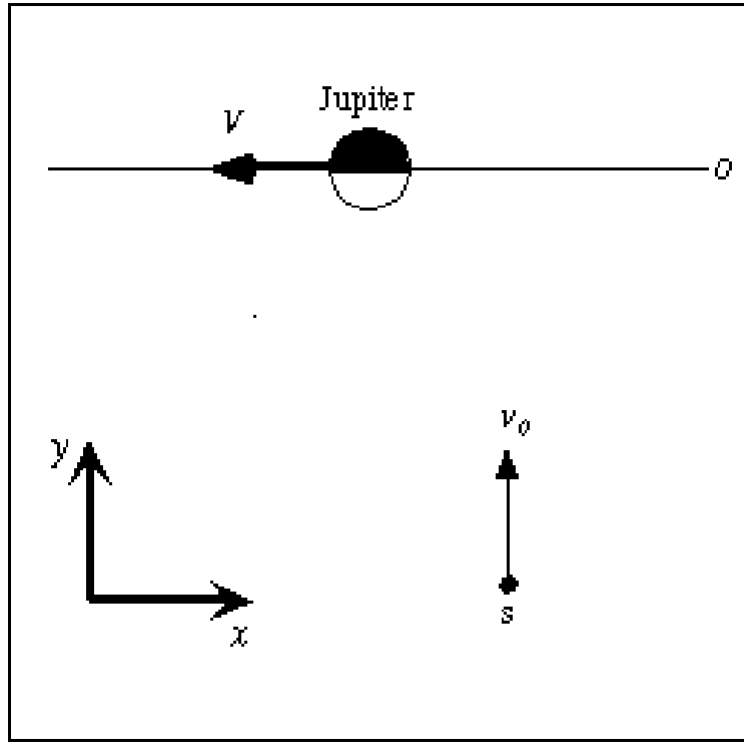
Jüpiter gezegeni, Güneş'in çevresinde, ortalama yarıçapı R olan bir çemberle yaklaşık olarak temsil edilebilen eliptik bir yörüngede dolanır; bu fiziksel durumu inceleyebilmek için önce şunları yapmalıyız:

1. Gezegenin Güneş çevresindeki yörüngesi boyunca hareket ederken sahip olduğu V süratini bulunuz. [1.5 puan]
2. Sonda Güneş ile Jüpiter arasındayken (Güneş-Jüpiter doğru parçası üzerinde), Güneş'in kütleçekim kuvvetinin Jüpiter'inkini dengelediği noktanın Jüpiter'e uzaklığını bulunuz. [1 puan]

Kütlesi $m = 825 \text{ kg}$ olan bir uzay sondası Jüpiter'in yakınından geçmektedir. Basitlik için uzay sondasının yörüngesinin bütünüyle Jüpiter'in yörünge düzleminde olduğunu varsayınız; böylece uzay sondasının Jüpiter'in yörünge düzleminin dışına fırlatıldığı önemli durumu ihmal ediyoruz.

Yalnızca Jüpiter'in çekiminin diğer tüm kütleçekim kuvvetlerine baskın olduğu bölgede olup bitenleri ele alıyoruz.

Güneş'in kütle merkezine bağlı referans sisteminde uzay sondasının ilk sürati $v_0 = 1.00 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ olup hızı pozitif y yönündedir; Jüpiter'in hızı ise negatif x yönündedir (bkz. şekil 1). "İlk sürat" ile uzay sondasının gezegenler arası uzayda, hâlâ Jüpiter'den uzakta olmakla birlikte Güneş'in çekiminin Jüpiter'inkine göre ihmal edilebilir olduğu bölgeye girmişken sahip olduğu sürati kastediyoruz. Karşılaşmanın, Jüpiter'in Güneş çevresindeki yörüngesi boyunca hareket yönündeki değişimin ihmal edilebileceği kadar kısa bir sürede gerçekleştiğini varsayıyoruz. Ayrıca sondanın Jüpiter'in arkasından geçtiğini, yani y koordinatları aynı olduğunda sondanın x koordinatının Jüpiter'inkinden büyük olduğunu varsayıyoruz.



