

المسألة 1: امتصاص غاز للإشعاع

يحتوي وعاء أسطواناني، محوره رأسي، على غاز جزيئي في حالة اتزان ديناميكي حراري. تتكون القاعدة العلوية للأسطوانة من لوح زجاجي يمكنه التحرك بحرية؛ ولنفترض أنه لا يوجد تسرب للغاز، وأن الاحتكاك بين اللوح الزجاجي وجدران الأسطوانة يكفي فقط لتخميد الاهتزازات، لكنه لا يتسبب في فقد ملحوظ للطاقة مقارنة بالطاقات الأخرى المعنية. في البداية، تكون درجة حرارة الغاز مساوية لدرجة حرارة الوسط المحيط. ويمكن اعتبار الغاز مثاليًا بتقريب جيد. لنفترض أن جدران الأسطوانة (بما فيها القاعدتان) ذات موصلية حرارية وسعة حرارية منخفضتين جدًا، ولذلك يكون انتقال الحرارة بين الغاز والوسط المحيط بطيئًا جدًا، ويمكن إهماله في حل هذه المسألة.

ندخل إلى الأسطوانة، عبر اللوح الزجاجي، الضوء المنبعث من ليزر ذي قدرة ثابتة؛ ينفذ هذا الإشعاع بسهولة عبر الهواء والزجاج، لكن الغاز داخل الوعاء يمتصه بالكامل. وبامتصاص هذا الإشعاع، تنتقل الجزيئات إلى حالات مثارة، تُصدر منها سريعًا إشعاعًا تحت أحمر، عائدًا على مراحل إلى الحالة الأساسية للجزيء؛ غير أن جزيئات أخرى تمتص هذا الإشعاع تحت الأحمر بدورها، وتعكسه جدران الوعاء، بما فيها اللوح الزجاجي. ومن ثم تتحول الطاقة الممتصة من الليزر، خلال زمن قصير جدًا، إلى حركة حرارية (حركة جزيئية عشوائية)، وتبقى بعد ذلك في الغاز زمنًا طويلًا بما يكفي.

نلاحظ أن اللوح الزجاجي يتحرك إلى أعلى؛ وبعد زمن معين من التشعيع نطفئ الليزر ونقيس هذه الإزاحة.

1. باستخدام المعطيات أدناه، ومعطيات ورقة الثوابت الفيزيائية عند الحاجة، احسب درجة حرارة الغاز وضغطه بعد التشعيع. [2 نقطة]

2. احسب الشغل الميكانيكي الذي يبذله الغاز نتيجة امتصاص الإشعاع. [1 نقطة]

3. احسب الطاقة الإشعاعية الممتصة أثناء التشعيع. [2 نقطة]

4. احسب قدرة الإشعاع المنبعث من الليزر التي يمتصها الغاز، والعدد المقابل من الفوتونات (ومن ثم من عمليات الامتصاص الأولية) في وحدة الزمن. [1.5 نقطة]

5. احسب كفاءة عملية تحويل الطاقة الضوئية إلى تغير في طاقة الوضع الميكانيكية للوح الزجاجي. [1 نقطة]

بعد ذلك، يُدار محور الأسطوانة ببطء بزاوية 90°، ليصبح أفقيًا. ويظل بالإمكان إهمال التبادل الحراري بين الغاز والوعاء.

6. بين ما إذا كان ضغط الغاز و/أو درجة حرارته يتغيران نتيجة هذا الدوران، وإذا حدث تغير، فما القيمة الجديدة لكل كمية تتغير. [2.5 نقطة]

المعطيات

ضغط الغرفة: $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

درجة حرارة الغرفة: $T_0 = 20.0^\circ\text{C}$

القطر الداخلي للأسطوانة: $2r = 100 \text{ mm}$

كتلة اللوح الزجاجي: $m = 800 \text{ g}$

كمية المادة الغازية داخل الوعاء: $n = 0.100 \text{ mol}$

السعة الحرارية المولية للغاز عند حجم ثابت: $c_V = 20.8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

