

IPhO 1999

Theorieaufgaben und Lösungen · Padua, Italien · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1999/

Aufgabe 1: Absorption von Strahlung durch ein Gas

Ein zylindrisches Gefäß mit vertikaler Achse enthält ein molekulares Gas im thermodynamischen Gleichgewicht. Die obere Grundfläche des Zylinders besteht aus einer frei verschiebbaren Glasplatte; wir nehmen an, dass kein Gas entweicht und die Reibung zwischen der Glasplatte und den Zylinderwänden gerade ausreicht, um Schwingungen zu dämpfen, aber im Vergleich zu den anderen beteiligten Energien keinen nennenswerten Energieverlust verursacht. Anfangs ist die Temperatur des Gases gleich der Umgebungstemperatur. Das Gas kann in guter Näherung als ideal betrachtet werden. Wir nehmen an, dass die Zylinderwände (einschließlich der Grundflächen) eine sehr geringe Wärmeleitfähigkeit und Wärmekapazität haben, sodass der Wärmeaustausch zwischen Gas und Umgebung sehr langsam erfolgt und bei der Lösung dieser Aufgabe vernachlässigt werden kann.

Durch die Glasplatte senden wir das Licht eines Lasers mit konstanter Leistung in den Zylinder; diese Strahlung wird von Luft und Glas gut durchgelassen, vom Gas im Gefäß jedoch vollständig absorbiert. Durch die Absorption dieser Strahlung gelangen die Moleküle in angeregte Zustände, aus denen sie unter rascher Emission von Infrarotstrahlung schrittweise in den molekularen Grundzustand zurückkehren; diese Infrarotstrahlung wird jedoch wiederum von anderen Molekülen absorbiert und von den Gefäßwänden einschließlich der Glasplatte reflektiert. Die vom Laser absorbierte Energie wird daher in sehr kurzer Zeit in thermische Bewegung (ungeordnete Molekülbewegung) umgewandelt und verbleibt anschließend hinreichend lange im Gas.

Wir beobachten, dass sich die Glasplatte nach oben bewegt; nach einer bestimmten Bestrahlungsdauer schalten wir den Laser aus und messen diese Verschiebung.

1. Berechnen Sie anhand der nachstehenden Daten und – falls erforderlich – der Angaben auf dem Blatt mit den physikalischen Konstanten die Temperatur und den Druck des Gases nach der Bestrahlung. [2 Punkte]
2. Berechnen Sie die mechanische Arbeit, die das Gas infolge der Strahlungsabsorption verrichtet. [1 Punkt]
3. Berechnen Sie die während der Bestrahlung absorbierte Strahlungsenergie. [2 Punkte]
4. Berechnen Sie die vom Laser ausgesandte und vom Gas absorbierte Leistung sowie die entsprechende Anzahl von Photonen (und damit von elementaren Absorptionsvorgängen) pro Zeiteinheit. [1.5 Punkte]
5. Berechnen Sie den Wirkungsgrad der Umwandlung optischer Energie in eine Änderung der mechanischen potenziellen Energie der Glasplatte. [1 Punkt]

Anschließend wird die Zylinderachse langsam um 90° gedreht, sodass sie horizontal liegt. Der Wärmeaustausch zwischen Gas und Gefäß kann weiterhin vernachlässigt werden.

6. Geben Sie an, ob sich der Druck und/oder die Temperatur des Gases infolge dieser Drehung ändern, und bestimmen Sie gegebenenfalls den jeweiligen neuen Wert. [2.5 Punkte]

Daten

Umgebungsdruck: $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

Umgebungstemperatur: $T_0 = 20.0^\circ\text{C}$

Innendurchmesser des Zylinders: $2r = 100 \text{ mm}$

Masse der Glasplatte: $m = 800 \text{ g}$

Stoffmenge des Gases im Gefäß: $n = 0.100 \text{ mol}$

Molare Wärmekapazität des Gases bei konstantem Volumen: $c_V = 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Emissionswellenlänge des Lasers: $\lambda = 514 \text{ nm}$

Bestrahlungsdauer: $\Delta t = 10.0 \text{ s}$

Verschiebung der beweglichen Platte nach der Bestrahlung: $\Delta s = 30.0 \text{ mm}$

Physikalische Konstanten und allgemeine Daten

Zusätzlich zu den im Text der einzelnen Aufgaben angegebenen Zahlenwerten kann die Kenntnis einiger allgemeiner Daten und physikalischer Konstanten nützlich sein; diese finden Sie in der folgenden Zusammenstellung. Es handelt sich um nahezu die genauesten derzeit verfügbaren Werte, weshalb sie eine große Anzahl von Ziffern aufweisen; Ihre Ergebnisse sollen Sie jedoch mit einer der jeweiligen Aufgabe angemessenen Anzahl von Ziffern angeben.

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum: $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Magnetische Permeabilität des Vakuums: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Elektrische Permittivität des Vakuums: $\epsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

Gravitationskonstante: $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

Gaskonstante: $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Boltzmann-Konstante: $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Stefan-Boltzmann-Konstante: $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

Protonenladung: $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Elektronenmasse: $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Nullpunkt der Celsius-Skala: $T_K = 273.15 \text{ K}$

Sonnenmasse: $M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Erdmasse: $M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Mittlerer Erdradius: $r_E = 6.373 \text{ Mm}$

Große Halbachse der Erdbahn: $R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Siderischer Tag: $d_S = 86.16406 \text{ ks}$

Jahr: $y = 31.558150 \text{ Ms}$

Normwert der Gravitationsfeldstärke an der Erdoberfläche: $g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Normwert des atmosphärischen Drucks auf Meereshöhe: $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

Brechungsindex von Luft für sichtbares Licht bei Normaldruck und 15°C : $n_{\text{air}} = 1.000277$

Solarkonstante: $S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

Jupitermasse: $M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Äquatorradius des Jupiters: $R_B = 69.8 \text{ Mm}$
Mittlerer Radius der Jupiterbahn: $R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Jupitertag: $d_J = 35.6 \text{ ks}$
Jupiterjahr: $y_J = 374.32 \text{ Ms}$
 $\pi: 3.14159265$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

1. Nach der Bestrahlung:

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ\text{C}, \quad p_1 = 102.3 \text{ kPa.}$$

2. Vom Gas verrichtete mechanische Arbeit:

$$W = 24.1 \text{ J.}$$

3. Absorbierte Strahlungsenergie:

$$E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J.}$$

4. Absorbierte Laserleistung und Photonenabsorptionsrate:

$$P_{\text{abs}} = 8.44 \text{ W}, \quad \dot{N} = 2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}.$$

5. Wirkungsgrad für die Erhöhung der potenziellen Energie der Platte im Schwerfeld:

$$\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%.$$

6. Sowohl Druck als auch Temperatur nehmen ab. Nach der Drehung:

$$p_2 = 101.3 \text{ kPa}, \quad T_2 = 321.2 \text{ K} = 48.1^\circ\text{C.}$$

Lösung

Wir verwenden die Näherung eines idealen Gases und die angegebene konstante molare Wärmekapazität und vernachlässigen Wärmeverluste sowie Energieverluste durch Reibung. Im Anfangs- und Endzustand liegt keine makroskopische kinetische Energie vor. Als Umgebungsdruck verwenden wir im Folgenden den in der Aufgabe angegebenen Wert $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$.