Şekil 1: Güneş'in kütle merkezine bağlı sistemden görünüm. O, Jüpiter'in yörüngesini; s, uzay sondasını göstermektedir.

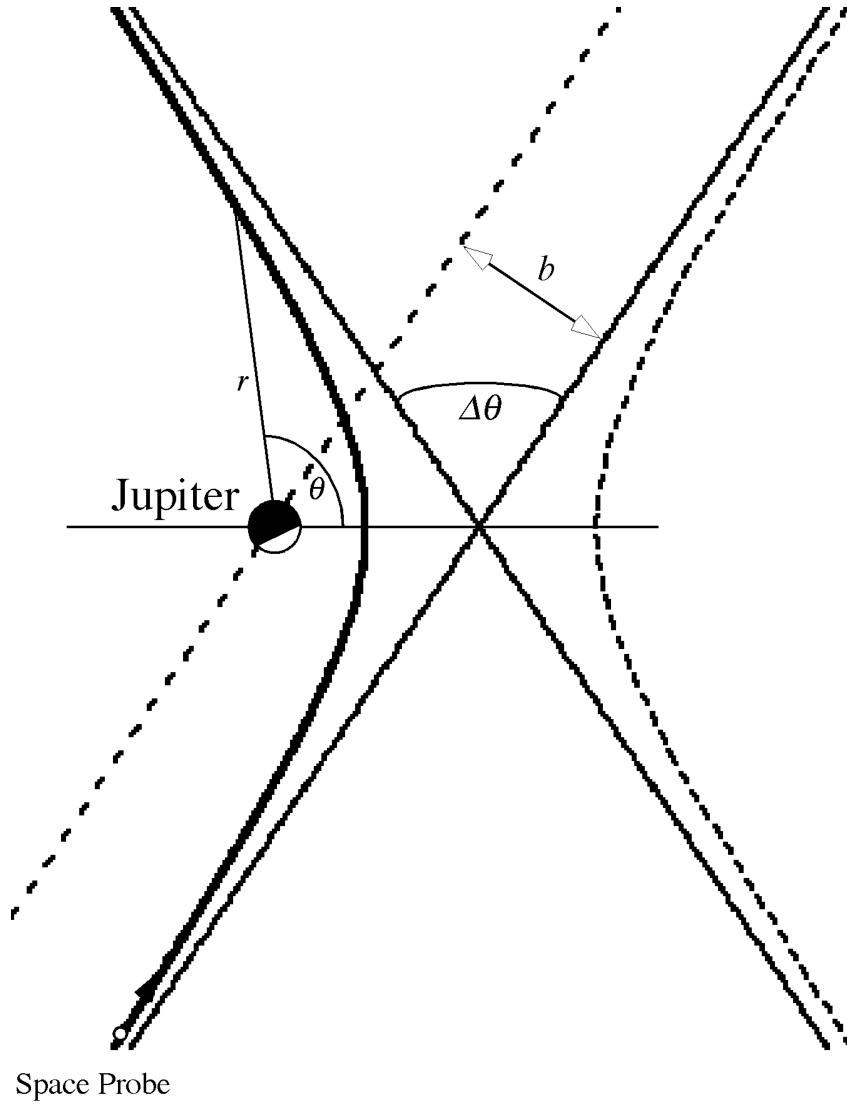
3. Uzay sondası henüz Jüpiter'den uzaktayken, Jüpiter'e bağlı referans sistemindeki hareket yönünü (hareket yönü ile x eksenini arasındaki φ açısı olarak) ve v' süratini bulunuz. [2 puan]
4. Uzay sondasının Jüpiter'e bağlı referans sistemindeki toplam mekanik enerjisi E 'nin değerini bulunuz. Her zamanki gibi, potansiyel enerjisinin çok büyük bir uzaklıktaki değerini sıfır alınız; burada bu, tüm kütleçekim etkileşimlerinin küçüklüğü nedeniyle hemen hemen sabit hızla hareket edebilecek kadar uzakta olduğu duruma karşılık gelir. [1 puan]

