

IPhO 1999

Теоретические задачи и решения · Падую, Италия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/1999/

Задача 1: Поглощение излучения газом

В цилиндрическом сосуде с вертикальной осью находится молекулярный газ в состоянии термодинамического равновесия. Верхнее основание цилиндра представляет собой стеклянную пластину, которая может свободно перемещаться; предположим, что утечки газа нет, а трение между стеклянной пластиной и стенками цилиндра лишь обеспечивает затухание колебаний, но не приводит к потерям энергии, существенным по сравнению с другими энергиями, рассматриваемыми в задаче. Первоначально температура газа равна температуре окружающей среды. Газ с хорошим приближением можно считать идеальным. Предположим, что стенки цилиндра (включая основания) обладают очень малой теплопроводностью и теплоёмкостью, поэтому теплообмен между газом и окружающей средой происходит очень медленно и им можно пренебречь при решении этой задачи.

Через стеклянную пластину в цилиндр направляют свет лазера постоянной мощности; это излучение свободно проходит через воздух и стекло, но полностью поглощается газом внутри сосуда. Поглощая это излучение, молекулы переходят в возбуждённые состояния, из которых быстро возвращаются поэтапно в основное состояние, испуская инфракрасное излучение; однако это инфракрасное излучение затем поглощается другими молекулами и отражается от стенок сосуда, включая стеклянную пластину. Таким образом, энергия, поглощённая от лазера, за очень короткое время переходит в энергию теплового движения (хаотического движения молекул) и затем остаётся в газе в течение достаточно длительного времени.

Наблюдается перемещение стеклянной пластины вверх; через некоторое время после начала облучения лазер выключают и измеряют это перемещение.

1. Используя приведённые ниже данные и, при необходимости, данные из листа физических постоянных, вычислите температуру и давление газа после облучения. [2 балла]
2. Вычислите механическую работу, совершённую газом вследствие поглощения излучения. [1 балл]
3. Вычислите энергию излучения, поглощённую за время облучения. [2 балла]
4. Вычислите мощность излучения лазера, поглощаемого газом, и соответствующее число фотонов (а следовательно, и элементарных актов поглощения) в единицу времени. [1.5 балла]
5. Вычислите КПД процесса преобразования оптической энергии в изменение механической потенциальной энергии стеклянной пластины. [1 балл]

Затем ось цилиндра медленно поворачивают на 90° , приводя её в горизонтальное положение. Теплообменом между газом и сосудом по-прежнему можно пренебречь.

6. Укажите, изменяются ли давление и/или температура газа вследствие такого поворота, и, если изменяются, найдите их новые значения. [2.5 балла]

Данные

Давление в помещении: $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

Температура в помещении: $T_0 = 20.0^\circ\text{C}$

Внутренний диаметр цилиндра: $2r = 100 \text{ mm}$

Масса стеклянной пластины: $m = 800 \text{ g}$

Количество вещества газа в сосуде: $n = 0.100 \text{ mol}$

Молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме: $c_V = 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Длина волны излучения лазера: $\lambda = 514 \text{ nm}$

Время облучения: $\Delta t = 10.0 \text{ s}$

Перемещение подвижной пластины после облучения: $\Delta s = 30.0 \text{ mm}$

Физические постоянные и общие данные

Помимо численных данных, приведённых в условиях отдельных задач, могут оказаться полезными некоторые общие данные и физические постоянные, которые вы можете найти ниже. Эти данные близки к наиболее точным из имеющихся в настоящее время и поэтому содержат большое число цифр; однако от вас ожидается, что вы будете записывать результаты с числом цифр, соответствующим каждой задаче.

Скорость света в вакууме: $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Магнитная постоянная: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Электрическая постоянная: $\epsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

Гравитационная постоянная: $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

Универсальная газовая постоянная: $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Постоянная Больцмана: $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Постоянная Стефана — Больцмана: $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

Заряд протона: $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Масса электрона: $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Постоянная Планка: $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Температура нуля шкалы Цельсия: $T_K = 273.15 \text{ K}$

Масса Солнца: $M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Масса Земли: $M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Средний радиус Земли: $r_E = 6.373 \text{ Mm}$

Большая полуось орбиты Земли: $R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Звёздные сутки: $d_S = 86.16406 \text{ ks}$

Год: $y = 31.558150 \text{ Ms}$

Стандартное значение напряжённости гравитационного поля на поверхности Земли:
 $g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Стандартное значение атмосферного давления на уровне моря: $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

Показатель преломления воздуха для видимого света при стандартном давлении и 15°C :
 $n_{\text{air}} = 1.000277$

Солнечная постоянная: $S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

Масса Юпитера: $M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Экваториальный радиус Юпитера: $R_B = 69.8 \text{ Mm}$

Средний радиус орбиты Юпитера: $R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Сутки на Юпитере: $d_J = 35.6 \text{ ks}$

Год на Юпитере: $y_J = 374.32 \text{ Ms}$

$\pi: 3.14159265$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

1. После облучения:

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ\text{C}, \quad p_1 = 102.3 \text{ kPa}.$$

2. Механическая работа, совершённая газом:

$$W = 24.1 \text{ J}.$$

3. Поглощённая энергия излучения:

$$E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J}.$$

4. Поглощаемая мощность лазера и число поглощаемых фотонов в единицу времени:

$$P_{\text{abs}} = 8.44 \text{ W}, \quad \dot{N} = 2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}.$$

5. КПД преобразования энергии в увеличение гравитационной потенциальной энергии пластины:

$$\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%.$$

6. И давление, и температура уменьшаются. После поворота:

$$p_2 = 101.3 \text{ kPa}, \quad T_2 = 321.2 \text{ K} = 48.1^\circ\text{C}.$$

Решение

Используем приближение идеального газа и заданную постоянную молярную теплоёмкость; теплообменом с окружающей средой и потерями энергии на трение пренебрегаем. В начальном и конечном состояниях макроскопическая кинетическая энергия отсутствует. Ниже используется давление в помещении, указанное в условии этой задачи: $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$.