Die Querschnittsfläche des Zylinders und die gemessene Volumenzunahme betragen

$$A = \pi r^2 = \pi(0.0500)^2 = 7.85398 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \\ \Delta V = A \Delta s = (7.85398 \times 10^{-3})(0.0300) = 2.35619 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

1. Temperatur und Druck nach der Bestrahlung

Im mechanischen Gleichgewicht bei vertikaler Zylinderachse gleicht die nach oben gerichtete Kraft des Gases die Kraft des atmosphärischen Drucks und die Gewichtskraft der Platte aus:

$$p_1 A = p_0 A + mg.$$

Somit gilt

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{A} = 101300 + \frac{(0.800)(9.80665)}{7.85398 \times 10^{-3}} = 102298.9 \text{ Pa.}$$

Dasselbe Kräftegleichgewicht gilt vor der Bestrahlung, sodass der Gasdruck im Anfangs- und Endzustand gleich ist:

$$p_1 = 102.3 \text{ kPa.}$$

Es seien V_0 und V_1 die Gasvolumina vor und nach der Bestrahlung. Die Anwendung der idealen Gasgleichung auf beide Zustände ergibt

$$p_1 V_0 = nRT_0, \quad p_1 V_1 = nRT_1.$$

Durch Subtraktion folgt

$$p_1 \Delta V = nR(T_1 - T_0).$$

Mit $T_0 = 293.15 \text{ K}$ erhält man

$$T_1 - T_0 = \frac{(102298.9)(2.35619 \times 10^{-4})}{(0.100)(8.314510)} = 28.9898 \text{ K.}$$

Daher gilt

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ\text{C.}$$

2. Vom Gas verrichtete mechanische Arbeit

Die entgegenwirkende Kraft $p_0 A + mg$ ist konstant. Bei vernachlässigbaren Reibungsverlusten und verschwindender kinetischer Energie der Platte im Anfangs- und Endzustand verrichtet das Gas die Arbeit

$$W = (p_0 A + mg)\Delta s = p_0 \Delta V + mg\Delta s = p_1 \Delta V.$$

Numerisch ergibt sich

$$W = (102298.9)(2.35619 \times 10^{-4}) = 24.1036 \text{ J,}$$

also

$$W = 24.1 \text{ J.}$$

Diese Arbeit setzt sich aus 23.8683 J Arbeit gegen den atmosphärischen Druck und 0.235360 J Hubarbeit an der Platte zusammen.

3. Absorbierte Strahlungsenergie

Die absorbierte Strahlung wird rasch in thermische Energie umgewandelt. Aus der Energieerhaltung folgt, wobei vom Gas verrichtete Arbeit positiv gezählt wird,

$$E_{\text{abs}} = \Delta U + W.$$

Für das ideale Gas gilt

$$\Delta U = nc_V(T_1 - T_0) = (0.100)(20.8)(28.9898) = 60.2988 \text{ J.}$$

Folglich ist

$$E_{\text{abs}} = 60.2988 + 24.1036 = 84.4024 \text{ J,}$$

oder

$$E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J.}$$

Wegen $W = nR(T_1 - T_0)$ kann man gleichwertig schreiben:

$$E_{\text{abs}} = n(c_V + R)(T_1 - T_0) = nc_P(T_1 - T_0),$$

wobei

$$c_P = c_V + R = 29.114510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

4. Absorbierte Leistung und Photonenabsorptionsrate

Die Laserleistung ist konstant, daher gilt

$$P_{\text{abs}} = \frac{E_{\text{abs}}}{\Delta t} = \frac{84.4024}{10.0} = \boxed{8.44 \text{ W}}.$$

Jedes einfallende Laserphoton hat die Energie

$$\varepsilon_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.6260755 \times 10^{-34})(299792458)}{514 \times 10^{-9}} = 3.86468 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Alle einfallenden Laserphotonen, die in das Gas eintreten, werden absorbiert. Ihre Absorptionsrate beträgt daher

$$\dot{N} = \frac{P_{\text{abs}}}{\varepsilon_\gamma} = \frac{8.44024}{3.86468 \times 10^{-19}} = \boxed{2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}}.$$

Dies ist zugleich die Rate der elementaren Absorptionsvorgänge für die Laserphotonen.

5. Wirkungsgrad der Umwandlung in potenzielle Energie der Platte

Die potenzielle Energie der Platte im Schwerfeld nimmt zu um

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg\Delta s = (0.800)(9.80665)(0.0300) = 0.235360 \text{ J}.$$

Der gesuchte Wirkungsgrad ist daher

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{E_{\text{abs}}} = \frac{0.235360}{84.4024} = 2.78854 \times 10^{-3}.$$

Somit gilt

$$\boxed{\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%}.$$

Sein kleiner Wert erklärt sich durch die Energie, die zum Erwärmen des Gases und zum Verdrängen der umgebenden Atmosphäre benötigt wird.

6. Druck und Temperatur nach der Drehung

Es sei θ der Winkel zwischen der Zylinderachse und der nach oben gerichteten Vertikalen. Während der langsamen Drehung ergibt das mechanische Gleichgewicht in axialer Richtung

$$p(\theta)A = p_0A + mg \cos \theta,$$

also

$$p(\theta) = p_0 + \frac{mg}{A} \cos \theta.$$

Bei $\theta = 90^\circ$ hat die Gewichtskraft der Platte keine axiale Komponente. Daher gilt

$$\boxed{p_2 = p_0 = 101.3 \text{ kPa.}}$$

Die Drehung erfolgt langsam, und Wärmeaustausch sowie Reibungsdissipation sind vernachlässigbar. Das Gas durchläuft daher eine quasistatische adiabatische Expansion. Der erste Hauptsatz liefert

$$nc_V dT = -p dV.$$

Mit $p = nRT/V$ folgt

$$c_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}.$$

Integration ergibt

$$TV^{R/c_V} = \text{konstant},$$

oder, mit der Definition

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1.399736,$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}.$$

Eliminiert man das Volumen mithilfe der idealen Gasgleichung, erhält man

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{R/(c_V+R)}.$$

Daher ist

$$T_2 = 322.1398 \left(\frac{101300}{102298.9} \right)^{8.314510/29.114510} = 321.2384 \text{ K}.$$

