

IPhO 1999

Problemas teóricos y soluciones · Padua, Italia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1999/

Problema 1: Absorción de radiación por un gas

Un recipiente cilíndrico, con su eje vertical, contiene un gas molecular en equilibrio termodinámico. La base superior del cilindro puede desplazarse libremente y está constituida por una placa de vidrio; supongamos que no hay fugas de gas y que el rozamiento entre la placa de vidrio y las paredes del cilindro es justo el suficiente para amortiguar las oscilaciones, pero no implica ninguna pérdida de energía significativa en comparación con las demás energías involucradas. Inicialmente, la temperatura del gas es igual a la del ambiente circundante. El gas puede considerarse ideal con buena aproximación. Supongamos que las paredes del cilindro (incluidas las bases) tienen una conductividad térmica y una capacidad calorífica muy bajas y, por tanto, la transferencia de calor entre el gas y el ambiente es muy lenta y puede despreciarse en la resolución de este problema.

A través de la placa de vidrio enviamos al interior del cilindro la luz emitida por un láser de potencia constante; esta radiación se transmite fácilmente a través del aire y del vidrio, pero es absorbida por completo por el gas del interior del recipiente. Al absorber esta radiación, las moléculas alcanzan estados excitados, en los que emiten rápidamente radiación infrarroja y regresan por etapas al estado fundamental molecular; sin embargo, esta radiación infrarroja es absorbida a su vez por otras moléculas y reflejada por las paredes del recipiente, incluida la placa de vidrio. Por tanto, la energía absorbida del láser se transforma en un tiempo muy breve en movimiento térmico (caos molecular) y permanece después en el gas durante un tiempo suficientemente largo.

Observamos que la placa de vidrio se mueve hacia arriba; tras un cierto tiempo de irradiación, apagamos el láser y medimos este desplazamiento.

1. Utilizando los datos que figuran a continuación y, si es necesario, los de la hoja de constantes físicas, calcule la temperatura y la presión del gas después de la irradiación. [2 puntos]
2. Calcule el trabajo mecánico realizado por el gas como consecuencia de la absorción de radiación. [1 punto]
3. Calcule la energía radiante absorbida durante la irradiación. [2 puntos]
4. Calcule la potencia emitida por el láser que es absorbida por el gas y el número correspondiente de fotones (y, por tanto, de procesos elementales de absorción) por unidad de tiempo. [1.5 puntos]
5. Calcule el rendimiento del proceso de conversión de energía óptica en una variación de la energía potencial mecánica de la placa de vidrio. [1 punto]

A continuación, se gira lentamente el eje del cilindro 90° , hasta situarlo en dirección horizontal. Los intercambios de calor entre el gas y el recipiente siguen siendo despreciables.

6. Indique si la presión y/o la temperatura del gas cambian como consecuencia de dicha rotación y, en caso afirmativo, cuál es su nuevo valor o cuáles son sus nuevos valores. [2.5 puntos]

Datos

Presión ambiente: $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

Temperatura ambiente: $T_0 = 20.0^\circ\text{C}$

Diámetro interior del cilindro: $2r = 100 \text{ mm}$

Masa de la placa de vidrio: $m = 800 \text{ g}$

Cantidad de gas en el recipiente: $n = 0.100 \text{ mol}$

Capacidad calorífica molar a volumen constante del gas: $c_V = 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Longitud de onda de emisión del láser: $\lambda = 514 \text{ nm}$

Tiempo de irradiación: $\Delta t = 10.0 \text{ s}$

Desplazamiento de la placa móvil tras la irradiación: $\Delta s = 30.0 \text{ mm}$

Constantes físicas y datos generales

Además de los datos numéricos proporcionados en el texto de cada problema, puede resultar útil conocer algunos datos generales y constantes físicas, que se encuentran entre los siguientes. Estos datos se cuentan entre los más precisos disponibles actualmente y, por ello, tienen un gran número de cifras; no obstante, se espera que exprese sus resultados con un número de cifras adecuado para cada problema.

Velocidad de la luz en el vacío: $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Permeabilidad magnética del vacío: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Constante dieléctrica del vacío: $\epsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

Constante de gravitación: $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

Constante de los gases: $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Constante de Boltzmann: $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Constante de Stefan: $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

Carga del protón: $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Masa del electrón: $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Constante de Planck: $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Origen de la escala centígrada: $T_K = 273.15 \text{ K}$

Masa del Sol: $M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Masa de la Tierra: $M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Radio medio de la Tierra: $r_E = 6.373 \text{ Mm}$

Semieje mayor de la órbita terrestre: $R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Día sidéreo: $d_S = 86.16406 \text{ ks}$

Año: $y = 31.558150 \text{ Ms}$

Valor estándar del campo gravitatorio en la superficie terrestre: $g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Valor estándar de la presión atmosférica al nivel del mar: $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

Índice de refracción del aire para la luz visible, a presión estándar y a 15°C : $n_{\text{air}} = 1.000277$

Constante solar: $S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

Masa de Júpiter: $M = 1.901 \cdot 10^{27}$ kg
Radio ecuatorial de Júpiter: $R_B = 69.8$ Mm
Radio medio de la órbita de Júpiter: $R = 7.783 \cdot 10^{11}$ m
Día joviano: $d_J = 35.6$ ks
Año joviano: $y_J = 374.32$ Ms
 π : 3.14159265

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

1. Después de la irradiación:

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ\text{C}, \quad p_1 = 102.3 \text{ kPa.}$$

2. Trabajo mecánico realizado por el gas:

$$W = 24.1 \text{ J.}$$

3. Energía radiante absorbida:

$$E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J.}$$

4. Potencia láser absorbida y tasa de absorción de fotones:

$$P_{\text{abs}} = 8.44 \text{ W}, \quad \dot{N} = 2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}.$$

5. Rendimiento de la conversión en un aumento de la energía potencial gravitatoria de la placa:

$$\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%.$$

6. Tanto la presión como la temperatura disminuyen. Después de la rotación:

$$p_2 = 101.3 \text{ kPa}, \quad T_2 = 321.2 \text{ K} = 48.1^\circ\text{C.}$$

Solución

Utilizamos la aproximación de gas ideal y la capacidad calorífica molar constante dada, y consideramos despreciables las pérdidas de calor y de energía por rozamiento. Los estados inicial y final no tienen energía cinética macroscópica. La presión ambiente utilizada a continuación es el valor específico de este problema, $p_0 = 101.3$ kPa.