Площадь поперечного сечения цилиндра и измеренное увеличение объёма равны

$$A = \pi r^2 = \pi(0.0500)^2 = 7.85398 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \\ \Delta V = A \Delta s = (7.85398 \times 10^{-3})(0.0300) = 2.35619 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

1. Температура и давление после облучения

При механическом равновесии в вертикальном положении направленная вверх сила давления газа уравнивает силу атмосферного давления и силу тяжести пластины:

$$p_1 A = p_0 A + mg.$$

Отсюда

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{A} = 101300 + \frac{(0.800)(9.80665)}{7.85398 \times 10^{-3}} = 102298.9 \text{ Pa.}$$

То же условие равновесия выполняется до облучения, поэтому начальное и конечное давления газа равны:

$$p_1 = 102.3 \text{ kPa.}$$

Пусть V_0 и V_1 — объёмы газа до и после облучения. Применяя уравнение состояния идеального газа к обоим состояниям, получаем

$$p_1 V_0 = nRT_0, \quad p_1 V_1 = nRT_1.$$

Вычитая, находим

$$p_1 \Delta V = nR(T_1 - T_0).$$

При $T_0 = 293.15 \text{ K}$

$$T_1 - T_0 = \frac{(102298.9)(2.35619 \times 10^{-4})}{(0.100)(8.314510)} = 28.9898 \text{ K.}$$

Следовательно,

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ \text{C.}$$

2. Механическая работа, совершённая газом

Противодействующая сила $p_0 A + mg$ постоянна. При пренебрежимо малых потерях на трение и нулевой начальной и конечной кинетической энергии пластины газ совершает работу

$$W = (p_0 A + mg)\Delta s = p_0 \Delta V + mg\Delta s = p_1 \Delta V.$$

Численно

$$W = (102298.9)(2.35619 \times 10^{-4}) = 24.1036 \text{ J,}$$

так что

$$W = 24.1 \text{ J.}$$

Она складывается из работы против атмосферного давления, равной 23.8683 J, и работы по подъёму пластины, равной 0.235360 J.

3. Поглощённая энергия излучения

Поглощённое излучение быстро превращается в тепловую энергию. Закон сохранения энергии, если считать работу положительной, когда её совершает газ, даёт

$$E_{\text{abs}} = \Delta U + W.$$

Для идеального газа

$$\Delta U = nc_V(T_1 - T_0) = (0.100)(20.8)(28.9898) = 60.2988 \text{ J.}$$

Следовательно,

$$E_{\text{abs}} = 60.2988 + 24.1036 = 84.4024 \text{ J,}$$

или

$$E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J.}$$

Эквивалентно, поскольку $W = nR(T_1 - T_0)$,

$$E_{\text{abs}} = n(c_V + R)(T_1 - T_0) = nc_P(T_1 - T_0),$$

где

$$c_P = c_V + R = 29.114510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

4. Поглощаемая мощность и число поглощаемых фотонов в единицу времени

Мощность лазера постоянна, поэтому

$$P_{\text{abs}} = \frac{E_{\text{abs}}}{\Delta t} = \frac{84.4024}{10.0} = 8.44 \text{ W.}$$

Каждый падающий фотон лазерного излучения обладает энергией

$$\varepsilon_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.6260755 \times 10^{-34})(299792458)}{514 \times 10^{-9}} = 3.86468 \times 10^{-19} \text{ J.}$$

Все падающие фотоны лазерного излучения, поступающие в газ, поглощаются, поэтому число поглощаемых фотонов в единицу времени равно

$$\dot{N} = \frac{P_{\text{abs}}}{\varepsilon_\gamma} = \frac{8.44024}{3.86468 \times 10^{-19}} = 2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}.$$

Это также число элементарных актов поглощения фотонов лазерного излучения в единицу времени.

5. КПД преобразования энергии в потенциальную энергию пластины

Гравитационная потенциальная энергия пластины увеличивается на

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg\Delta s = (0.800)(9.80665)(0.0300) = 0.235360 \text{ J.}$$

Следовательно, искомый КПД равен

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{E_{\text{abs}}} = \frac{0.235360}{84.4024} = 2.78854 \times 10^{-3}.$$

Таким образом,

$$\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%.$$

Его малое значение обусловлено затратами энергии на нагрев газа и вытеснение окружающего воздуха.

6. Давление и температура после поворота

Пусть θ — угол между осью цилиндра и вертикалью, направленной вверх. Во время медленного поворота условие механического равновесия вдоль оси даёт

$$p(\theta)A = p_0A + mg \cos \theta,$$

так что

$$p(\theta) = p_0 + \frac{mg}{A} \cos \theta.$$

При $\theta = 90^\circ$ сила тяжести пластины не имеет составляющей вдоль оси. Следовательно,

$$p_2 = p_0 = 101.3 \text{ kPa.}$$

Поворот происходит медленно, а теплообмен и диссипация энергии вследствие трения пренебрежимо малы. Поэтому газ испытывает квазистатическое адиабатическое расширение. Первое начало термодинамики даёт

$$nc_V dT = -p dV.$$

Используя $p = nRT/V$, получаем

$$c_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}.$$

Интегрирование даёт

$$TV^{R/c_V} = \text{постоянная},$$

или, вводя обозначение

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1.399736,$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{постоянная}.$$

Исключая объём с помощью уравнения состояния идеального газа, получаем

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{R/(c_V+R)}.$$

Следовательно,

$$T_2 = 322.1398 \left(\frac{101300}{102298.9} \right)^{8.314510/29.114510} = 321.2384 \text{ К}.$$