Somit gilt

$$T_2 = 321.2 \text{ K} = 48.1^\circ \text{C}.$$

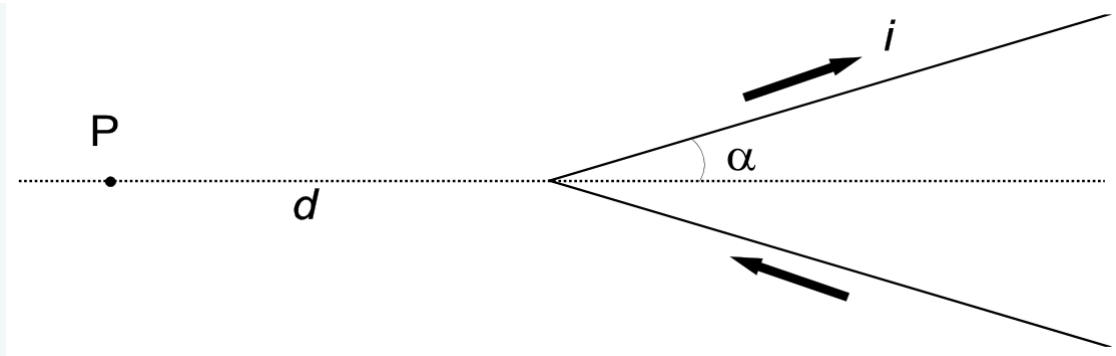
Sowohl Druck als auch Temperatur nehmen ab; die Temperatur sinkt um etwa 0.90 K, weil das expandierende Gas Arbeit auf Kosten seiner inneren Energie verrichtet.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Magnetfeld eines V-förmigen Drahtes

Zu den ersten Erfolgen von Ampères Deutung magnetischer Erscheinungen gehört die Berechnung des Magnetfeldes $\mathbf{B}$, das von stromdurchflossenen Drähten erzeugt wird, im Vergleich zu den frühen, ursprünglich von Biot und Savart aufgestellten Annahmen.

Ein besonders interessanter Fall ist der eines sehr langen, dünnen Drahtes, der einen konstanten Strom i führt, aus zwei geradlinigen Abschnitten besteht und mit dem halben Öffnungswinkel¹ α zu einem „V“ gebogen ist (siehe Abbildung). Nach Ampères Berechnungen ist der Betrag B des Magnetfeldes in einem gegebenen Punkt P, der auf der Symmetrieachse des „V“ außerhalb desselben und im Abstand d von seinem Scheitelpunkt liegt, proportional zu $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Ampères Arbeit ging später in Maxwells elektromagnetische Theorie ein und ist allgemein anerkannt.



Bestimmen Sie mithilfe unserer heutigen Kenntnisse des Elektromagnetismus Folgendes:

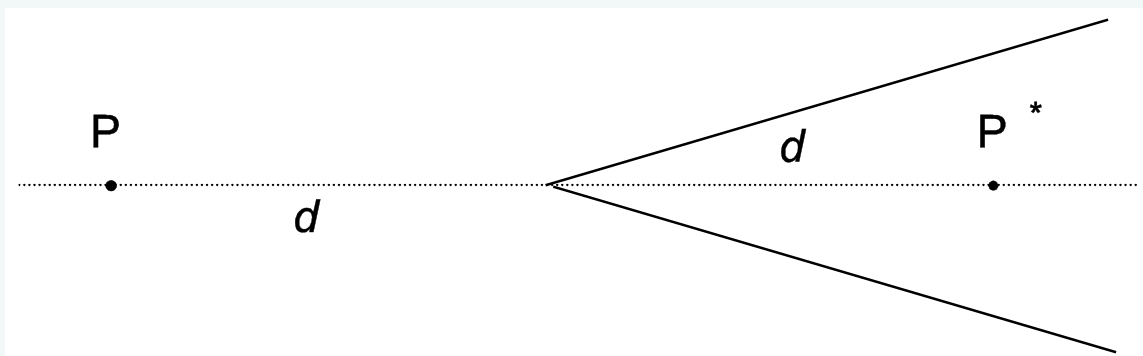
1. Bestimmen Sie die Richtung des Feldes $\mathbf{B}$ in P. [1 Punkt]
2. Bestimmen Sie unter Verwendung der Tatsache, dass das Feld proportional zu $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ist, den Proportionalitätsfaktor k in

$$|\mathbf{B}(\mathbf{P})| = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

[1.5 Punkte]

3. Berechnen Sie das Feld $\mathbf{B}$ in einem Punkt $\mathbf{P}^*$, der bezüglich des Scheitelpunktes symmetrisch zu P liegt, also auf der Symmetrieachse und im gleichen Abstand d , jedoch innerhalb des „V“ (siehe Abbildung). [2 Punkte]

¹ In dieser gesamten Aufgabe wird α im Bogenmaß angegeben



4. Um das Magnetfeld zu messen, bringen wir in P eine kleine Magnetnadel mit dem Trägheitsmoment I und dem magnetischen Dipolmoment μ an; sie schwingt um einen festen Punkt in einer Ebene, die die Richtung von $\mathbf{B}$ enthält. Berechnen Sie die Periodendauer kleiner Schwingungen dieser Nadel als Funktion von B . [2.5 Punkte]

Unter denselben Bedingungen hatten Biot und Savart stattdessen angenommen, dass das Magnetfeld in P durch $B(\mathbf{P}) = \frac{i\mu_0\alpha}{\pi^2 d}$ gegeben sein könnte (hier verwenden wir die moderne Schreibweise), wobei μ_0 die magnetische Permeabilität des Vakuums ist. Tatsächlich versuchten sie, durch ein Experiment zwischen den beiden Deutungen (derjenigen von Ampère und derjenigen von Biot und Savart) zu entscheiden, indem sie die Schwingungsdauer der Magnetnadel als Funktion des Öffnungswinkels des „V“ maßen. Für manche Werte von α sind die Unterschiede jedoch zu gering, um leicht messbar zu sein.

5. Um experimentell zwischen den beiden Vorhersagen für die Schwingungsdauer T der Magnetnadel in P unterscheiden zu können, benötigen wir einen Unterschied von mindestens 10%, nämlich $T_1 > 1.10 T_2$ (wobei T_1 die Vorhersage von Ampère und T_2 diejenige von Biot und Savart ist). Geben Sie an, in welchem Bereich wir den halben Öffnungswinkel α des „V“ näherungsweise wählen müssen, um zwischen den beiden Deutungen entscheiden zu können. [3 Punkte]

Hinweis

Je nachdem, welchen Lösungsweg Sie wählen, könnte die folgende trigonometrische Gleichung nützlich sein:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Physikalische Konstanten und allgemeine Daten

Zusätzlich zu den im Text der einzelnen Aufgaben angegebenen Zahlenwerten kann die Kenntnis einiger allgemeiner Daten und physikalischer Konstanten nützlich sein; diese finden Sie in der folgenden Zusammenstellung. Dies sind nahezu die genauesten derzeit verfügbaren Daten, weshalb sie viele Ziffern aufweisen; von Ihnen wird jedoch erwartet, dass Sie Ihre Ergebnisse mit einer für die jeweilige Aufgabe angemessenen Anzahl von Ziffern angeben.