El área de la sección transversal del cilindro y el aumento de volumen medido son

$$A = \pi r^2 = \pi(0.0500)^2 = 7.85398 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \\ \Delta V = A \Delta s = (7.85398 \times 10^{-3})(0.0300) = 2.35619 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

1. Temperatura y presión después de la irradiación

En equilibrio mecánico vertical, la fuerza ascendente del gas equilibra la fuerza debida a la presión atmosférica y el peso de la placa:

$$p_1 A = p_0 A + mg.$$

Por tanto,

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{A} = 101300 + \frac{(0.800)(9.80665)}{7.85398 \times 10^{-3}} = 102298.9 \text{ Pa.}$$

El mismo equilibrio se cumple antes de la irradiación, de modo que las presiones inicial y final del gas son iguales:

$$p_1 = 102.3 \text{ kPa.}$$

Sean V_0 y V_1 los volúmenes del gas antes y después de la irradiación. Aplicando la ecuación de estado del gas ideal a ambos estados,

$$p_1 V_0 = nRT_0, \quad p_1 V_1 = nRT_1.$$

Al restar, se obtiene

$$p_1 \Delta V = nR(T_1 - T_0).$$

Con $T_0 = 293.15 \text{ K}$,

$$T_1 - T_0 = \frac{(102298.9)(2.35619 \times 10^{-4})}{(0.100)(8.314510)} = 28.9898 \text{ K.}$$

Por consiguiente,

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ \text{C.}$$

2. Trabajo mecánico realizado por el gas

La fuerza que se opone al movimiento, $p_0 A + mg$, es constante. Con pérdidas por rozamiento despreciables y energía cinética inicial y final nula de la placa, el gas realiza el trabajo

$$W = (p_0 A + mg)\Delta s = p_0 \Delta V + mg\Delta s = p_1 \Delta V.$$

Numéricamente,

$$W = (102298.9)(2.35619 \times 10^{-4}) = 24.1036 \text{ J,}$$

de modo que

$$W = 24.1 \text{ J.}$$

Este trabajo consta de 23.8683 J de trabajo contra la presión atmosférica y 0.235360 J de trabajo para elevar la placa.

3. Energía radiante absorbida

La radiación absorbida se transforma rápidamente en energía térmica. La conservación de la energía, considerando positivo el trabajo realizado por el gas, da

$$E_{\text{abs}} = \Delta U + W.$$

Para el gas ideal,

$$\Delta U = nc_V(T_1 - T_0) = (0.100)(20.8)(28.9898) = 60.2988 \text{ J.}$$

En consecuencia,

$$E_{\text{abs}} = 60.2988 + 24.1036 = 84.4024 \text{ J,}$$

o bien

$$E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J.}$$

De forma equivalente, puesto que $W = nR(T_1 - T_0)$,

$$E_{\text{abs}} = n(c_V + R)(T_1 - T_0) = nc_P(T_1 - T_0),$$

donde

$$c_P = c_V + R = 29.114510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

4. Potencia absorbida y tasa de absorción de fotones

La potencia del láser es constante, por lo que

$$P_{\text{abs}} = \frac{E_{\text{abs}}}{\Delta t} = \frac{84.4024}{10.0} = \boxed{8.44 \text{ W}}.$$

Cada fotón láser incidente tiene una energía

$$\varepsilon_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.6260755 \times 10^{-34})(299792458)}{514 \times 10^{-9}} = 3.86468 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Todos los fotones láser incidentes que entran en el gas son absorbidos, de modo que su tasa de absorción es

$$\dot{N} = \frac{P_{\text{abs}}}{\varepsilon_\gamma} = \frac{8.44024}{3.86468 \times 10^{-19}} = \boxed{2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}}.$$

Esta es también la tasa de procesos elementales de absorción de los fotones láser.

5. Rendimiento de la conversión en energía potencial de la placa

La energía potencial gravitatoria de la placa aumenta en

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg\Delta s = (0.800)(9.80665)(0.0300) = 0.235360 \text{ J}.$$

Por tanto, el rendimiento solicitado es

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{E_{\text{abs}}} = \frac{0.235360}{84.4024} = 2.78854 \times 10^{-3}.$$

Así,

$$\boxed{\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%}.$$

Su pequeño valor refleja la energía empleada en calentar el gas y en desplazar la atmósfera circundante.

6. Presión y temperatura después de la rotación

Sea θ el ángulo entre el eje del cilindro y la vertical ascendente. Durante la rotación lenta, el equilibrio mecánico axial da

$$p(\theta)A = p_0A + mg \cos \theta,$$

de modo que

$$p(\theta) = p_0 + \frac{mg}{A} \cos \theta.$$

Para $\theta = 90^\circ$, el peso de la placa no tiene componente axial. Por tanto,

$$\boxed{p_2 = p_0 = 101.3 \text{ kPa.}}$$

La rotación es lenta, y el intercambio de calor y la disipación por rozamiento son despreciables. Por tanto, el gas experimenta una expansión adiabática cuasiestática. El primer principio de la termodinámica da

$$nc_V dT = -p dV.$$

Utilizando $p = nRT/V$,

$$c_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}.$$

La integración conduce a

$$TV^{R/c_V} = \text{constante},$$

o bien, definiendo

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1.399736,$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}.$$

Eliminando el volumen mediante la ecuación de estado del gas ideal, se obtiene

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{R/(c_V+R)}.$$

Por consiguiente,

$$T_2 = 322.1398 \left(\frac{101300}{102298.9} \right)^{8.314510/29.114510} = 321.2384 \text{ K}.$$