Таким образом,

$$T_2 = 321.2 \text{ К} = 48.1^\circ \text{С}.$$

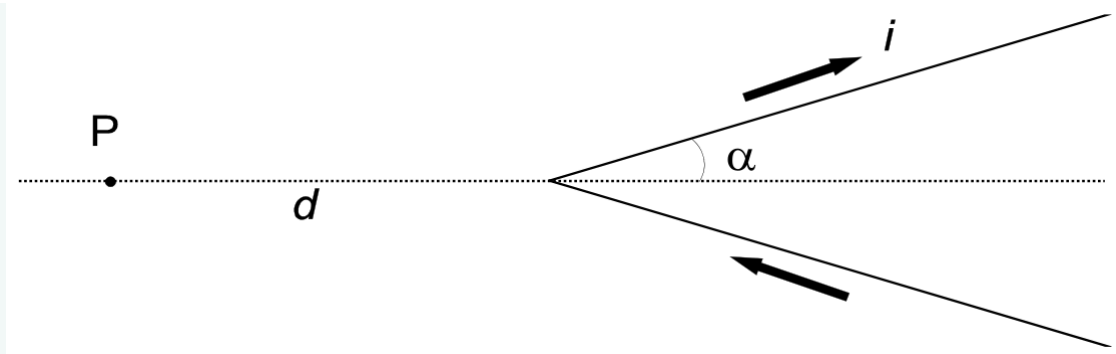
И давление, и температура уменьшаются; температура падает примерно на 0.90 К, поскольку расширяющийся газ совершает работу за счёт своей внутренней энергии.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Магнитное поле V-образного провода

Одним из первых успехов предложенного Ампером объяснения магнитных явлений стало вычисление магнитного поля $\mathbf{B}$, создаваемого проводами с электрическим током, в сравнении с первоначальными предположениями Био и Савара.

Особенно интересен случай очень длинного тонкого провода, по которому течёт постоянный ток i : провод состоит из двух прямолинейных участков и согнут в форме буквы V с половинным углом раствора¹ α (см. рисунок). Согласно вычислениям Ампера, модуль B магнитного поля в заданной точке P, лежащей на оси V вне угла на расстоянии d от его вершины, пропорционален $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Позднее работа Ампера вошла в электромагнитную теорию Максвелла и получила всеобщее признание.



Используя современные знания об электромагнетизме,

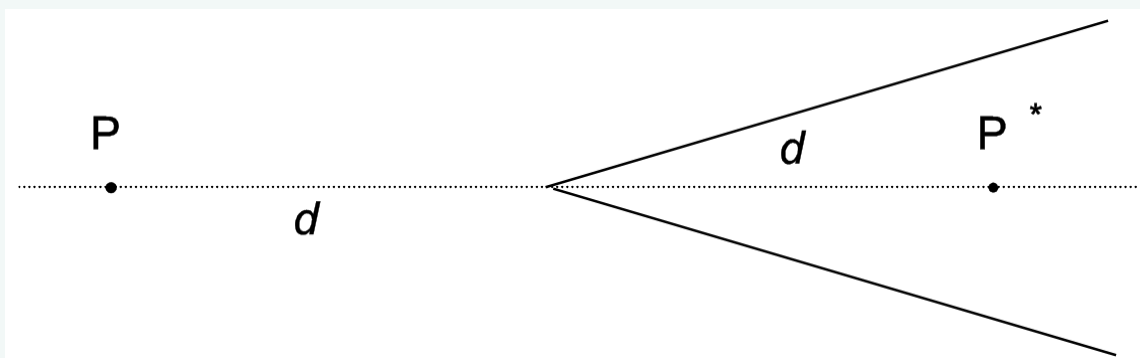
1. Найдите направление поля $\mathbf{B}$ в точке P. [1 балл]
2. Зная, что поле пропорционально $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, найдите коэффициент пропорциональности k в выражении

$$|\mathbf{B}(P)| = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

[1.5 балла]

3. Вычислите поле $\mathbf{B}$ в точке P^* , симметричной точке P относительно вершины, то есть лежащей на оси на том же расстоянии d , но внутри угла V (см. рисунок). [2 балла]

¹ Во всей задаче α выражается в радианах



4. Для измерения магнитного поля поместим в точку P небольшую магнитную стрелку с моментом инерции I и магнитным дипольным моментом μ ; она колеблется вокруг неподвижной точки в плоскости, содержащей направление $\mathbf{B}$. Вычислите период малых колебаний этой стрелки как функцию B . [2.5 балла]

Для тех же условий Био и Савар, напротив, предполагали, что магнитное поле в точке P могло бы определяться выражением (здесь мы используем современные обозначения) $B(P) = \frac{i\mu_0\alpha}{\pi^2 d}$, где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума. Они действительно пытались экспериментально сделать выбор между двумя объяснениями (Ампера и Био и Савара), измеряя период колебаний магнитной стрелки в зависимости от угла раствора V. Однако при некоторых значениях α различия слишком малы, чтобы их можно было легко измерить.

5. Если для экспериментального различения двух предсказаний периода T колебаний магнитной стрелки в точке P требуется различие не менее 10%, а именно $T_1 > 1.10 T_2$ (где T_1 — предсказание Ампера, а T_2 — предсказание Био и Савара),

укажите, в каком приблизительно диапазоне следует выбирать половинный угол раствора $V \alpha$, чтобы можно было сделать выбор между двумя объяснениями. [3 балла]

Указание

В зависимости от выбранного способа решения может оказаться полезным следующее тригонометрическое равенство:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Физические постоянные и общие данные

Помимо численных данных, приведённых в тексте отдельных задач, могут пригодиться некоторые общие данные и физические постоянные, которые вы найдёте ниже. Эти данные близки к наиболее точным из имеющихся в настоящее время и поэтому содержат большое число цифр; однако в ваших результатах число значащих цифр должно соответствовать каждой конкретной задаче.