Uzay sondasının Jüpiter'e bağlı referans sistemindeki yörüngesi bir hiperboldür ve bu referans sistemindeki kutupsal koordinatlarla denklemi şöyledir:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right). \quad (1)$$

Burada b , asimptotlardan biri ile Jüpiter arasındaki uzaklık (*çarpışma parametresi* olarak adlandırılır); E , sondanın Jüpiter'e bağlı referans sistemindeki toplam mekanik enerjisi; G , kütleçekim sabiti; M , Jüpiter'in kütlesi; r ve θ ise kutupsal koordinatlardır (radyal uzaklık ve kutupsal açı).

Şekil 2, denklem (1) ile tanımlanan bir hiperbolün iki kolunu göstermektedir; asimptotlar ve kutupsal koordinatlar da gösterilmiştir. Denklem (1)'de koordinat başlangıcının hiperbolün "çekici odağında" olduğuna dikkat ediniz. Uzay sondasının yörüngesi, çekim etkisi altındaki yörüngedir (vurgulanan kol).



Şekil 2

5. Uzay sondasının yörüngesini tanımlayan denklem (1)'i kullanarak, Jüpiter'e bağlı referans sistemindeki toplam açısal sapmayı $\Delta\theta$ (şekil 2'de gösterildiği gibi) bulunuz ve bunu ilk sürat v' ile çarpışma parametresi b 'nin bir fonksiyonu olarak ifade ediniz. [2 puan]
6. Sondanın, gezegenin merkezine üç Jüpiter yarıçapından daha yakın bir uzaklıktan geçemeyeceğini varsayınız; mümkün olan en küçük çarpışma parametresini ve mümkün olan en büyük açısal sapmayı bulunuz. [1 puan]
7. Sondanın Güneş'e bağlı referans sistemindeki son sürati v'' için yalnızca Jüpiter'in sürati V , sondanın ilk sürati v_0 ve sapma açısı $\Delta\theta$ 'nin fonksiyonu olan bir denklem bulunuz. [1 puan]
8. Açısal sapma mümkün olan en büyük değerini aldığı anda, Güneş'e bağlı referans sistemindeki son sürat v'' 'nin sayısal değerini bulmak için önceki sonucu kullanınız. [0.5 puan]

İpucu

Çözümünüzde izlediğiniz yola bağlı olarak, aşağıdaki trigonometrik bağıntılar yararlı olabilir:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Fiziksel sabitler ve genel veriler

Soruların metinlerinde verilen sayısal verilere ek olarak, bazı genel verileri ve fiziksel sabitleri bilmek yararlı olabilir; bunları aşağıda bulabilirsiniz. Bunlar, günümüzde mevcut en hassas verilere yakın olduklarından çok sayıda basamak içerir; ancak sonuçlarınızı her soru için uygun sayıda basamakla yazmanız beklenmektedir.

Işığın boşluktaki sürati:	$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Boşluğun manyetik geçirgenliği:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Boşluğun dielektrik sabiti:	$\epsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$
Kütleçekim sabiti:	$G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Gaz sabiti:	$R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
Boltzmann sabiti:	$k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan sabiti:	$\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Protonun yükü:	$e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Elektronun kütlesi:	$m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Planck sabiti:	$h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Santigrat ölçeğinin sıfır noktası:	$T_K = 273.15 \text{ K}$
Güneş'in kütlesi:	$M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Dünya'nın kütlesi:	$M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Dünya'nın ortalama yarıçapı:	$r_E = 6.373 \text{ Mm}$
Dünya'nın yörüngesinin büyük yarı eksen:	$R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Yıldız günü:	$d_S = 86.16406 \text{ ks}$
Yıl:	$y = 31.558150 \text{ Ms}$
Dünya yüzeyindeki kütleçekim alanının standart değeri:	$g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Deniz seviyesindeki atmosfer basıncının standart değeri:	$p_0 = 101325 \text{ Pa}$
Standart basınçta ve 15°C sıcaklıkta havanın görünür ışık için kırılma indisi:	$n_{\text{air}} = 1.000277$
Güneş sabiti:	$S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
Jüpiter'in kütlesi:	$M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
Jüpiter'in ekvator yarıçapı:	$R_B = 69.8 \text{ Mm}$
Jüpiter'in yörüngesinin ortalama yarıçapı:	$R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Jüpiter günü:	$d_J = 35.6 \text{ ks}$
Jüpiter yılı:	$y_J = 374.32 \text{ Ms}$
π :	3.14159265