Así,

$$T_2 = 321.2 \text{ K} = 48.1^\circ \text{C}.$$

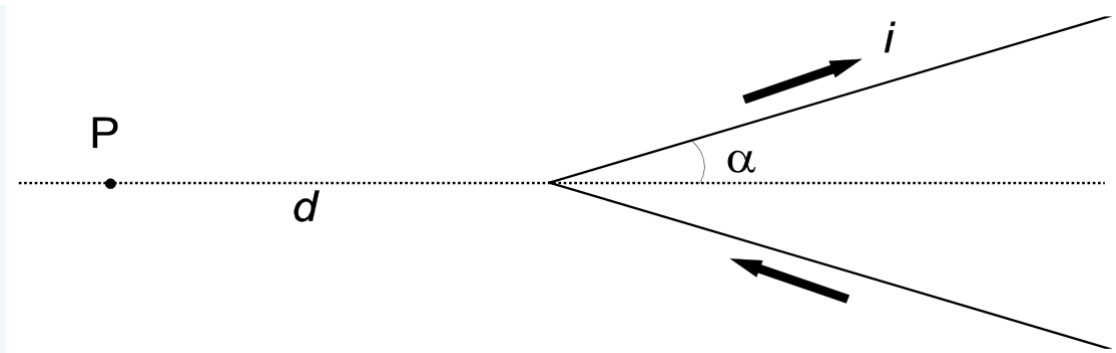
Tanto la presión como la temperatura disminuyen; la temperatura desciende aproximadamente 0.90 K porque el gas en expansión realiza trabajo a expensas de su energía interna.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Campo magnético de un alambre en forma de V

Entre los primeros éxitos de la interpretación de los fenómenos magnéticos por Ampère se encuentra el cálculo del campo magnético $\mathbf{B}$ generado por alambres que conducen una corriente eléctrica, en comparación con las primeras hipótesis formuladas originalmente por Biot y Savart.

Un caso particularmente interesante es el de un alambre delgado muy largo, que conduce una corriente constante i , formado por dos tramos rectilíneos y doblado en forma de «V», con un ángulo de semiapertura¹ α (véase la figura). Según los cálculos de Ampère, el módulo B del campo magnético en un punto dado P situado sobre el eje de la «V», fuera de ella y a una distancia d de su vértice, es proporcional a $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. El trabajo de Ampère se incorporó posteriormente a la teoría electromagnética de Maxwell y goza de aceptación universal.



Utilizando nuestros conocimientos actuales de electromagnetismo,

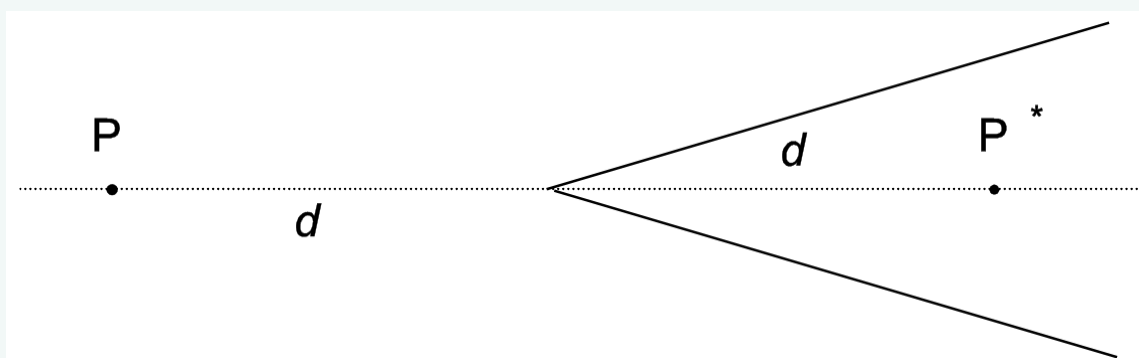
1. Determine la dirección y el sentido del campo $\mathbf{B}$ en P. [1 punto]
2. Sabiendo que el campo es proporcional a $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, determine el factor de proporcionalidad k en

$$|\mathbf{B}(\mathbf{P})| = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

[1.5 puntos]

3. Calcule el campo $\mathbf{B}$ en un punto P^* simétrico de P respecto al vértice, es decir, situado sobre el eje y a la misma distancia d , pero dentro de la «V» (véase la figura). [2 puntos]

¹ En todo este problema, α se expresa en radianes



4. Para medir el campo magnético, colocamos en P una pequeña aguja magnética con momento de inercia I y momento dipolar magnético μ ; oscila alrededor de un punto fijo en un plano que contiene la dirección de $\mathbf{B}$. Calcule el período de las pequeñas oscilaciones de esta aguja en función de B . [2.5 puntos]

En las mismas condiciones, Biot y Savart habían supuesto, en cambio, que el campo magnético en P podría ser (utilizamos aquí la notación moderna) $B(\mathbf{P}) = \frac{i\mu_0\alpha}{\pi^2 d}$, donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. De hecho, intentaron decidir experimentalmente entre las dos interpretaciones (la de Ampère y la de Biot y Savart) midiendo el período de oscilación de la aguja magnética en función de la apertura de la «V». Sin embargo, para algunos valores de α , las diferencias son demasiado pequeñas para poder medirlas fácilmente.

5. Si, para distinguir experimentalmente entre las dos predicciones del período de oscilación T de la aguja magnética en P, necesitamos una diferencia de al menos el 10%, es decir, $T_1 > 1.10 T_2$ (siendo T_1 la predicción de Ampère y T_2 la de Biot-Savart), indique en qué

intervalo, aproximadamente, debemos elegir la semiapertura α de la «V» para poder decidir entre las dos interpretaciones. [3 puntos]

Sugerencia

Según el procedimiento que siga en su solución, la siguiente ecuación trigonométrica puede resultar útil:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Constantes físicas y datos generales

Además de los datos numéricos que se proporcionan en el texto de cada problema, puede ser útil conocer algunos datos generales y constantes físicas, que encontrará a continuación. Estos datos se cuentan entre los más precisos disponibles actualmente y, por ello, tienen un gran número de cifras; no obstante, se espera que exprese sus resultados con un número de cifras adecuado para cada problema.