الطول الموجي لإشعاع الليزر: $\lambda = 514 \text{ nm}$

زمن التشعيع: $\Delta t = 10.0 \text{ s}$

إزاحة اللوح المتحرك بعد التشعيع: $\Delta s = 30.0 \text{ mm}$

الثوابت الفيزيائية والمعطيات العامة

إضافة إلى المعطيات العددية الواردة في نص كل مسألة، قد تكون معرفة بعض المعطيات العامة والثوابت الفيزيائية مفيدة، ويمكنكم العثور عليها ضمن القائمة التالية. وهذه من أدق المعطيات المتاحة حاليًا تقريبًا، ولذلك تتضمن عددًا كبيرًا من الأرقام؛ ومع ذلك، يُتوقع منكم كتابة نتائجكم بعدد من الأرقام يناسب كل مسألة.

$$\begin{aligned}
 c &= 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ سرعة الضوء في الفراغ} \\
 \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \text{ النفاذية المغناطيسية للفراغ} \\
 \varepsilon_0 &= 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1} \text{ السماحية الكهربائية للفراغ} \\
 G &= 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) \text{ ثابت الجذب العام} \\
 R &= 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \text{ ثابت الغازات} \\
 k &= 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ ثابت بولتزمان} \\
 \sigma &= 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4) \text{ ثابت ستيفان} \\
 e &= 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C} \text{ شحنة البروتون} \\
 m_e &= 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \text{ كتلة الإلكترون} \\
 h &= 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \text{ ثابت بلانك} \\
 T_K &= 273.15 \text{ K} \text{ نقطة الصفر في المقياس المئوي} \\
 M_S &= 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg} \text{ كتلة الشمس} \\
 M_E &= 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg} \text{ كتلة الأرض} \\
 r_E &= 6.373 \text{ Mm} \text{ متوسط نصف قطر الأرض} \\
 R_E &= 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m} \text{ نصف المحور الأكبر لمدار الأرض} \\
 d_S &= 86.16406 \text{ ks} \text{ اليوم النجمي} \\
 y &= 31.558150 \text{ Ms} \text{ السنة} \\
 g &= 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ القيمة القياسية لشدة مجال الجاذبية عند سطح الأرض} \\
 p_0 &= 101325 \text{ Pa} \text{ القيمة القياسية للضغط الجوي عند مستوى سطح البحر} \\
 n_{\text{air}} &= 1.000277 : 15^\circ\text{C} \text{ معامل انكسار الهواء للضوء المرئي، عند الضغط القياسي ودرجة حرارة} \\
 S &= 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{ الثابت الشمسي} \\
 M &= 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg} \text{ كتلة المشتري} \\
 R_B &= 69.8 \text{ Mm} \text{ نصف قطر المشتري الاستوائي} \\
 R &= 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m} \text{ متوسط نصف قطر مدار المشتري} \\
 d_J &= 35.6 \text{ ks} \text{ يوم المشتري} \\
 y_J &= 374.32 \text{ Ms} \text{ سنة المشتري} \\
 \pi &= 3.14159265
 \end{aligned}$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

1. بعد التشعيع:

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ\text{C}, \quad p_1 = 102.3 \text{ kPa.}$$

2. الشغل الميكانيكي الذي يبذله الغاز:

$$W = 24.1 \text{ J.}$$

3. الطاقة الإشعاعية المتصدة:

$$E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J.}$$

4. قدرة الليزر المتصلة ومعدل امتصاص الفوتونات:

$$P_{\text{abs}} = 8.44 \text{ W}, \quad \dot{N} = 2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}.$$

5. كفاءة زيادة طاقة وضع اللوح في مجال الجاذبية:

$$\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%.$$

6. ينخفض كل من الضغط ودرجة الحرارة. بعد الدوران:

$$p_2 = 101.3 \text{ kPa}, \quad T_2 = 321.2 \text{ K} = 48.1^\circ\text{C}.$$

الحل

نستخدم تقريب الغاز المثالي، والسعة الحرارية المولية الثابتة المعطاة، مع إهمال تسرب الحرارة وفقد الطاقة بالاحتكاك. ولا توجد طاقة حركية عيانية في الحالتين الابتدائية والنهائية. وضغط الغرفة المستخدم أدناه هو القيمة الخاصة بهذه المسألة $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$.