Скорость света в вакууме: $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Магнитная проницаемость вакуума: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Диэлектрическая проницаемость вакуума: $\varepsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

Гравитационная постоянная: $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

Универсальная газовая постоянная: $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Постоянная Больцмана: $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Постоянная Стефана — Больцмана: $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

Заряд протона: $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Масса электрона: $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Постоянная Планка: $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Начало шкалы Цельсия: $T_K = 273.15 \text{ K}$

Масса Солнца: $M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Масса Земли: $M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Средний радиус Земли: $r_E = 6.373 \text{ Mm}$

Большая полуось орбиты Земли: $R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Звёздные сутки: $d_S = 86.16406 \text{ ks}$

Год: $y = 31.558150 \text{ Ms}$

Стандартное значение ускорения свободного падения на поверхности Земли:

$g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Стандартное значение атмосферного давления на уровне моря: $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

Показатель преломления воздуха для видимого света при стандартном давлении и 15°C :

$n_{\text{air}} = 1.000277$

Солнечная постоянная: $S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

Масса Юпитера: $M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Экваториальный радиус Юпитера: $R_B = 69.8 \text{ Mm}$

Средний радиус орбиты Юпитера: $R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Сутки на Юпитере: $d_J = 35.6 \text{ ks}$

Год на Юпитере: $y_J = 374.32 \text{ Ms}$

$\pi: 3.14159265$

Ответы

Пусть $\hat{\mathbf{z}}$ направлен из плоскости страницы к читателю, а $\mu = |\boldsymbol{\mu}|$.

1. Поле в точке P направлено **перпендикулярно плоскости провода, из плоскости страницы к читателю**.

2.
$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}, \quad \mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

3.
$$\mathbf{B}(P^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}},$$

направлено **в плоскость страницы от читателя**.

4.
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

5. Для указанного строгого неравенства $T_1 > 1.10T_2$,

$$0 < \alpha < \alpha_c, \quad \alpha_c \simeq 0.768 \text{ rad} \simeq 44.0^\circ.$$

При $\alpha = \alpha_c$ различие составляет ровно 10%.

Решение

Будем рассматривать два длинных тонких плеча как полубесконечные прямые провода в вакууме. Как показано на рисунке, ток течёт к вершине по нижнему плечу и от вершины по верхнему. Выберем вершину в качестве начала координат, направив положительную ось x внутрь угла V , а $\hat{\mathbf{z}}$ — из плоскости страницы к читателю.

1. Направление поля в точке P

Современный закон Био — Савара — Лапласа имеет вид

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

где $d\boldsymbol{\ell}$ направлен по току, а $\mathbf{R}$ — от элемента тока к точке наблюдения.

Оба вектора лежат в плоскости рисунка, поэтому каждый вклад перпендикулярен этой плоскости. В точке P по правилу правой руки вклад каждого плеча направлен из плоскости страницы к читателю: по нижнему плечу ток течёт к вершине, а по верхнему — от неё. Таким образом, их вклады складываются:

$$\mathbf{B}(P) \text{ направлено из плоскости страницы к читателю.}$$

2. Определение k

Угловая зависимость задана:

$$B(P) = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Рассмотрим предельную конфигурацию $\alpha = \pi/2$. Тогда два плеча образуют один бесконечный прямой провод, а расстояние от точки P до него по перпендикуляру равно d .

Для этого прямого провода из цилиндрической симметрии и теоремы о циркуляции магнитного поля следует

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B(2\pi d) = \mu_0 i.$$

Следовательно,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

Поскольку $\tan(\pi/4) = 1$, получаем

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

Используя приведённое значение магнитной проницаемости,

$$k = (2 \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}) \frac{i}{d}.$$

Поэтому

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

3. Поле в точке P*

В точке P* по правилу правой руки поле каждого из исходных плеч направлено в плоскость страницы от читателя.

Чтобы найти его модуль, продолжим оба плеча за вершину, сохраняя направления токов, так чтобы каждое из них стало бесконечным прямым проводом. Расстояние по перпендикуляру от P* до каждого из полученных проводов равно

$$\rho = d \sin \alpha.$$

Каждый полученный провод создаёт поле, направленное в плоскость страницы от читателя, с модулем

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi \rho}.$$

Поэтому модуль их суммарного поля равен

$$B_{\text{complete}} = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

Две добавленные полупрямые образуют V, раскрытую влево и являющуюся зеркальным отражением исходного провода. Относительно этой добавленной V точка P* лежит на оси вне угла на расстоянии d . Следовательно, модуль создаваемого ею поля равен $B(P)$, а по правилу правой руки оно также направлено в плоскость страницы от читателя.

Таким образом, по принципу суперпозиции

$$B(P^*) + B(P) = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

Подставляя результат пункта 2,

$$B(P^*) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \left[\frac{2}{\sin \alpha} - \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right].$$

Используя равенство

$$\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

преобразуем выражение в скобках:

$$\frac{2 - (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

Отсюда

$$\mathbf{B}(P^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot \left(\frac{\alpha}{2} \right) \hat{\mathbf{z}}.$$

4. Период малых колебаний

Будем рассматривать небольшую стрелку как магнитный диполь в поле, однородном на протяжении её длины, пренебрегая затуханием и другими моментами сил. Обозначим через θ угол между её магнитным моментом и полем.

Момент сил, действующих на магнитный диполь, равен

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}.$$

Равновесие, при котором $\boldsymbol{\mu}$ сонаправлен с $\mathbf{B}$, устойчиво. Считая θ отклонением от этого положения равновесия, запишем уравнение вращательного движения:

$$I\ddot{\theta} = -\mu B \sin \theta.$$

Для малых колебаний $|\theta| \ll 1$ рад и $\sin \theta \simeq \theta$, поэтому

$$\ddot{\theta} + \frac{\mu B}{I} \theta = 0.$$

Это простое гармоническое движение с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu B}{I}},$$

и, следовательно,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

Если I , μ и B выражены в единицах СИ, период получается в секундах.

5. Диапазон углов, при котором различие периодов превышает 10%

Два предсказания поля в точке Р имеют вид

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right), \quad B_2 = \frac{\mu_0 i \alpha}{\pi^2 d},$$

где второе выражение соответствует историческому предположению, приведённому в условии задачи.

Поскольку $T \propto B^{-1/2}$,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)}}.$$

Экспериментальное требование принимает вид

$$\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)} > 1.10^2 = 1.21.$$

Отношение периодов уменьшается с увеличением α . Чтобы убедиться в этом, положим $x = \alpha/2$; квадрат этого отношения пропорционален $x \cot x$, причём

$$\frac{d}{dx}(x \cot x) = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} < 0,$$

поскольку для рассматриваемых положительных углов $\sin(2x) < 2x$.