Velocidad de la luz en el vacío: $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Permeabilidad magnética del vacío: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Constante dieléctrica del vacío: $\epsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

Constante de gravitación universal: $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

Constante de los gases: $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Constante de Boltzmann: $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Constante de Stefan: $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

Carga del protón: $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Masa del electrón: $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Constante de Planck: $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Origen de la escala centígrada: $T_K = 273.15 \text{ K}$

Masa del Sol: $M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Masa de la Tierra: $M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Radio medio de la Tierra: $r_E = 6.373 \text{ Mm}$

Semieje mayor de la órbita terrestre: $R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Día sidéreo: $d_S = 86.16406 \text{ ks}$

Año: $y = 31.558150 \text{ Ms}$

Valor estándar del campo gravitatorio en la superficie terrestre: $g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Valor estándar de la presión atmosférica al nivel del mar: $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

Índice de refracción del aire para la luz visible, a presión estándar y a 15°C : $n_{\text{air}} = 1.000277$

Constante solar: $S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

Masa de Júpiter: $M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Radio ecuatorial de Júpiter: $R_B = 69.8 \text{ Mm}$

Radio medio de la órbita de Júpiter: $R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Día joviano: $d_J = 35.6 \text{ ks}$

Año joviano: $y_J = 374.32 \text{ Ms}$

$\pi: 3.14159265$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea $\hat{\mathbf{z}}$ un vector que apunta hacia fuera de la página, hacia el lector, y sea $\mu = |\boldsymbol{\mu}|$.

1. El campo en P es **perpendicular al plano del alambre y apunta hacia fuera de la página.**

2.
$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

3.
$$\mathbf{B}(\mathbf{P}^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}},$$

dirigido **hacia dentro de la página.**

4.
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

5. Para la desigualdad estricta indicada $T_1 > 1.10T_2$,

$$0 < \alpha < \alpha_c, \quad \alpha_c \simeq 0.768 \text{ rad} \simeq 44.0^\circ.$$

En $\alpha = \alpha_c$, la diferencia es exactamente del 10%.

Solución

Consideramos los dos brazos largos y delgados como alambres rectilíneos semiinfinitos en el vacío. La corriente llega al vértice por el brazo inferior y sale por el brazo superior, como se muestra en la figura. Tomamos el vértice como origen, con el semieje positivo x dirigido hacia el interior de la V y $\hat{\mathbf{z}}$ dirigido hacia fuera de la página.

1. Dirección y sentido del campo en P

La ley de Biot–Savart moderna es

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

donde $d\boldsymbol{\ell}$ sigue el sentido de la corriente y $\mathbf{R}$ apunta desde el elemento de corriente hasta el punto de observación.

Ambos vectores están en el plano de la figura, de modo que cada contribución es perpendicular a ese plano. En P, la regla de la mano derecha da una contribución hacia fuera de la página para cada brazo: el brazo inferior conduce la corriente hacia el vértice, mientras que el superior la conduce alejándose de él. Por tanto, sus contribuciones se suman:

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) \text{ apunta hacia fuera de la página.}$$

2. Determinación de k

La dependencia angular viene dada:

$$B(\mathbf{P}) = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Consideremos la configuración límite $\alpha = \pi/2$. Los dos brazos forman entonces un único alambre rectilíneo infinito, y P se encuentra a una distancia perpendicular d de él.

Para este alambre rectilíneo, la simetría cilíndrica y la ley de circulación de Ampère dan

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B(2\pi d) = \mu_0 i.$$

Por consiguiente,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

Como $\tan(\pi/4) = 1$, esto determina

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

Utilizando la permeabilidad proporcionada,

$$k = (2 \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}) \frac{i}{d}.$$

Por tanto,

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

3. Campo en P^*

En P^* , la regla de la mano derecha da un campo hacia dentro de la página para cada brazo original.

Para hallar su módulo, prolongamos ambos brazos más allá del vértice, conservando los sentidos de sus corrientes, de modo que cada uno se convierta en un alambre rectilíneo infinito. La distancia perpendicular desde P^* hasta cualquiera de los alambres así completados es

$$\rho = d \sin \alpha.$$

Cada alambre completado produce un campo hacia dentro de la página de módulo

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi \rho}.$$

Por tanto, su campo total tiene módulo

$$B_{\text{complete}} = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

Las dos semirrectas añadidas forman una V abierta hacia la izquierda, que es la imagen especular del alambre original. Respecto a esta V añadida, P^* es un punto exterior situado sobre el eje a una distancia d . Por consiguiente, su campo tiene módulo $B(P)$, y la regla de la mano derecha muestra que también apunta hacia dentro de la página.

Así, por superposición,

$$B(P^*) + B(P) = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

Sustituyendo el resultado de la parte 2,

$$B(P^*) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \left[\frac{2}{\sin \alpha} - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right].$$

Utilizando

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

la expresión entre corchetes se convierte en

$$\frac{2 - (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{B}(\mathbf{P}^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

4. Período de las pequeñas oscilaciones

Tratamos la pequeña aguja como un dipolo magnético en un campo uniforme a lo largo de toda su longitud, despreciando el amortiguamiento y otros momentos de fuerza. Sea θ el ángulo entre su momento magnético y el campo.

El momento de fuerza magnético es

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}.$$

El equilibrio con $\boldsymbol{\mu}$ paralelo a $\mathbf{B}$ es estable. Tomando θ como el desplazamiento angular respecto a este equilibrio, la ecuación del movimiento de rotación es

$$I\ddot{\theta} = -\mu B \sin \theta.$$

Para pequeñas oscilaciones, $|\theta| \ll 1$ rad y $\sin \theta \simeq \theta$, por lo que

$$\ddot{\theta} + \frac{\mu B}{I} \theta = 0.$$

Este es un movimiento armónico simple con frecuencia angular

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu B}{I}},$$

y, por tanto,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

Si I , μ y B se expresan en unidades del SI, el período se obtiene en segundos.

5. Intervalo angular que da una diferencia de períodos superior al 10%

Las dos predicciones del campo en P son

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad B_2 = \frac{\mu_0 i \alpha}{\pi^2 d},$$

donde la segunda expresión es la hipótesis histórica citada en el enunciado.