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum: $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Magnetische Permeabilität des Vakuums: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Dielektrizitätskonstante des Vakuums: $\varepsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

Gravitationskonstante: $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

Gaskonstante: $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

Boltzmann-Konstante: $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Stefan-Boltzmann-Konstante: $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

Protonenladung: $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Elektronenmasse: $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Nullpunkt der Celsius-Skala: $T_K = 273.15 \text{ K}$

Sonnenmasse: $M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Erdmasse: $M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Mittlerer Erdradius: $r_E = 6.373 \text{ Mm}$

Große Halbachse der Erdbahn: $R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Sterntag: $d_S = 86.16406 \text{ ks}$

Jahr: $y = 31.558150 \text{ Ms}$

Normwert der Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche: $g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Normwert des Luftdrucks auf Meereshöhe: $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

Brechungsindex von Luft für sichtbares Licht bei Normaldruck und 15°C : $n_{\text{air}} = 1.000277$

Solarkonstante: $S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

Jupitermasse: $M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

Äquatorradius des Jupiters: $R_B = 69.8 \text{ Mm}$

Mittlerer Radius der Jupiterbahn: $R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Jupitertag: $d_J = 35.6$ ks

Jupiterjahr: $y_J = 374.32$ Ms

π : 3.14159265

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Es sei $\hat{\mathbf{z}}$ aus der Zeichenebene heraus zum Leser hin gerichtet, und es sei $\mu = |\boldsymbol{\mu}|$.

1. Das Feld in P steht **senkrecht auf der Ebene des Drahtes und zeigt aus der Zeichenebene heraus**.

2.
$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}, \quad \mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

3.
$$\mathbf{B}(P^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}},$$

in die Zeichenebene hinein gerichtet.

4.
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

5. Für die angegebene strenge Ungleichung $T_1 > 1.10T_2$ gilt

$$0 < \alpha < \alpha_c, \quad \alpha_c \simeq 0.768 \text{ rad} \simeq 44.0^\circ.$$

Bei $\alpha = \alpha_c$ beträgt der Unterschied genau 10%.

Lösung

Wir behandeln die beiden langen, dünnen Schenkel als halbumendliche gerade Drähte im Vakuum. Wie abgebildet, fließt der Strom entlang des unteren Schenkels zum Scheitelpunkt und entlang des oberen Schenkels von ihm weg. Wir wählen den Scheitelpunkt als Ursprung, wobei die positive x -Achse in das V hinein und $\hat{\mathbf{z}}$ aus der Zeichenebene heraus zeigt.

1. Richtung des Feldes in P

Das moderne Biot-Savart-Gesetz lautet

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

wobei $d\boldsymbol{\ell}$ in Stromrichtung und $\mathbf{R}$ vom Stromelement zum Beobachtungspunkt zeigt.

Beide Vektoren liegen in der Zeichenebene, sodass jeder Beitrag senkrecht auf dieser Ebene steht. In P ergibt die Rechte-Hand-Regel für jeden Schenkel einen nach außen gerichteten Beitrag: Im unteren Schenkel fließt der Strom zum Scheitelpunkt hin, im oberen Schenkel von ihm weg. Daher addieren sich ihre Beiträge:

$$\mathbf{B}(P) \text{ zeigt aus der Zeichenebene heraus.}$$

2. Bestimmung von k

Die Winkelabhängigkeit ist vorgegeben:

$$B(P) = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Betrachten wir den Grenzfall $\alpha = \pi/2$. Die beiden Schenkel bilden dann einen einzigen unendlich langen geraden Draht, und P liegt im senkrechten Abstand d von ihm.

Für diesen geraden Draht ergeben die Zylindersymmetrie und das Ampèresche Durchflutungsgesetz

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B(2\pi d) = \mu_0 i.$$

Folglich gilt

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

Da $\tan(\pi/4) = 1$, folgt daraus

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

Mit der angegebenen Permeabilität ergibt sich

$$k = (2 \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}) \frac{i}{d}.$$

Daher gilt

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

3. Feld in P^*

In P^* ergibt die Rechte-Hand-Regel für jeden der ursprünglichen Schenkel ein Feld, das in die Zeichenebene hinein zeigt.

Um seinen Betrag zu bestimmen, verlängern wir beide Schenkel unter Beibehaltung ihrer Stromrichtungen über den Scheitelpunkt hinaus, sodass jeder zu einem unendlich langen geraden Draht wird. Der senkrechte Abstand von P^* zu jedem der vervollständigten Drähte ist

$$\rho = d \sin \alpha.$$

Jeder vervollständigte Draht erzeugt ein in die Zeichenebene hinein gerichtetes Feld vom Betrag

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi \rho}.$$

Ihr Gesamtfeld hat daher den Betrag

$$B_{\text{complete}} = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

Die beiden hinzugefügten Halbgeraden bilden ein nach links geöffnetes V, das das Spiegelbild des ursprünglichen Drahtes ist. Bezogen auf dieses hinzugefügte V ist P^* ein äußerer Punkt auf der Symmetrieachse im Abstand d . Sein Feld hat folglich den Betrag $B(P)$, und die Rechte-Hand-Regel zeigt, dass es ebenfalls in die Zeichenebene hinein gerichtet ist.

Aus der Superposition folgt somit

$$B(P^*) + B(P) = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

Einsetzen des Ergebnisses aus Teil 2 liefert

$$B(P^*) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \left[\frac{2}{\sin \alpha} - \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right].$$

Mit

$$\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

wird der Ausdruck in der Klammer zu

$$\frac{2 - (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

Damit gilt

$$\mathbf{B}(P^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot \left(\frac{\alpha}{2} \right) \hat{\mathbf{z}}.$$

4. Periodendauer kleiner Schwingungen

Wir behandeln die kleine Nadel als magnetischen Dipol in einem über ihre Länge homogenen Feld und vernachlässigen Dämpfung sowie andere Drehmomente. Es sei θ der Winkel zwischen ihrem magnetischen Moment und dem Feld.

Das magnetische Drehmoment ist

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}.$$

Die Gleichgewichtslage, in der $\boldsymbol{\mu}$ parallel zu $\mathbf{B}$ ist, ist stabil. Wenn θ die Auslenkung aus dieser Gleichgewichtslage bezeichnet, lautet die Bewegungsgleichung für die Drehbewegung

$$I\ddot{\theta} = -\mu B \sin \theta.$$

Für kleine Schwingungen gelten $|\theta| \ll 1$ rad und $\sin \theta \simeq \theta$, sodass

$$\ddot{\theta} + \frac{\mu B}{I} \theta = 0.$$

Dies ist eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu B}{I}},$$

und daher gilt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

Werden I , μ und B in SI-Einheiten eingesetzt, ergibt sich die Periodendauer in Sekunden.

5. Winkelbereich für einen Unterschied der Periodendauern von mehr als 10%

Die beiden Vorhersagen für das Feld in P lauten

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right), \quad B_2 = \frac{\mu_0 i \alpha}{\pi^2 d},$$

wobei der zweite Ausdruck die in der Aufgabenstellung zitierte historische Annahme ist.