Его предельные значения равны

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \simeq 1.1284, \quad \left. \frac{T_1}{T_2} \right|_{\alpha=\pi/2} = 1.$$

Таким образом, существует единственное пороговое значение, разделяющее диапазоны, в которых предсказания различимы и неразличимы.

Численное решение уравнения

$$\frac{2\alpha_c}{\pi \tan(\alpha_c/2)} = 1.21$$

даёт

$$\alpha_c \simeq 0.7682 \text{ rad} \simeq 44.01^\circ.$$

Следовательно, требуемый половинный угол раствора приблизительно удовлетворяет условию

$$0 < \alpha < 0.77 \text{ rad} \quad (\text{приблизительно меньше } 44^\circ).$$

Точное пороговое значение включается в диапазон, если выражение «не менее 10%» понимать как допускающее равенство; явно записанное строгое неравенство его исключает.

Вырожденное значение $\alpha = 0$ исключается, поскольку оба поля обращаются в нуль и конечного периода магнитных колебаний не существует.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Космический зонд к Юпитеру

В этой задаче рассматривается метод, часто используемый для ускорения космических зондов в нужном направлении. Пролетая вблизи планеты, космический зонд может существенно увеличить свою скорость и значительно изменить направление полёта, отняв очень небольшую часть энергии орбитального движения планеты. Здесь мы анализируем этот эффект для космического зонда, пролетающего вблизи Юпитера.

Планета Юпитер обращается вокруг Солнца по эллиптической траектории, которую можно приближённо считать окружностью со средним радиусом R ; чтобы приступить к анализу этой физической ситуации, сначала необходимо:

1. Найти скорость V планеты на её орбите вокруг Солнца. [1.5 балла]
2. Когда зонд находится между Солнцем и Юпитером (на отрезке Солнце—Юпитер), найти расстояние от Юпитера, на котором сила гравитационного притяжения Солнца уравнивается силой притяжения Юпитера. [1 балл]

Космический зонд массой $m = 825 \text{ kg}$ пролетает вблизи Юпитера. Для простоты предположим, что траектория космического зонда целиком лежит в плоскости орбиты Юпитера; тем самым мы не рассматриваем важный случай, когда космический зонд выбрасывается из плоскости орбиты Юпитера.

Мы рассматриваем только то, что происходит в области, где сила притяжения Юпитера значительно превосходит все остальные гравитационные силы.

В системе отсчёта центра масс Солнца начальная скорость космического зонда равна $v_0 = 1.00 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ (и направлена вдоль положительного направления оси y), тогда как скорость Юпитера направлена вдоль отрицательного направления оси x (см. рисунок 1); под «начальной скоростью» мы понимаем скорость космического зонда в межпланетном пространстве, когда он ещё далёк от Юпитера, но уже находится в области, где притяжение Солнца пренебрежимо мало по сравнению с притяжением Юпитера. Мы предполагаем, что сближение происходит за достаточно короткое время, чтобы можно было пренебречь изменением направления движения Юпитера по его орбите вокруг Солнца. Мы также предполагаем, что зонд проходит позади Юпитера, то есть при одинаковой координате y координата x зонда больше, чем координата x Юпитера.

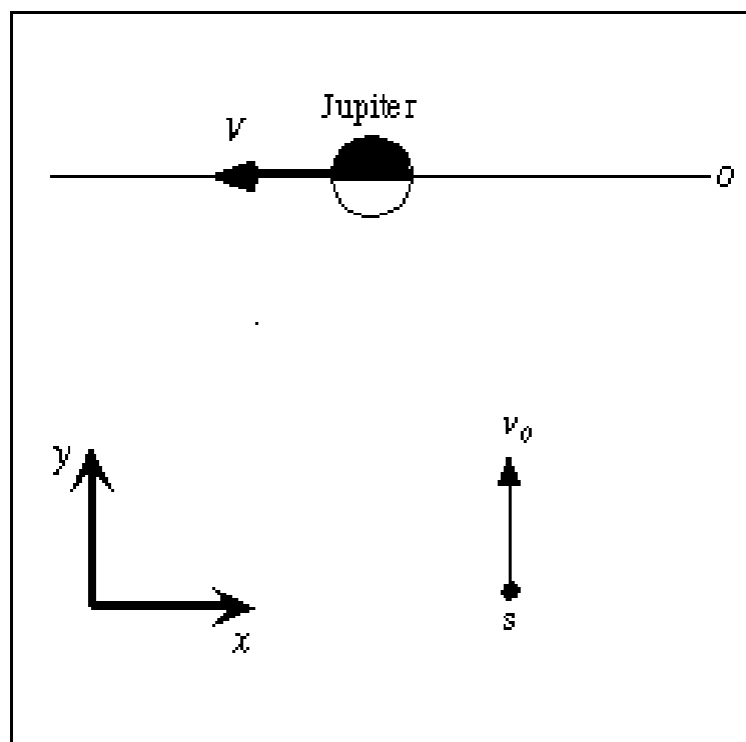


Рисунок 1: Вид в системе отсчёта центра масс Солнца. O обозначает орбиту Юпитера, s — космический зонд.

3. Найти направление движения космического зонда (в виде угла φ между направлением его движения и осью x) и его скорость v' в системе отсчёта Юпитера, когда зонд ещё находится далеко от Юпитера. [2 балла]
4. Найти значение полной механической энергии E космического зонда в системе отсчёта Юпитера, положив, как обычно, его потенциальную энергию равной нулю на очень большом расстоянии — в данном случае, когда зонд находится достаточно далеко, чтобы двигаться с практически постоянной скоростью вследствие малости всех гравитационных взаимодействий. [1 балл]

Траектория космического зонда в системе отсчёта Юпитера представляет собой гиперболу, уравнение которой в полярных координатах в этой системе отсчёта имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right). \quad (1)$$

где b — расстояние между одной из асимптот и Юпитером (так называемый *прицельный параметр*), E — полная механическая энергия зонда в системе отсчёта Юпитера, G — гравитационная постоянная, M — масса Юпитера, r и θ — полярные координаты (радиальное расстояние и полярный угол).