Como $T \propto B^{-1/2}$,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)}}.$$

El requisito experimental se convierte en

$$\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)} > 1.10^2 = 1.21.$$

El cociente de los períodos disminuye al aumentar α . Para comprobarlo, hacemos $x = \alpha/2$; su cuadrado es proporcional a $x \cot x$, y

$$\frac{d}{dx}(x \cot x) = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} < 0,$$

porque $\sin(2x) < 2x$ para los ángulos positivos considerados.

Sus valores límite son

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \simeq 1.1284, \quad \left. \frac{T_1}{T_2} \right|_{\alpha=\pi/2} = 1.$$

Así, un único umbral separa los intervalos en los que las predicciones pueden distinguirse de aquellos en los que no pueden distinguirse.

Resolviendo numéricamente

$$\frac{2\alpha_c}{\pi \tan(\alpha_c/2)} = 1.21$$

se obtiene

$$\alpha_c \simeq 0.7682 \text{ rad} \simeq 44.01^\circ.$$

Por tanto, la semiapertura requerida es aproximadamente

$$0 < \alpha < 0.77 \text{ rad} \quad (\text{aproximadamente por debajo de } 44^\circ).$$

El umbral exacto se incluye si «al menos el 10%» se interpreta de forma inclusiva; queda excluido por la desigualdad estricta escrita explícitamente. El valor degenerado $\alpha = 0$ se excluye porque ambos campos se anulan y no existe un período finito de oscilación magnética.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Una sonda espacial hacia Júpiter

En este problema consideramos un método utilizado con frecuencia para acelerar sondas espaciales en la dirección deseada. La sonda espacial pasa cerca de un planeta y puede aumentar significativamente su rapidez y modificar considerablemente su dirección de vuelo, tomando una cantidad muy pequeña de energía del movimiento orbital del planeta. Aquí analizamos este efecto para una sonda espacial que pasa cerca de Júpiter.

El planeta Júpiter orbita alrededor del Sol siguiendo una trayectoria elíptica que puede aproximarse por una circunferencia de radio medio R ; para proceder al análisis de la situación física, primero debemos:

1. Hallar la rapidez V del planeta en su órbita alrededor del Sol. [1.5 puntos]
2. Cuando la sonda se encuentra entre el Sol y Júpiter (en el segmento Sol-Júpiter), hallar la distancia a Júpiter a la que la atracción gravitatoria del Sol equilibra la de Júpiter. [1 punto]

Una sonda espacial de masa $m = 825 \text{ kg}$ pasa cerca de Júpiter. Por simplicidad, supongamos que la trayectoria de la sonda espacial se encuentra enteramente en el plano de la órbita de Júpiter; de este modo, despreciamos el importante caso en el que la sonda espacial es expulsada del plano orbital de Júpiter.

Solo consideramos lo que ocurre en la región donde la atracción de Júpiter predomina ampliamente sobre todas las demás fuerzas gravitatorias.

En el sistema de referencia del centro de masas del Sol, la rapidez inicial de la sonda espacial es $v_0 = 1.00 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ (en la dirección positiva de y), mientras que la velocidad de Júpiter apunta en la dirección negativa de x (véase la figura 1); por «rapidez inicial» entendemos la rapidez de la sonda espacial cuando se encuentra en el espacio interplanetario, aún lejos de Júpiter, pero ya en la región donde la atracción del Sol es despreciable frente a la de Júpiter. Suponemos que el encuentro tiene lugar en un tiempo suficientemente corto como para poder despreciar el cambio de dirección de Júpiter a lo largo de su órbita alrededor del Sol. También suponemos que la sonda pasa por detrás de Júpiter, es decir, que la coordenada x de la sonda es mayor que la de Júpiter cuando la coordenada y es la misma.

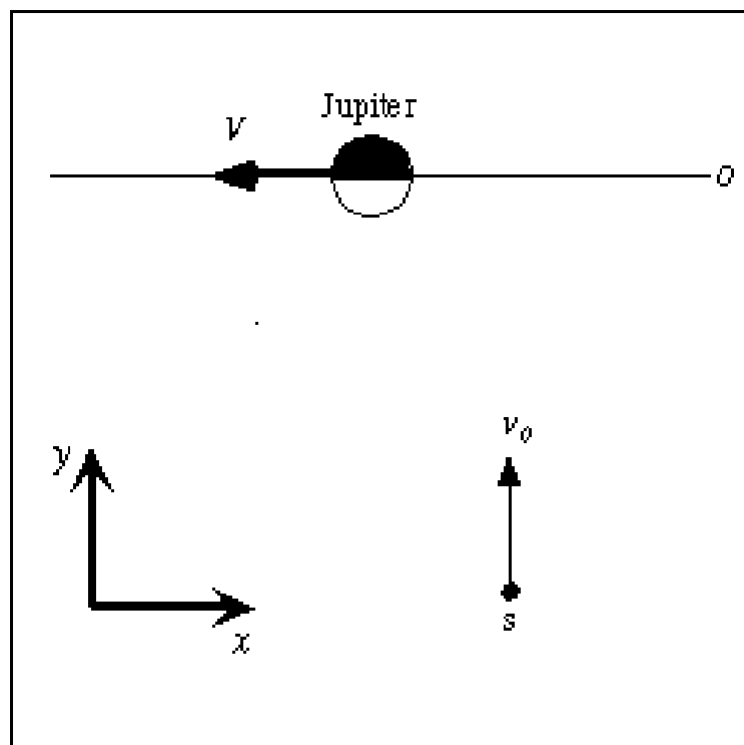


Figura 1: Vista en el sistema del centro de masas del Sol. O representa la órbita de Júpiter y s es la sonda espacial.

3. Hallar la dirección de movimiento de la sonda espacial (como el ángulo φ entre su dirección y el eje x) y su rapidez v' en el sistema de referencia de Júpiter, cuando aún se encuentra lejos de Júpiter. [2 puntos]
4. Hallar el valor de la energía mecánica total E de la sonda espacial en el sistema de referencia de Júpiter, tomando —como es habitual— igual a cero su energía potencial a una distancia muy grande, en este caso cuando está lo suficientemente lejos como para moverse con una velocidad casi constante debido a la pequeñez de todas las interacciones gravitatorias. [1 punto]

La trayectoria de la sonda espacial en el sistema de referencia de Júpiter es una hipérbola y su ecuación en coordenadas polares en este sistema de referencia es

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right). \quad (1)$$

donde b es la distancia entre una de las asíntotas y Júpiter (el llamado *parámetro de impacto*), E es la energía mecánica total de la sonda en el sistema de referencia de Júpiter, G es la constante de gravitación universal, M es la masa de Júpiter, y r y θ son las coordenadas polares (la distancia radial y el ángulo polar).