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. Jüpiter'in yörünge sürati

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \simeq 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

2. Jüpiter'den Güneş yönündeki uzaklık

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_S/M}} \simeq 2.33 \times 10^{10} \text{ m}.$$

3. Jüpiter'e bağlı sistemdeki ilk hız $\mathbf{v}'_i = (V, v_0)$ olur. Dolayısıyla

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{V}\right) = 37.4^\circ, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2} = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Açı, pozitif x ekseninden itibaren saat yönünün tersine ölçülür.

4. Jüpiter'e bağlı sistemdeki toplam mekanik enerji

$$E = \frac{1}{2}m(V^2 + v_0^2) = 1.12 \times 10^{11} \text{ J}.$$

5. Açısal sapma

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{GM}{bv'^2}\right).$$

6. $r_0 = 3R_B$ olmak üzere,

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}} = 4.90 \times 10^8 \text{ m},$$

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{1 + r_0 v'^2/(GM)}\right) = 87.4^\circ \simeq 1.53 \text{ rad}.$$

7. Güneş'e bağlı sistemdeki son sürat

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2Vv_0 \sin \Delta\theta}.$$

8. İzin verilen en büyük sapmada,

$$v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.$$

Çözüm

Newton'un kütleçekim yasasını ve soruda belirtilen yaklaşımları kullanıyoruz. Jüpiter'in yörüngesi daireseldir ve karşılaşma boyunca hızı pratikte sabittir. Sondanın kütlesi, Jüpiter'in kütlesine kıyasla ihmal edilebilir. Yakın geçiş sırasında Güneş'in kuvvetini ihmal ettiğimizden, Jüpiter'e bağlı sistemi eylemsiz kabul ederiz ve sonda şu potansiyelde hareket eder:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

İlk ve son hızlar, bu iki cisim yaklaşımındaki asimptotik hızları ifade eder. Sayısal hesaplamalarda ara değerler yuvarlanmadan kullanılır.

1. Jüpiter'in yörünge sürati

Güneş'in kütleçekim kuvveti, Jüpiter'in merkezci kuvvetini sağlar:

$$\frac{GM_S M}{R^2} = \frac{MV^2}{R}.$$

Dolayısıyla

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}.$$

Verilen sabitleri kullanarak,

$$V = \sqrt{\frac{(6.67259 \times 10^{-11})(1.991 \times 10^{30})}{7.783 \times 10^{11}}} = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Böylece

$$\boxed{V = 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.}$$

Alternatif dairesel yörünge hesabı $V = 2\pi R/y_J$, $1.30642 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ sonucunu verir; bu, belirtilen hassasiyet düzeyinde önceki sonuçla uyumludur.

2. Kütleçekim kuvvetlerinin dengelendiği nokta

Jüpiter'den Güneş yönündeki uzaklık d olsun. Bu durumda Güneş'e uzaklık $R - d$ olur. İki kütleçekim kuvveti zıt yönlerde olduğundan, dengelenmeleri için

$$\frac{GMm}{d^2} = \frac{GM_S m}{(R - d)^2}.$$

Pozitif karekökler alınırsa,

$$\frac{R - d}{d} = \sqrt{\frac{M_S}{M}}.$$

Çözülürse,

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_S/M}}.$$

Sayısal olarak,

$$d = \frac{7.783 \times 10^{11}}{1 + \sqrt{(1.991 \times 10^{30})/(1.901 \times 10^{27})}} = 2.33285 \times 10^{10} \text{ m}.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{d = 2.33 \times 10^{10} \text{ m}.}$$