На рисунке 2 показаны две ветви гиперболы, описываемой уравнением (1); также показаны асимптоты и полярные координаты. Обратите внимание, что начало координат в уравнении (1) находится в «притягивающем фокусе» гиперболы. Траектория космического зонда соответствует движению под действием силы притяжения (выделенная ветвь).

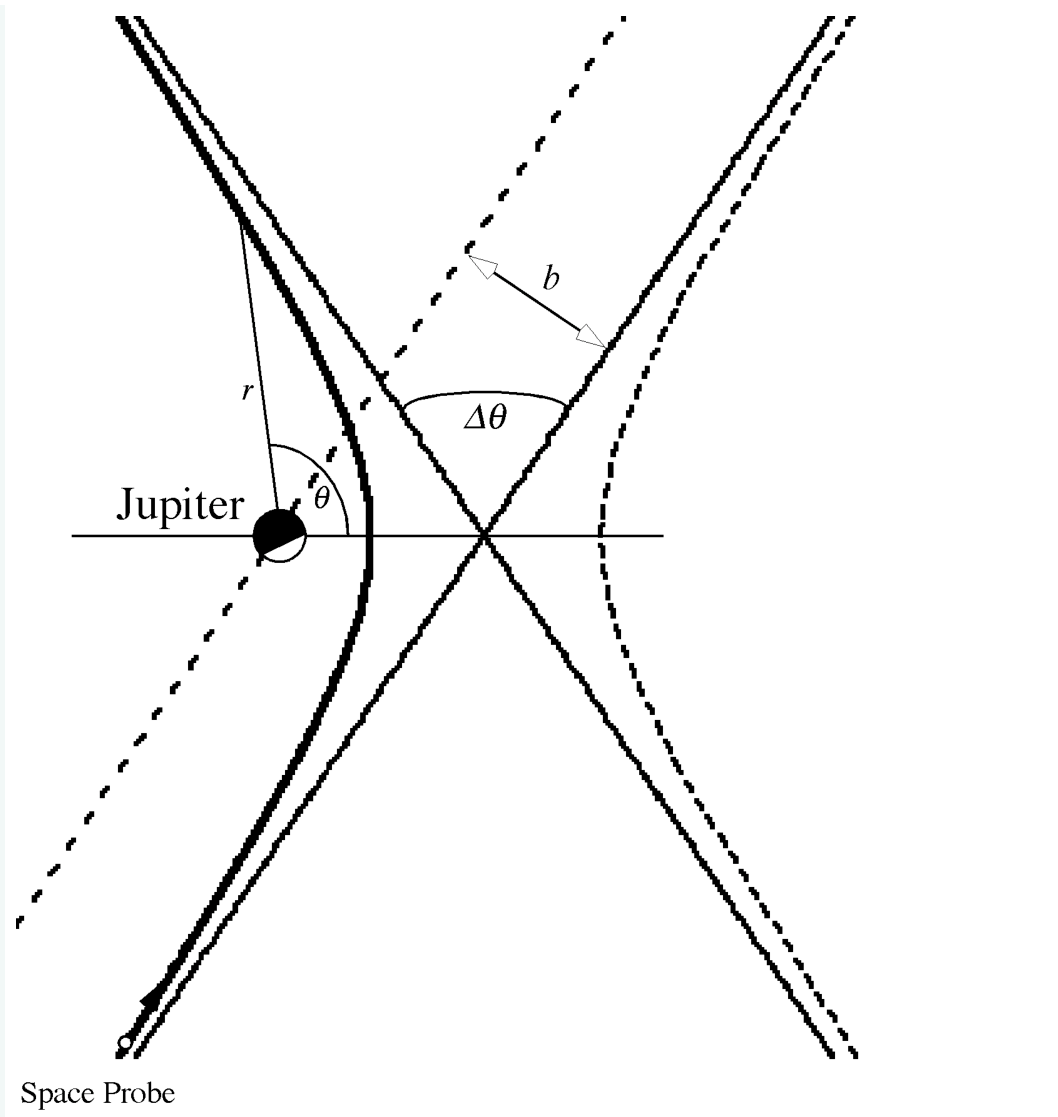


Рисунок 2

5. Используя уравнение (1), описывающее траекторию космического зонда, найти полный угол отклонения $\Delta\theta$ в системе отсчёта Юпитера (как показано на рисунке 2) и выразить его как функцию начальной скорости v' и прицельного параметра b . [2 балла]
6. Предположим, что зонд не может проходить мимо Юпитера на расстоянии от центра планеты менее трёх радиусов Юпитера; найти минимально возможный прицельный параметр и максимально возможный угол отклонения. [1 балл]
7. Найти выражение для конечной скорости v'' зонда в системе отсчёта Солнца, зависящее только от скорости Юпитера V , начальной скорости зонда v_0 и угла отклонения $\Delta\theta$. [1 балл]
8. Используя предыдущий результат, найти численное значение конечной скорости v'' в системе отсчёта Солнца, когда угол отклонения имеет максимально возможное значение. [0.5 балла]

Подсказка

В зависимости от выбранного способа решения вам могут пригодиться следующие тригонометрические формулы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Физические постоянные и общие данные

Помимо численных данных, приведённых в условиях отдельных задач, могут пригодиться некоторые общие данные и физические постоянные, которые вы найдёте в следующем списке. Эти данные близки к наиболее точным из доступных в настоящее время и поэтому содержат большое число цифр; однако в своих результатах следует оставлять число цифр, соответствующее точности каждой задачи.