La figura 2 muestra las dos ramas de una hipérbola tal como las describe la ecuación (1); también se muestran las asíntotas y las coordenadas polares. Obsérvese que la ecuación (1) tiene su origen en el «foco atractivo» de la hipérbola. La trayectoria de la sonda espacial es la trayectoria atractiva (la rama resaltada).

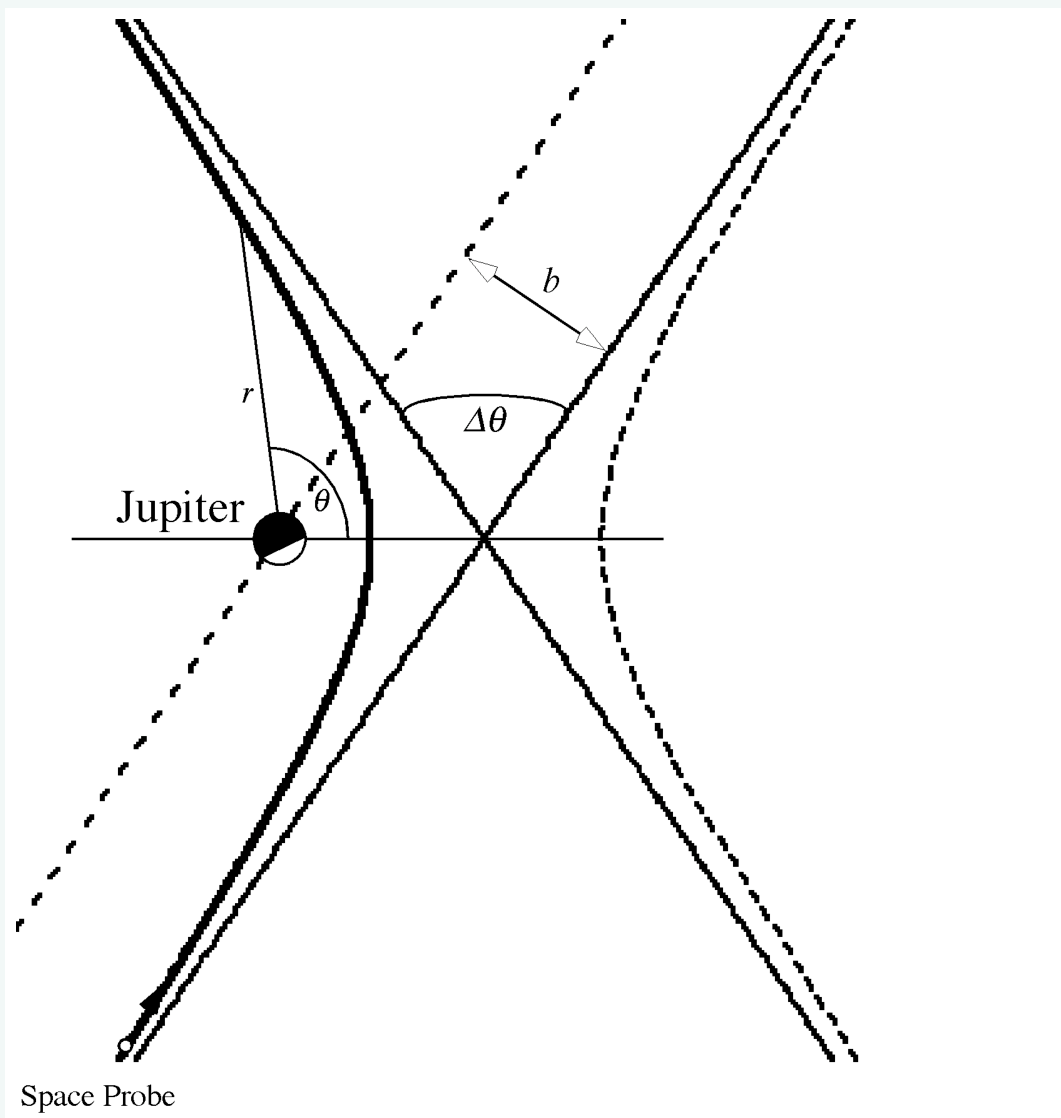


Figura 2

5. Utilizando la ecuación (1), que describe la trayectoria de la sonda espacial, hallar la desviación angular total $\Delta\theta$ en el sistema de referencia de Júpiter (tal como se muestra en

la figura 2) y expresarla en función de la rapidez inicial v' y del parámetro de impacto b . [2 puntos]

6. Suponer que la sonda no puede pasar junto a Júpiter a una distancia del centro del planeta inferior a tres radios de Júpiter; hallar el mínimo parámetro de impacto posible y la máxima desviación angular posible. [1 punto]
7. Hallar una ecuación para la rapidez final v'' de la sonda en el sistema de referencia del Sol en función únicamente de la rapidez V de Júpiter, la rapidez inicial v_0 de la sonda y el ángulo de desviación $\Delta\theta$. [1 punto]
8. Utilizar el resultado anterior para hallar el valor numérico de la rapidez final v'' en el sistema de referencia del Sol cuando la desviación angular tiene su máximo valor posible. [0.5 puntos]

Sugerencia

Según el procedimiento que se siga en la solución, las siguientes fórmulas trigonométricas pueden resultar útiles:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Constantes físicas y datos generales

Además de los datos numéricos proporcionados en el texto de cada problema, puede resultar útil conocer algunos datos generales y constantes físicas, que se encuentran entre los siguientes. Estos datos se cuentan entre los más precisos disponibles actualmente y, por tanto, tienen un gran número de cifras; sin embargo, se espera que los resultados se escriban con un número de cifras adecuado para cada problema.