3. Jüpiter'e bağlı sistemde başlangıç hareketi

Güneş'e bağlı sistemde ilk hızlar şöyledir:

$$\mathbf{v}_i = v_0 \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{V}_J = -V \hat{\mathbf{x}}.$$

Galile hız dönüşümü şunu verir:

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}_J = V\hat{\mathbf{x}} + v_0\hat{\mathbf{y}}.$$

Her iki bileşen de pozitif olduğundan hız birinci bölgededir:

$$\tan \varphi = \frac{v_0}{V}, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2}.$$

Sayısal olarak,

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1.00 \times 10^4}{1.30650 \times 10^4}\right) = 37.4306^\circ,$$
$$v' = \sqrt{(1.30650 \times 10^4)^2 + (1.00 \times 10^4)^2} = 1.64528 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Böylece

$$\boxed{\varphi = 37.4^\circ, \quad v' = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.}$$

4. Jüpiter'e bağlı sistemde toplam mekanik enerji

Potansiyel enerji sonsuz uzaklıkta sıfırdır. Dolayısıyla korunan toplam enerji, başlangıçtaki asimptotik kinetik enerjiye eşittir:

$$E = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m(V^2 + v_0^2).$$

Değerler yerine konulduğunda

$$E = \frac{1}{2}(825)(1.64528 \times 10^4)^2 = 1.11661 \times 10^{11} \text{ J}.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{E = 1.12 \times 10^{11} \text{ J}.}$$

Enerjinin pozitif olması, bağlı olmayan hiperbolik bir yörüngeyle tutarlıdır.

5. Açısal sapma

$E = \frac{1}{2}mv'^2$ kullanılarak denklem (1) şöyle yazılır:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

burada

$$p = \frac{v'^2 b^2}{GM}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2 v'^4}{G^2 M^2}} > 1.$$

Her iki asimptotta da $r \rightarrow \infty$ olduğundan,

$$1 + e \cos \theta = 0.$$

Asimptotik kutupsal açılar $\pm\theta_\infty$ olsun; burada

$$\cos \theta_\infty = -\frac{1}{e}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta_\infty < \pi.$$

Geliş asimptotunda hız, radyal yönün tersine yönelir. Bu nedenle enberi eksenine göre açısı $\pi - \theta_\infty$ olur. Gidiş asimptotunda ise hız radyal yöndedir ve açısı θ_∞ olur. Bu iki açının farkı

$$\Delta\theta = \theta_\infty - (\pi - \theta_\infty) = 2\theta_\infty - \pi.$$

Buradan

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} = \sin \left(\theta_\infty - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \theta_\infty = \frac{1}{e}.$$

$0 < \Delta\theta/2 < \pi/2$ olduğundan,

$$\tan \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{GM}{bv'^2}.$$

Böylece

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{bv'^2} \right).$$

Eşdeğer olarak,

$$\Delta\theta = 2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + b^2 v'^4 / (G^2 M^2)}} \right].$$

6. En küçük çarpışma parametresi ve en büyük sapma

Jüpiter'in merkezine en yakın uzaklık r_p , bu noktadaki sürat ise v_p olsun. Enerjinin korunumu

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2}mv'^2,$$

bağıntısını verir; dolayısıyla

$$v_p^2 = v'^2 + \frac{2GM}{r_p}.$$

Kuvvet merkezi olduğundan, Jüpiter'e göre açısal momentum korunur. En yakın geçiş noktasında hız, yarıçapa diktir:

$$mbv' = mr_p v_p.$$

Karesi alınıp enerjiden elde edilen sonuç yerine konulduğunda,

$$b^2 v'^2 = r_p^2 \left(v'^2 + \frac{2GM}{r_p} \right),$$

buradan

$$b^2 = r_p^2 + \frac{2GM r_p}{v'^2}.$$

Bu ifade r_p ile artar. Dolayısıyla izin verilen en küçük çarpışma parametresi şu uzaklıkta elde edilir:

$$r_p = r_0 = 3R_B = 3(69.8 \times 10^6) \text{ m}.$$

Bu nedenle

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}}.$$

Şu değer kullanılarak,

$$GM = 1.268459359 \times 10^{17} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2},$$

elde edilir:

$$b_{\min} = 4.89996 \times 10^8 \text{ m},$$

ya da

$$b_{\min} = 4.90 \times 10^8 \text{ m.}$$

b arttıkça sapma azalır; dolayısıyla en büyük sapma $b_{\min}$ değerinde gerçekleşir. Böylece