Da $T \propto B^{-1/2}$, gilt

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)}}.$$

Die experimentelle Anforderung wird damit zu

$$\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)} > 1.10^2 = 1.21.$$

Das Verhältnis der Periodendauern nimmt mit zunehmendem α ab. Um dies nachzuweisen, setzen wir $x = \alpha/2$; das Quadrat des Verhältnisses ist proportional zu $x \cot x$, und es gilt

$$\frac{d}{dx}(x \cot x) = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} < 0,$$

da für die betrachteten positiven Winkel $\sin(2x) < 2x$ gilt.

Seine Grenzwerte sind

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \simeq 1.1284, \quad \left. \frac{T_1}{T_2} \right|_{\alpha=\pi/2} = 1.$$

Somit trennt ein einziger Schwellenwert den Bereich, in dem sich die Vorhersagen unterscheiden lassen, von demjenigen, in dem dies nicht möglich ist.

Die numerische Lösung von

$$\frac{2\alpha_c}{\pi \tan(\alpha_c/2)} = 1.21$$

ergibt

$$\alpha_c \simeq 0.7682 \text{ rad} \simeq 44.01^\circ.$$

Der erforderliche halbe Öffnungswinkel liegt daher näherungsweise im Bereich

$$0 < \alpha < 0.77 \text{ rad} \quad (\text{ungefähr unter } 44^\circ).$$

Der genaue Schwellenwert ist eingeschlossen, wenn „mindestens 10%“ einschließlich des Gleichheitsfalls verstanden wird; durch die ausdrücklich angegebene strenge Ungleichung ist er ausgeschlossen. Der entartete Wert $\alpha = 0$ ist ausgeschlossen, weil beide Felder verschwinden und es keine endliche Periodendauer der magnetischen Schwingung gibt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Eine Raumsonde zum Jupiter

In dieser Aufgabe betrachten wir eine häufig verwendete Methode, um Raumsonden in die gewünschte Richtung zu beschleunigen. Die Raumsonde fliegt an einem Planeten vorbei und kann dabei ihre Geschwindigkeit erheblich erhöhen und ihre Flugrichtung beträchtlich ändern, indem sie der Bahnbewegung des Planeten eine sehr kleine Energiemenge entzieht. Wir untersuchen diesen Effekt hier für eine Raumsonde, die nahe am Jupiter vorbeifliegt.

Der Planet Jupiter umkreist die Sonne auf einer elliptischen Bahn, die durch einen Kreis mit dem mittleren Radius R angenähert werden kann; um die physikalische Situation analysieren zu können, müssen wir zunächst:

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit V des Planeten auf seiner Bahn um die Sonne. [1.5 Punkte]
2. Bestimmen Sie für eine Sonde zwischen Sonne und Jupiter (auf der Strecke Sonne–Jupiter) den Abstand vom Jupiter, bei dem die Gravitationskraft der Sonne die des Jupiters ausgleicht. [1 Punkt]

Eine Raumsonde der Masse $m = 825 \text{ kg}$ fliegt am Jupiter vorbei. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass die Bahn der Raumsonde vollständig in der Bahnebene des Jupiters liegt; damit vernachlässigen wir den wichtigen Fall, in dem die Raumsonde aus der Bahnebene des Jupiters herausgeschleudert wird.

Wir betrachten nur die Vorgänge in dem Gebiet, in dem die Anziehungskraft des Jupiters alle anderen Gravitationskräfte bei Weitem überwiegt.

Im Bezugssystem des Schwerpunkts der Sonne beträgt die Anfangsgeschwindigkeit der Raumsonde $v_0 = 1.00 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ (in positiver y -Richtung), während die Geschwindigkeit des Jupiters in negative x -Richtung weist (siehe Abbildung 1); mit „Anfangsgeschwindigkeit“ meinen wir die Geschwindigkeit der Raumsonde im interplanetaren Raum, wenn sie noch weit vom Jupiter entfernt ist, sich aber bereits in dem Gebiet befindet, in dem die Anziehungskraft der Sonne gegenüber der des Jupiters vernachlässigbar ist. Wir nehmen an, dass die Begegnung in einer hinreichend kurzen Zeit stattfindet, sodass die Richtungsänderung des Jupiters auf seiner Bahn um die Sonne vernachlässigt werden kann. Außerdem nehmen wir an, dass die Sonde hinter dem Jupiter vorbeifliegt, d. h., bei gleicher y -Koordinate ist die x -Koordinate der Sonde größer als die des Jupiters.

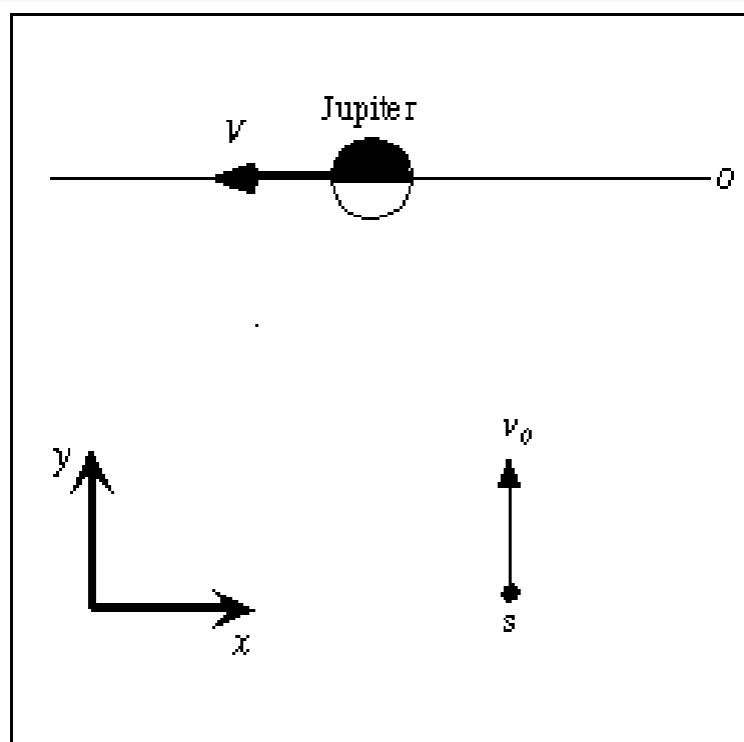


Abbildung 1: Ansicht im Schwerpunktsystem der Sonne. O bezeichnet die Bahn des Jupiters, s die Raumsonde.