Rapidez de la luz en el vacío:	$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Permeabilidad magnética del vacío:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Constante dieléctrica del vacío:	$\varepsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$
Constante de gravitación universal:	$G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Constante de los gases:	$R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
Constante de Boltzmann:	$k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Stefan:	$\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Carga del protón:	$e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masa del electrón:	$m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Constante de Planck:	$h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Origen de la escala centígrada:	$T_K = 273.15 \text{ K}$
Masa del Sol:	$M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Masa de la Tierra:	$M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Radio medio de la Tierra:	$r_E = 6.373 \text{ Mm}$
Semieje mayor de la órbita terrestre:	$R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Día sidéreo:	$d_S = 86.16406 \text{ ks}$
Año:	$y = 31.558150 \text{ Ms}$

Valor estándar del campo gravitatorio en la superficie terrestre:	$g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Valor estándar de la presión atmosférica al nivel del mar:	$p_0 = 101325 \text{ Pa}$
Índice de refracción del aire para la luz visible, a presión estándar y 15°C :	$n_{\text{air}} = 1.000277$
Constante solar:	$S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
Masa de Júpiter:	$M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
Radio ecuatorial de Júpiter:	$R_B = 69.8 \text{ Mm}$
Radio medio de la órbita de Júpiter:	$R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Día joviano:	$d_J = 35.6 \text{ ks}$
Año joviano:	$y_J = 374.32 \text{ Ms}$
π :	3.14159265

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

1. La rapidez orbital de Júpiter es

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \simeq 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

2. La distancia desde Júpiter hacia el Sol es

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_S/M}} \simeq 2.33 \times 10^{10} \text{ m}.$$

3. La velocidad inicial en el sistema de Júpiter es $\mathbf{v}'_i = (V, v_0)$. Por tanto,

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{V}\right) = 37.4^\circ, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2} = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

El ángulo se mide en sentido antihorario desde el semieje positivo x .

4. La energía mecánica total en el sistema de Júpiter es

$$E = \frac{1}{2}m(V^2 + v_0^2) = 1.12 \times 10^{11} \text{ J}.$$

5. La desviación angular es

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{GM}{b v'^2}\right).$$

6. Con $r_0 = 3R_B$,

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}} = 4.90 \times 10^8 \text{ m},$$

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{1 + r_0 v'^2/(GM)}\right) = 87.4^\circ \simeq 1.53 \text{ rad}.$$

7. La rapidez final en el sistema del Sol es

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2Vv_0 \sin \Delta\theta}.$$

8. Para la máxima desviación permitida,

$$v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.$$

Solución

Utilizamos la gravitación newtoniana y las aproximaciones especificadas en el problema. La órbita de Júpiter es circular y su velocidad es prácticamente constante durante el encuentro. La masa de la sonda es despreciable frente a la masa de Júpiter. Durante el sobrevuelo despreciamos la fuerza del Sol, por lo que el sistema de referencia de Júpiter se considera inercial y la sonda se mueve en el potencial

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

Las velocidades inicial y final se refieren a las velocidades asintóticas de esta aproximación de dos cuerpos. En los cálculos numéricos se conservan los valores intermedios sin redondear.

1. Rapidez orbital de Júpiter

La atracción gravitatoria del Sol proporciona la fuerza centrípeta de Júpiter:

$$\frac{GM_S M}{R^2} = \frac{MV^2}{R}.$$

Por tanto,

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}.$$

Utilizando las constantes proporcionadas,

$$V = \sqrt{\frac{(6.67259 \times 10^{-11})(1.991 \times 10^{30})}{7.783 \times 10^{11}}} = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Así,

$$V = 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

El cálculo alternativo para una órbita circular $V = 2\pi R/y_J$ da $1.30642 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$, en concordancia con la precisión indicada.

2. Punto donde se equilibran las atracciones gravitatorias

Sea d la distancia desde Júpiter hacia el Sol. La distancia al Sol es entonces $R - d$. Las dos fuerzas gravitatorias apuntan en sentidos opuestos, por lo que su equilibrio requiere

$$\frac{GMm}{d^2} = \frac{GM_S m}{(R - d)^2}.$$

Tomando las raíces cuadradas positivas,

$$\frac{R-d}{d} = \sqrt{\frac{M_S}{M}}.$$

Despejando,

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_S/M}}.$$

Numéricamente,

$$d = \frac{7.783 \times 10^{11}}{1 + \sqrt{(1.991 \times 10^{30})/(1.901 \times 10^{27})}} = 2.33285 \times 10^{10} \text{ m.}$$

Por consiguiente,

$$\boxed{d = 2.33 \times 10^{10} \text{ m.}}$$

3. Movimiento inicial en el sistema de Júpiter

En el sistema del Sol, las velocidades iniciales son

$$\mathbf{v}_i = v_0 \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{V}_J = -V \hat{\mathbf{x}}.$$

La transformación galileana de velocidades da

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}_J = V \hat{\mathbf{x}} + v_0 \hat{\mathbf{y}}.$$

Ambas componentes son positivas, por lo que la velocidad se encuentra en el primer cuadrante:

$$\tan \varphi = \frac{v_0}{V}, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2}.$$

Numéricamente,

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{1.00 \times 10^4}{1.30650 \times 10^4} \right) = 37.4306^\circ,$$

$$v' = \sqrt{(1.30650 \times 10^4)^2 + (1.00 \times 10^4)^2} = 1.64528 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Así,

$$\boxed{\varphi = 37.4^\circ, \quad v' = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

4. Energía mecánica total en el sistema de Júpiter

La energía potencial se anula a una separación infinita. En consecuencia, la energía total conservada es igual a la energía cinética asintótica inicial:

$$E = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m (V^2 + v_0^2).$$

Al sustituir se obtiene

$$E = \frac{1}{2} (825) (1.64528 \times 10^4)^2 = 1.11661 \times 10^{11} \text{ J.}$$

Por tanto,

$$\boxed{E = 1.12 \times 10^{11} \text{ J.}}$$

Su valor positivo es coherente con una órbita hiperbólica no ligada.