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{b_{\min} v'^2} \right).$$

Bunu doğrudan en yakın uzaklık cinsinden ifade etmek için, $b_{\min}^2$ bağıntısını dışmerkezlik ifadesinde yerine koyalım:

$$e_{\min}^2 = 1 + \frac{b_{\min}^2 v'^4}{G^2 M^2} = \left(1 + \frac{r_0 v'^2}{GM} \right)^2.$$

Dolayısıyla

$$e_{\min} = 1 + \frac{r_0 v'^2}{GM} = 1.44687$$

ve

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{e_{\min}} \right) = 1.52615 \text{ rad} = 87.4421^\circ.$$

Böylece

$$\Delta\theta_{\max} = 87.4^\circ.$$

7. Güneş'e bağlı sistemde son sürat

Jüpiter'e bağlı sistemde enerjinin korunumu, gidişteki asimptotik süratin yine v' olmasını sağlar.

Sonda Jüpiter'in arkasından geçtiği için, kütleçekim kaynaklı sapma, verilen x, y koordinatlarında hızını saat yönünün tersine döndürür. Bu nedenle gidişteki bağıl hız, pozitif x eksenine $\varphi + \Delta\theta$ açısını yapar:

$$\mathbf{v}'_f = v' \cos(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{x}} + v' \sin(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{y}}.$$

Şu bağıntılar kullanılarak,

$$v' \cos \varphi = V, \quad v' \sin \varphi = v_0,$$

toplam açı formüllerinden

$$v'_{f,x} = V \cos \Delta\theta - v_0 \sin \Delta\theta,$$

$$v'_{f,y} = V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta.$$

Güneş'e bağlı sisteme geri dönüşüm, Jüpiter'in $-V\hat{\mathbf{x}}$ hızının eklenmesini gerektirir:

$$v''_x = V(\cos \Delta\theta - 1) - v_0 \sin \Delta\theta,$$

$$v''_y = V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta.$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} v''^2 &= (v''_x)^2 + (v''_y)^2 \\ &= V^2 [(\cos \Delta\theta - 1)^2 + \sin^2 \Delta\theta] \\ &\quad + v_0^2 [\sin^2 \Delta\theta + \cos^2 \Delta\theta] + 2Vv_0 \sin \Delta\theta \\ &= 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + v_0^2 + 2Vv_0 \sin \Delta\theta. \end{aligned}$$

Böylece istenen ifade

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2Vv_0 \sin \Delta\theta}.$$

Bir tutarlılık kontrolü olarak, $\Delta\theta = 0$ alındığında $v'' = v_0$ elde edilir.

8. En büyük açısal sapmada son sürat

Yuvarlanmamış değerler

$$V = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad v_0 = 1.00 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad \Delta\theta_{\max} = 1.52615 \text{ rad},$$

yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} v'' &= \left[(1.00 \times 10^4)^2 + 2(1.30650 \times 10^4)^2(1 - \cos 1.52615) \right. \\ &\quad \left. + 2(1.30650 \times 10^4)(1.00 \times 10^4) \sin 1.52615 \right]^{1/2} \\ &= 2.62144 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.$$

Jüpiter'in kütleçekimi, sondanın Jüpiter'e bağlı sistemdeki asimptotik hızının yönünü değiştirir. Bu değişim, Güneş'e bağlı sistemde süratin ve kinetik enerjinin artmasını sağlar; bu artış, Jüpiter'in yörünge enerjisindeki ihmal edilebilir bir azalmadan karşılanır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.