3. Bestimmen Sie die Bewegungsrichtung der Raumsonde (als Winkel φ zwischen ihrer Bewegungsrichtung und der x -Achse) und ihre Geschwindigkeit v' im Bezugssystem des Jupiters, wenn sie noch weit vom Jupiter entfernt ist. [2 Punkte]
4. Bestimmen Sie den Wert der gesamten mechanischen Energie E der Raumsonde im Bezugssystem des Jupiters, wobei – wie üblich – ihre potenzielle Energie in sehr großer Entfernung gleich null gesetzt wird; hier bedeutet dies eine Entfernung, in der sie sich aufgrund der geringen Stärke aller gravitativen Wechselwirkungen mit nahezu konstanter Geschwindigkeit bewegt. [1 Punkt]

Die Bahn der Raumsonde im Bezugssystem des Jupiters ist eine Hyperbel, deren Gleichung in Polarkoordinaten in diesem Bezugssystem lautet:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E v'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right). \quad (1)$$

Dabei ist b der Abstand zwischen einer der Asymptoten und dem Jupiter (der sogenannte *Stoßparameter*), E die gesamte mechanische Energie der Sonde im Bezugssystem des Jupiters, G die Gravitationskonstante, M die Masse des Jupiters und r und θ die Polarkoordinaten (der radiale Abstand und der Polarwinkel).

Abbildung 2 zeigt die beiden Äste einer Hyperbel, wie sie durch Gleichung (1) beschrieben wird; auch die Asymptoten und die Polarkoordinaten sind eingezeichnet. Beachten Sie, dass der Ursprung von Gleichung (1) im „anziehenden Brennpunkt“ der Hyperbel liegt. Die Bahn der Raumsonde ist die Bahn für eine anziehende Kraft (der hervorgehobene Ast).

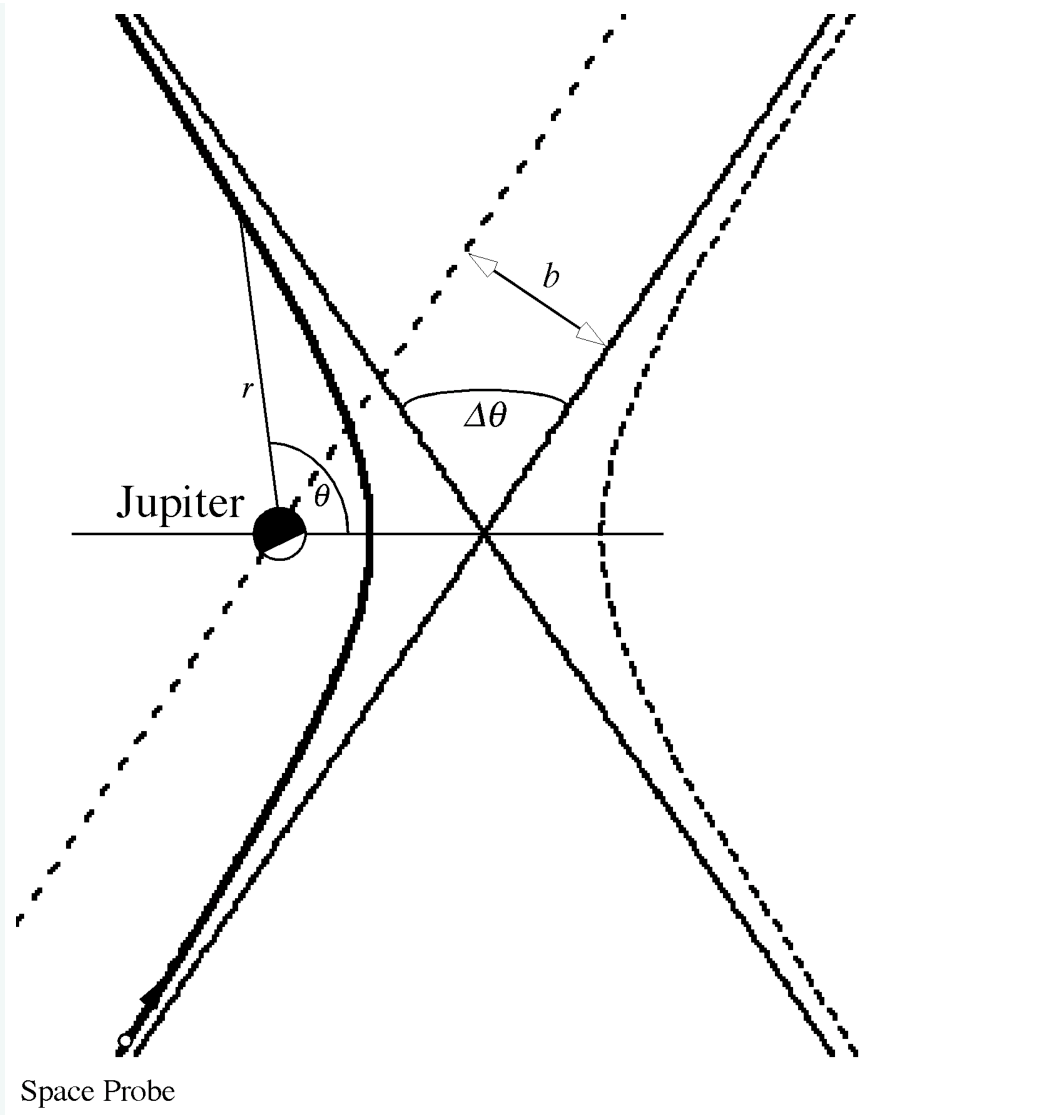


Abbildung 2

5. Bestimmen Sie mithilfe von Gleichung (1), die die Bahn der Raumsonde beschreibt, den gesamten Ablenkwinkel $\Delta\theta$ im Bezugssystem des Jupiters (wie in Abbildung 2 dargestellt) und drücken Sie ihn als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit v' und des Stoßparameters b aus. [2 Punkte]
6. Nehmen Sie an, dass die Sonde den Jupiter nicht in einem Abstand von weniger als drei Jupiterradien vom Mittelpunkt des Planeten passieren darf; bestimmen Sie den kleinstmöglichen Stoßparameter und den größtmöglichen Ablenkwinkel. [1 Punkt]
7. Bestimmen Sie eine Gleichung für die Endgeschwindigkeit v'' der Sonde im Bezugssystem der Sonne, die nur von der Geschwindigkeit V des Jupiters, der Anfangsgeschwindigkeit v_0 der Sonde und dem Ablenkwinkel $\Delta\theta$ abhängt. [1 Punkt]
8. Bestimmen Sie mithilfe des vorherigen Ergebnisses den Zahlenwert der Endgeschwindigkeit v'' im Bezugssystem der Sonne, wenn der Ablenkwinkel seinen größtmöglichen Wert hat. [0.5 Punkte]

Hinweis

Je nach gewähltem Lösungsweg können die folgenden trigonometrischen Formeln hilfreich sein:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Physikalische Konstanten und allgemeine Daten

Zusätzlich zu den Zahlenangaben im Text der einzelnen Aufgaben kann die Kenntnis einiger allgemeiner Daten und physikalischer Konstanten hilfreich sein; diese finden Sie in der folgenden Zusammenstellung. Diese Daten gehören zu den genauesten derzeit verfügbaren und enthalten daher viele Ziffern; es wird jedoch erwartet, dass Sie Ihre Ergebnisse mit einer für die jeweilige Aufgabe angemessenen Anzahl von Ziffern angeben.