5. Desviación angular

Utilizando $E = \frac{1}{2}mv'^2$, escribimos la ecuación (1) como

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

donde

$$p = \frac{v'^2 b^2}{GM}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2 v'^4}{G^2 M^2}} > 1.$$

En cualquiera de las asíntotas, $r \rightarrow \infty$, de modo que

$$1 + e \cos \theta = 0.$$

Sean $\pm\theta_\infty$ los ángulos polares asíntóticos, donde

$$\cos \theta_\infty = -\frac{1}{e}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta_\infty < \pi.$$

En la asíntota de entrada, la velocidad apunta en sentido opuesto a la dirección radial. Su ángulo respecto al eje del periapsis es, por tanto, $\pi - \theta_\infty$. En la asíntota de salida, la velocidad apunta en la dirección radial y forma un ángulo θ_∞ . Su diferencia es

$$\Delta\theta = \theta_\infty - (\pi - \theta_\infty) = 2\theta_\infty - \pi.$$

De ello se deduce que

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} = \sin \left(\theta_\infty - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \theta_\infty = \frac{1}{e}.$$

Puesto que $0 < \Delta\theta/2 < \pi/2$,

$$\tan \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{GM}{bv'^2}.$$

Así,

$$\boxed{\Delta\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{bv'^2} \right)}.$$

De forma equivalente,

$$\Delta\theta = 2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + b^2 v'^4 / (G^2 M^2)}} \right].$$

6. Parámetro de impacto mínimo y desviación máxima

Sea r_p la distancia mínima al centro de Júpiter y v_p la rapidez en ese punto. La conservación de la energía da

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2}mv'^2,$$

de modo que

$$v_p^2 = v'^2 + \frac{2GM}{r_p}.$$

La fuerza es central, por lo que se conserva el momento angular respecto a Júpiter. En el punto de máxima aproximación, la velocidad es perpendicular al radio:

$$mbv' = mr_p v_p.$$

Elevando al cuadrado y sustituyendo el resultado de la conservación de la energía,

$$b^2 v'^2 = r_p^2 \left(v'^2 + \frac{2GM}{r_p} \right),$$

lo que da

$$b^2 = r_p^2 + \frac{2GM r_p}{v'^2}.$$

Esta expresión aumenta con r_p . Por tanto, el menor parámetro de impacto permitido se obtiene cuando

$$r_p = r_0 = 3R_B = 3(69.8 \times 10^6) \text{ m}.$$

Por tanto,

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}}.$$

Utilizando

$$GM = 1.268459359 \times 10^{17} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2},$$

obtenemos

$$b_{\min} = 4.89996 \times 10^8 \text{ m},$$

o bien

$$\boxed{b_{\min} = 4.90 \times 10^8 \text{ m}.$$

La desviación disminuye al aumentar b , por lo que su máximo se alcanza para $b_{\min}$. Así,

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{b_{\min} v'^2} \right).$$

Para expresar este resultado directamente en función de la distancia mínima, sustituimos la relación para $b_{\min}^2$ en la excentricidad:

$$e_{\min}^2 = 1 + \frac{b_{\min}^2 v'^4}{G^2 M^2} = \left(1 + \frac{r_0 v'^2}{GM} \right)^2.$$

Por consiguiente,

$$e_{\min} = 1 + \frac{r_0 v'^2}{GM} = 1.44687$$

y

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{e_{\min}} \right) = 1.52615 \text{ rad} = 87.4421^\circ.$$

Por tanto,

$$\boxed{\Delta\theta_{\max} = 87.4^\circ.}$$

7. Rapidez final en el sistema del Sol

La conservación de la energía en el sistema de Júpiter garantiza que la rapidez asintótica de salida sigue siendo v' .

Como la sonda pasa por detrás de Júpiter, la desviación gravitatoria hace girar su velocidad en sentido antihorario en las coordenadas x, y dadas. Por tanto, la velocidad relativa de salida forma un ángulo $\varphi + \Delta\theta$ con el semieje positivo x :

$$\mathbf{v}'_f = v' \cos(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{x}} + v' \sin(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{y}}.$$

Utilizando

$$v' \cos \varphi = V, \quad v' \sin \varphi = v_0,$$

las fórmulas de adición dan

$$\begin{aligned} v'_{f,x} &= V \cos \Delta\theta - v_0 \sin \Delta\theta, \\ v'_{f,y} &= V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta. \end{aligned}$$

Para volver al sistema del Sol, hay que sumar la velocidad de Júpiter $-V\hat{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned} v''_x &= V(\cos \Delta\theta - 1) - v_0 \sin \Delta\theta, \\ v''_y &= V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} v''^2 &= (v''_x)^2 + (v''_y)^2 \\ &= V^2 [(\cos \Delta\theta - 1)^2 + \sin^2 \Delta\theta] \\ &\quad + v_0^2 [\sin^2 \Delta\theta + \cos^2 \Delta\theta] + 2Vv_0 \sin \Delta\theta \\ &= 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + v_0^2 + 2Vv_0 \sin \Delta\theta. \end{aligned}$$

Así, la expresión solicitada es

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2Vv_0 \sin \Delta\theta}.$$

Como comprobación de coherencia, al tomar $\Delta\theta = 0$ se obtiene $v'' = v_0$.

8. Rapidez final para la máxima desviación angular

Al sustituir los valores sin redondear

$$V = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad v_0 = 1.00 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad \Delta\theta_{\max} = 1.52615 \text{ rad},$$

se obtiene

$$\begin{aligned} v'' &= \left[(1.00 \times 10^4)^2 + 2(1.30650 \times 10^4)^2(1 - \cos 1.52615) \right. \\ &\quad \left. + 2(1.30650 \times 10^4)(1.00 \times 10^4) \sin 1.52615 \right]^{1/2} \\ &= 2.62144 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.$$

La gravedad de Júpiter cambia la dirección de la velocidad asintótica de la sonda en el sistema de Júpiter. Este cambio produce el aumento de la rapidez y de la energía cinética en el sistema del Sol, aportado por una reducción despreciable de la energía orbital de Júpiter.

La solución se comprobó con la solución oficial.