Скорость света в вакууме:	$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Магнитная постоянная:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Электрическая постоянная:	$\varepsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$
Гравитационная постоянная:	$G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Универсальная газовая постоянная:	$R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
Постоянная Больцмана:	$k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Постоянная Стефана—Больцмана:	$\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Заряд протона:	$e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Масса электрона:	$m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Постоянная Планка:	$h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Начало шкалы Цельсия:	$T_K = 273.15 \text{ K}$
Масса Солнца:	$M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Масса Земли:	$M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Средний радиус Земли:	$r_E = 6.373 \text{ Mm}$
Большая полуось земной орбиты:	$R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Звёздные сутки:	$d_S = 86.16406 \text{ ks}$
Год:	$y = 31.558150 \text{ Ms}$
Стандартное значение ускорения свободного падения на поверхности Земли:	$g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Стандартное значение атмосферного давления на уровне моря:	$p_0 = 101325 \text{ Pa}$
Показатель преломления воздуха для видимого света при стандартном давлении и 15 °C:	$n_{\text{air}} = 1.000277$
Солнечная постоянная:	$S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
Масса Юпитера:	$M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
Экваториальный радиус Юпитера:	$R_B = 69.8 \text{ Mm}$
Средний радиус орбиты Юпитера:	$R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Юпитерианские сутки:	$d_J = 35.6 \text{ ks}$
Юпитерианский год:	$y_J = 374.32 \text{ Ms}$
π :	3.14159265

Ответы

1. Орбитальная скорость Юпитера равна

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \simeq 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

2. Расстояние от Юпитера в направлении Солнца равно

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_S/M}} \simeq 2.33 \times 10^{10} \text{ m}.$$

3. Начальная скорость в системе отсчёта Юпитера равна
- $\mathbf{v}'_i = (V, v_0)$
- . Следовательно,

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{V}\right) = 37.4^\circ, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2} = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Угол отсчитывается против часовой стрелки от положительного направления оси x .

4. Полная механическая энергия в системе отсчёта Юпитера равна

$$E = \frac{1}{2}m(V^2 + v_0^2) = 1.12 \times 10^{11} \text{ J}.$$

5. Угол отклонения равен

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{GM}{b v'^2}\right).$$

6. При
- $r_0 = 3R_B$

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}} = 4.90 \times 10^8 \text{ m},$$

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{1 + r_0 v'^2/(GM)}\right) = 87.4^\circ \simeq 1.53 \text{ rad}.$$

7. Конечная скорость в системе отсчёта Солнца равна

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2V v_0 \sin \Delta\theta}.$$

8. При максимально допустимом отклонении

$$v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.$$

Решение

Используем ньютоновский закон всемирного тяготения и приближения, указанные в условии. Орбита Юпитера круговая, а его скорость за время сближения практически постоянна. Масса зонда пренебрежимо мала по сравнению с массой Юпитера. Во время пролёта мы

пренебрегаем силой притяжения Солнца, поэтому систему отсчёта Юпитера считаем инерциальной, а зонд движется в поле с потенциальной энергией

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

Под начальной и конечной скоростями понимаются асимптотические скорости в этом приближении задачи двух тел. В численных расчётах промежуточные значения сохраняются без округления.

1. Орбитальная скорость Юпитера

Сила гравитационного притяжения Солнца служит центростремительной силой для Юпитера:

$$\frac{GM_S M}{R^2} = \frac{MV^2}{R}.$$

Следовательно,

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}.$$

Используя приведённые постоянные, получаем

$$V = \sqrt{\frac{(6.67259 \times 10^{-11})(1.991 \times 10^{30})}{7.783 \times 10^{11}}} = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Таким образом,

$$\boxed{V = 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.}$$

Альтернативный расчёт для круговой орбиты по формуле $V = 2\pi R/y_J$ даёт $1.30642 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$, что согласуется с приведённым результатом в пределах указанной точности.

2. Точка, в которой силы гравитационного притяжения уравновешиваются

Пусть d — расстояние от Юпитера в направлении Солнца. Тогда расстояние от Солнца равно $R - d$. Две силы гравитационного притяжения направлены противоположно, поэтому условие их равновесия имеет вид

$$\frac{GMm}{d^2} = \frac{GM_S m}{(R - d)^2}.$$

Извлекая положительные квадратные корни, получаем

$$\frac{R - d}{d} = \sqrt{\frac{M_S}{M}}.$$

Решая уравнение, находим

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_S/M}}.$$

Численно

$$d = \frac{7.783 \times 10^{11}}{1 + \sqrt{(1.991 \times 10^{30})/(1.901 \times 10^{27})}} = 2.33285 \times 10^{10} \text{ m}.$$

Следовательно,

$$d = 2.33 \times 10^{10} \text{ m.}$$

3. Начальное движение в системе отсчёта Юпитера

В системе отсчёта Солнца начальные скорости равны

$$\mathbf{v}_i = v_0 \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{V}_J = -V \hat{\mathbf{x}}.$$

Преобразование скоростей Галилея даёт

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}_J = V \hat{\mathbf{x}} + v_0 \hat{\mathbf{y}}.$$

Обе компоненты положительны, поэтому вектор скорости направлен в первую координатную четверть:

$$\tan \varphi = \frac{v_0}{V}, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2}.$$

Численно

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{1.00 \times 10^4}{1.30650 \times 10^4} \right) = 37.4306^\circ,$$

$$v' = \sqrt{(1.30650 \times 10^4)^2 + (1.00 \times 10^4)^2} = 1.64528 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Таким образом,

$$\varphi = 37.4^\circ, \quad v' = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

4. Полная механическая энергия в системе отсчёта Юпитера

Потенциальная энергия обращается в нуль на бесконечно большом расстоянии. Поэтому сохраняющаяся полная энергия равна начальной асимптотической кинетической энергии:

$$E = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m (V^2 + v_0^2).$$

Подстановка даёт

$$E = \frac{1}{2} (825) (1.64528 \times 10^4)^2 = 1.11661 \times 10^{11} \text{ J.}$$

Следовательно,

$$E = 1.12 \times 10^{11} \text{ J.}$$

Её положительное значение согласуется с незамкнутой гиперболической орбитой.