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:	$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Magnetische Permeabilität des Vakuums:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Elektrische Permittivität des Vakuums:	$\varepsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$
Gravitationskonstante:	$G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Gaskonstante:	$R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
Boltzmann-Konstante:	$k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann-Konstante:	$\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
Protonenladung:	$e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Elektronenmasse:	$m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Planck-Konstante:	$h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Nullpunkt der Celsius-Skala:	$T_K = 273.15 \text{ K}$
Sonnenmasse:	$M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Erdmasse:	$M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Mittlerer Erdradius:	$r_E = 6.373 \text{ Mm}$
Große Halbachse der Erdbahn:	$R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Siderischer Tag:	$d_S = 86.16406 \text{ ks}$
Jahr:	$y = 31.558150 \text{ Ms}$
Normwert der Gravitationsfeldstärke an der Erdoberfläche:	$g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Normwert des Luftdrucks auf Meereshöhe:	$p_0 = 101325 \text{ Pa}$
Brechungsindex von Luft für sichtbares Licht bei Normaldruck und 15 °C:	$n_{\text{air}} = 1.000277$
Solarkonstante:	$S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
Jupitermasse:	$M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
Äquatorradius des Jupiters:	$R_B = 69.8 \text{ Mm}$
Mittlerer Radius der Jupiterbahn:	$R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Jupitertag:	$d_J = 35.6 \text{ ks}$
Jupiterjahr:	$y_J = 374.32 \text{ Ms}$
π :	3.14159265

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

1. Die Bahngeschwindigkeit des Jupiters beträgt

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \simeq 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

2. Der Abstand vom Jupiter in Richtung Sonne beträgt

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_S/M}} \simeq 2.33 \times 10^{10} \text{ m}.$$

3. Die Anfangsgeschwindigkeit im Bezugssystem des Jupiters ist $\mathbf{v}'_i = (V, v_0)$. Somit gilt

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{V}\right) = 37.4^\circ, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2} = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Der Winkel wird von der positiven x -Achse aus gegen den Uhrzeigersinn gemessen.

4. Die gesamte mechanische Energie im Bezugssystem des Jupiters beträgt

$$E = \frac{1}{2}m(V^2 + v_0^2) = 1.12 \times 10^{11} \text{ J}.$$

5. Der Ablenkwinkel beträgt

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{GM}{bv'^2}\right).$$

6. Mit $r_0 = 3R_B$ gilt

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}} = 4.90 \times 10^8 \text{ m},$$

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{1 + r_0 v'^2/(GM)}\right) = 87.4^\circ \simeq 1.53 \text{ rad}.$$

7. Die Endgeschwindigkeit im Bezugssystem der Sonne beträgt

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2Vv_0 \sin \Delta\theta}.$$

8. Beim größten zulässigen Ablenkwinkel gilt

$$v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.$$

Lösung

Wir verwenden das Newtonsche Gravitationsgesetz und die in der Aufgabe angegebenen Näherungen. Die Bahn des Jupiters ist kreisförmig, und seine Geschwindigkeit ist während der Begegnung praktisch konstant. Die Masse der Sonde ist gegenüber der Masse des Jupiters vernachlässigbar. Während des Vorbeiflugs vernachlässigen wir die Kraft der Sonne, sodass das Bezugssystem des Jupiters als Inertialsystem behandelt wird und sich die Sonde im folgenden Potenzial bewegt:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

Die Anfangs- und Endgeschwindigkeiten beziehen sich auf die asymptotischen Geschwindigkeiten dieser Zweikörpernäherung. Bei den numerischen Berechnungen werden ungerundete Zwischenwerte beibehalten.

1. Bahngeschwindigkeit des Jupiters

Die Gravitationskraft der Sonne liefert die Zentripetalkraft für den Jupiter:

$$\frac{GM_S M}{R^2} = \frac{MV^2}{R}.$$

Daher gilt

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}.$$

Mit den angegebenen Konstanten ergibt sich

$$V = \sqrt{\frac{(6.67259 \times 10^{-11})(1.991 \times 10^{30})}{7.783 \times 10^{11}}} = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Somit gilt

$$\boxed{V = 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.}$$

Die alternative Berechnung für eine Kreisbahn $V = 2\pi R/y_J$ ergibt $1.30642 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$, was bei der angegebenen Genauigkeit übereinstimmt.

2. Punkt, an dem sich die Gravitationskräfte ausgleichen

Sei d der Abstand vom Jupiter in Richtung Sonne. Der Abstand von der Sonne ist dann $R - d$. Die beiden Gravitationskräfte weisen in entgegengesetzte Richtungen, sodass für ihr Gleichgewicht gelten muss:

$$\frac{GMm}{d^2} = \frac{GM_S m}{(R - d)^2}.$$

Ziehen der positiven Quadratwurzeln ergibt

$$\frac{R - d}{d} = \sqrt{\frac{M_S}{M}}.$$

Auflösen liefert

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_S/M}}.$$

Numerisch ergibt sich

$$d = \frac{7.783 \times 10^{11}}{1 + \sqrt{(1.991 \times 10^{30})/(1.901 \times 10^{27})}} = 2.33285 \times 10^{10} \text{ m}.$$

Damit gilt

$$\boxed{d = 2.33 \times 10^{10} \text{ m}.}$$

3. Anfangsbewegung im Bezugssystem des Jupiters

Im Bezugssystem der Sonne lauten die Anfangsgeschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_i = v_0 \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{V}_J = -V \hat{\mathbf{x}}.$$

Die Galilei-Transformation der Geschwindigkeit ergibt

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}_J = V \hat{\mathbf{x}} + v_0 \hat{\mathbf{y}}.$$

Beide Komponenten sind positiv, sodass der Geschwindigkeitsvektor im ersten Quadranten liegt:

$$\tan \varphi = \frac{v_0}{V}, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{1.00 \times 10^4}{1.30650 \times 10^4} \right) = 37.4306^\circ,$$

$$v' = \sqrt{(1.30650 \times 10^4)^2 + (1.00 \times 10^4)^2} = 1.64528 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Somit gilt

$$\boxed{\varphi = 37.4^\circ, \quad v' = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.}$$

4. Gesamte mechanische Energie im Bezugssystem des Jupiters

Die potenzielle Energie verschwindet bei unendlichem Abstand. Folglich ist die erhaltene Gesamtenergie gleich der anfänglichen asymptotischen kinetischen Energie:

$$E = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m (V^2 + v_0^2).$$

Einsetzen ergibt

$$E = \frac{1}{2} (825) (1.64528 \times 10^4)^2 = 1.11661 \times 10^{11} \text{ J}.$$

Daher gilt

$$\boxed{E = 1.12 \times 10^{11} \text{ J}.}$$

Ihr positiver Wert steht im Einklang mit einer ungebundenen hyperbolischen Bahn.

5. Ablenkwinkel

Mit $E = \frac{1}{2} m v'^2$ schreiben wir Gleichung (1) in der Form

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

wobei

$$p = \frac{v'^2 b^2}{GM}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2 v'^4}{G^2 M^2}} > 1.$$

An beiden Asymptoten gilt $r \rightarrow \infty$, also

$$1 + e \cos \theta = 0.$$

Die asymptotischen Polarwinkel seien $\pm \theta_\infty$, wobei

$$\cos \theta_{\infty} = -\frac{1}{e}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta_{\infty} < \pi.$$

Auf der einlaufenden Asymptote weist die Geschwindigkeit entgegen der radialen Richtung. Ihr Winkel gegenüber der Periapsisachse beträgt daher $\pi - \theta_{\infty}$. Auf der auslaufenden Asymptote weist die Geschwindigkeit in radialer Richtung und hat den Winkel θ_{∞} . Die Differenz dieser Winkel ist

$$\Delta\theta = \theta_{\infty} - (\pi - \theta_{\infty}) = 2\theta_{\infty} - \pi.$$

Daraus folgt

$$\sin \frac{\Delta\theta}{2} = \sin \left(\theta_{\infty} - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \theta_{\infty} = \frac{1}{e}.$$

Wegen $0 < \Delta\theta/2 < \pi/2$ gilt

$$\tan \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{GM}{bv'^2}.$$

Somit gilt

$$\boxed{\Delta\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{bv'^2} \right)}.$$

Gleichwertig ist

$$\Delta\theta = 2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + b^2 v'^4 / (G^2 M^2)}} \right].$$

6. Kleinsten Stoßparameter und größter Ablenkwinkel

Sei r_p der kleinste Abstand zum Mittelpunkt des Jupiters und v_p die Geschwindigkeit an dieser Stelle. Aus der Energieerhaltung folgt

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2}mv'^2,$$

also

$$v_p^2 = v'^2 + \frac{2GM}{r_p}.$$

Die Kraft ist eine Zentralkraft, sodass der Drehimpuls bezüglich des Jupiters erhalten bleibt. Am Punkt der größten Annäherung steht die Geschwindigkeit senkrecht zum Radius:

$$mbv' = mr_p v_p.$$

Quadrieren und Einsetzen des Ergebnisses aus der Energieerhaltung ergibt

$$b^2 v'^2 = r_p^2 \left(v'^2 + \frac{2GM}{r_p} \right),$$

woraus folgt

$$b^2 = r_p^2 + \frac{2GM r_p}{v'^2}.$$

Dieser Ausdruck wächst mit r_p . Daher tritt der kleinste zulässige Stoßparameter auf bei

$$r_p = r_0 = 3R_B = 3(69.8 \times 10^6) \text{ m}.$$

Daher gilt

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}}.$$

Mit

$$GM = 1.268459359 \times 10^{17} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2},$$

erhalten wir

$$b_{\min} = 4.89996 \times 10^8 \text{ m},$$

also

$$\boxed{b_{\min} = 4.90 \times 10^8 \text{ m.}}$$

Der Ablenkwinkel nimmt mit wachsendem b ab, sodass er bei $b_{\min}$ maximal ist. Somit gilt

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{b_{\min} v'^2} \right).$$

Um dies direkt durch den kleinsten Abstand auszudrücken, setzen wir die Beziehung für $b_{\min}^2$ in die Exzentrizität ein:

$$e_{\min}^2 = 1 + \frac{b_{\min}^2 v'^4}{G^2 M^2} = \left(1 + \frac{r_0 v'^2}{GM} \right)^2.$$

Damit gilt

$$e_{\min} = 1 + \frac{r_0 v'^2}{GM} = 1.44687$$

und

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{e_{\min}} \right) = 1.52615 \text{ rad} = 87.4421^\circ.$$

Daher gilt

$$\boxed{\Delta\theta_{\max} = 87.4^\circ.}$$

7. Endgeschwindigkeit im Bezugssystem der Sonne

Die Energieerhaltung im Bezugssystem des Jupiters gewährleistet, dass der Betrag der auslaufenden asymptotischen Geschwindigkeit weiterhin v' beträgt.

Da die Sonde hinter dem Jupiter vorbeifliegt, dreht die gravitative Ablenkung ihren Geschwindigkeitsvektor in den gegebenen x, y -Koordinaten gegen den Uhrzeigersinn. Die auslaufende Relativgeschwindigkeit bildet folglich mit der positiven x -Achse den Winkel $\varphi + \Delta\theta$:

$$\mathbf{v}'_f = v' \cos(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{x}} + v' \sin(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{y}}.$$

Mit

$$v' \cos \varphi = V, \quad v' \sin \varphi = v_0,$$

liefern die Additionstheoreme

$$v'_{f,x} = V \cos \Delta\theta - v_0 \sin \Delta\theta,$$

$$v'_{f,y} = V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta.$$

Bei der Rücktransformation in das Bezugssystem der Sonne muss die Geschwindigkeit des Jupiters $-V\hat{\mathbf{x}}$ addiert werden:

$$\begin{aligned}v_x'' &= V(\cos \Delta\theta - 1) - v_0 \sin \Delta\theta, \\v_y'' &= V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta.\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}v''^2 &= (v_x'')^2 + (v_y'')^2 \\&= V^2 [(\cos \Delta\theta - 1)^2 + \sin^2 \Delta\theta] \\&\quad + v_0^2 [\sin^2 \Delta\theta + \cos^2 \Delta\theta] + 2Vv_0 \sin \Delta\theta \\&= 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + v_0^2 + 2Vv_0 \sin \Delta\theta.\end{aligned}$$

Somit lautet der gesuchte Ausdruck

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2Vv_0 \sin \Delta\theta}.$$

Als Konsistenzprüfung ergibt das Einsetzen von $\Delta\theta = 0$ den Wert $v'' = v_0$.

8. Endgeschwindigkeit bei größtem Ablenk Winkel

Einsetzen der ungerundeten Werte

$$V = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad v_0 = 1.00 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad \Delta\theta_{\max} = 1.52615 \text{ rad},$$

ergibt

$$\begin{aligned}v'' &= \left[(1.00 \times 10^4)^2 + 2(1.30650 \times 10^4)^2(1 - \cos 1.52615) \right. \\&\quad \left. + 2(1.30650 \times 10^4)(1.00 \times 10^4) \sin 1.52615 \right]^{1/2} \\&= 2.62144 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.$$

Die Gravitation des Jupiters ändert die Richtung der asymptotischen Geschwindigkeit der Sonde im Bezugssystem des Jupiters. Diese Änderung bewirkt die Zunahme der Geschwindigkeit und der kinetischen Energie im Bezugssystem der Sonne; die dafür erforderliche Energie stammt aus einer vernachlässigbar kleinen Verringerung der Bahnenergie des Jupiters.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.