5. Угол отклонения

Используя $E = \frac{1}{2} m v'^2$, запишем уравнение (1) в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

где

$$p = \frac{v'^2 b^2}{GM}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2 v'^4}{G^2 M^2}} > 1.$$

При приближении к любой из асимптот $r \rightarrow \infty$, поэтому

$$1 + e \cos \theta = 0.$$

Обозначим асимптотические полярные углы через $\pm\theta_\infty$, где

$$\cos \theta_\infty = -\frac{1}{e}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta_\infty < \pi.$$

На входящей асимптоте скорость направлена противоположно радиальному направлению.

Поэтому угол между ней и осью, проходящей через перицентр, равен $\pi - \theta_\infty$. На выходящей асимптоте скорость направлена вдоль радиального направления и образует угол θ_∞ . Разность этих углов равна

$$\Delta\theta = \theta_\infty - (\pi - \theta_\infty) = 2\theta_\infty - \pi.$$

Отсюда следует, что

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} = \sin \left(\theta_\infty - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \theta_\infty = \frac{1}{e}.$$

Поскольку $0 < \Delta\theta/2 < \pi/2$,

$$\tan \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{GM}{bv'^2}.$$

Таким образом,

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{bv'^2} \right).$$

Эквивалентная запись:

$$\Delta\theta = 2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + b^2 v'^4 / (G^2 M^2)}} \right].$$

6. Минимальный прицельный параметр и максимальный угол отклонения

Пусть r_p — наименьшее расстояние до центра Юпитера, а v_p — скорость в этой точке. Закон сохранения энергии даёт

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2}mv'^2,$$

откуда

$$v_p^2 = v'^2 + \frac{2GM}{r_p}.$$

Сила является центральной, поэтому момент импульса относительно Юпитера сохраняется. В точке наибольшего сближения скорость перпендикулярна радиусу:

$$mbv' = mr_p v_p.$$

Возводя в квадрат и подставляя результат, полученный из закона сохранения энергии, находим

$$b^2 v'^2 = r_p^2 \left(v'^2 + \frac{2GM}{r_p} \right),$$

откуда

$$b^2 = r_p^2 + \frac{2GM r_p}{v'^2}.$$

Это выражение возрастает с увеличением r_p . Поэтому наименьший допустимый прицельный параметр достигается при

$$r_p = r_0 = 3R_B = 3(69.8 \times 10^6) \text{ m}.$$

Следовательно,

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}}.$$

Используя

$$GM = 1.268459359 \times 10^{17} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2},$$

получаем

$$b_{\min} = 4.89996 \times 10^8 \text{ m},$$

или

$$\boxed{b_{\min} = 4.90 \times 10^8 \text{ m}.}$$

Угол отклонения уменьшается с увеличением b , поэтому его максимум достигается при $b_{\min}$. Таким образом,

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{b_{\min} v'^2} \right).$$

Чтобы выразить его непосредственно через наименьшее расстояние, подставим соотношение для $b_{\min}^2$ в выражение для эксцентриситета:

$$e_{\min}^2 = 1 + \frac{b_{\min}^2 v'^4}{G^2 M^2} = \left(1 + \frac{r_0 v'^2}{GM} \right)^2.$$

Следовательно,

$$e_{\min} = 1 + \frac{r_0 v'^2}{GM} = 1.44687$$

и

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{e_{\min}} \right) = 1.52615 \text{ rad} = 87.4421^\circ.$$

Таким образом,

$$\boxed{\Delta\theta_{\max} = 87.4^\circ.}$$

7. Конечная скорость в системе отсчёта Солнца

Из закона сохранения энергии в системе отсчёта Юпитера следует, что модуль выходящей асимптотической скорости по-прежнему равен v' .

Поскольку зонд проходит позади Юпитера, гравитационное отклонение поворачивает вектор его скорости против часовой стрелки в заданной системе координат x, y . Поэтому выходящая относительная скорость образует угол $\varphi + \Delta\theta$ с положительным направлением оси x :

$$\mathbf{v}'_f = v' \cos(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{x}} + v' \sin(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{y}}.$$

Используя

$$v' \cos \varphi = V, \quad v' \sin \varphi = v_0,$$

из формул сложения получаем

$$\begin{aligned}v'_{f,x} &= V \cos \Delta\theta - v_0 \sin \Delta\theta, \\v'_{f,y} &= V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta.\end{aligned}$$

Для обратного перехода в систему отсчёта Солнца необходимо прибавить скорость Юпитера $-V\hat{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned}v''_x &= V(\cos \Delta\theta - 1) - v_0 \sin \Delta\theta, \\v''_y &= V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}v''^2 &= (v''_x)^2 + (v''_y)^2 \\&= V^2 [(\cos \Delta\theta - 1)^2 + \sin^2 \Delta\theta] \\&\quad + v_0^2 [\sin^2 \Delta\theta + \cos^2 \Delta\theta] + 2Vv_0 \sin \Delta\theta \\&= 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + v_0^2 + 2Vv_0 \sin \Delta\theta.\end{aligned}$$

Таким образом, искомое выражение имеет вид

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2Vv_0 \sin \Delta\theta}.$$

Для проверки согласованности положим $\Delta\theta = 0$, что даёт $v'' = v_0$.

8. Конечная скорость при максимальном угле отклонения

Подстановка неокруглённых значений

$$V = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad v_0 = 1.00 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad \Delta\theta_{\max} = 1.52615 \text{ rad},$$

даёт

$$\begin{aligned}v'' &= \left[(1.00 \times 10^4)^2 + 2(1.30650 \times 10^4)^2(1 - \cos 1.52615) \right. \\&\quad \left. + 2(1.30650 \times 10^4)(1.00 \times 10^4) \sin 1.52615 \right]^{1/2} \\&= 2.62144 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.$$

Сила притяжения Юпитера изменяет направление асимптотической скорости зонда в системе отсчёта Юпитера. Это изменение приводит к увеличению скорости и кинетической энергии в системе отсчёта Солнца за счёт пренебрежимо малого уменьшения орбитальной энергии Юпитера.

Решение проверено по официальному решению.