مساحة المقطع العرضي للأسطوانة والزيادة المقيسة في الحجم هما

$$A = \pi r^2 = \pi(0.0500)^2 = 7.85398 \times 10^{-3} \text{ m}^2,$$

$$\Delta V = A\Delta s = (7.85398 \times 10^{-3})(0.0300) = 2.35619 \times 10^{-4} \text{ m}^3.$$

1. درجة الحرارة والضغط بعد التشيع

في حالة الاتزان الميكانيكي في الاتجاه الرأسي، توازن قوة الغاز المتجهة إلى أعلى القوة الناتجة عن الضغط الجوي ووزن اللوح:

$$p_1 A = p_0 A + mg.$$

إذن

$$p_1 = p_0 + \frac{mg}{A} = 101300 + \frac{(0.800)(9.80665)}{7.85398 \times 10^{-3}} = 102298.9 \text{ Pa}.$$

ينطبق شرط الاتزان نفسه قبل التشيع، ولذلك يتساوى ضغطا الغاز الابتدائي والنهائي:

$$p_1 = 102.3 \text{ kPa}.$$

ليكن V_0 و V_1 حجمي الغاز قبل التشيع وبعده. بتطبيق قانون الغاز المثالي على الحالتين، نحصل على

$$p_1 V_0 = nRT_0, \quad p_1 V_1 = nRT_1.$$

وبالطرح نحصل على

$$p_1 \Delta V = nR(T_1 - T_0).$$

وباستخدام $T_0 = 293.15 \text{ K}$

$$T_1 - T_0 = \frac{(102298.9)(2.35619 \times 10^{-4})}{(0.100)(8.314510)} = 28.9898 \text{ K}.$$

وعليه

$$T_1 = 322.1 \text{ K} = 49.0^\circ\text{C}.$$

2. الشغل الميكانيكي الذي يبذله الغاز

القوة المعاكسة $p_0 A + mg$ ثابتة. ومع إهمال الفقد بالاحتكاك وانعدام الطاقة الحركية للوح في الحالتين الابتدائية والنهائية، يبذل الغاز شغلاً مقداره

$$W = (p_0 A + mg)\Delta s = p_0 \Delta V + mg\Delta s = p_1 \Delta V.$$

عددياً،

$$W = (102298.9)(2.35619 \times 10^{-4}) = 24.1036 \text{ J},$$

ومن ثم

$$\boxed{W = 24.1 \text{ J.}}$$

يتكون هذا الشغل من 23.8683 J تُبذل ضد الضغط الجوي، و 0.235360 J تُبذل في رفع اللوح.

3. الطاقة الإشعاعية الممتصة

يتحول الإشعاع الممتص سريعاً إلى طاقة حرارية. ويعطي حفظ الطاقة، مع اعتبار الشغل موجباً عندما يبذل الغاز،

$$E_{\text{abs}} = \Delta U + W.$$

بالنسبة إلى الغاز المثالي،

$$\Delta U = nc_V(T_1 - T_0) = (0.100)(20.8)(28.9898) = 60.2988 \text{ J}.$$

وبالتالي،

$$E_{\text{abs}} = 60.2988 + 24.1036 = 84.4024 \text{ J},$$

أي

$$\boxed{E_{\text{abs}} = 84.4 \text{ J.}}$$

وبصورة مكافئة، بما أن $W = nR(T_1 - T_0)$ ، فإن

$$E_{\text{abs}} = n(c_V + R)(T_1 - T_0) = nc_P(T_1 - T_0),$$

حيث

$$c_P = c_V + R = 29.114510 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}.$$

4. القدرة الممتصة ومعدل امتصاص الفوتونات

قدرة الليزر ثابتة، ومن ثم

$$P_{\text{abs}} = \frac{E_{\text{abs}}}{\Delta t} = \frac{84.4024}{10.0} = \boxed{8.44 \text{ W}}.$$

لكل فوتون ليزر ساقط طاقة مقدارها

$$\varepsilon_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.6260755 \times 10^{-34})(299792458)}{514 \times 10^{-9}} = 3.86468 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

تُمتص جميع فوتونات الليزر الساقطة التي تدخل الغاز، ولذلك يكون معدل امتصاصها

$$\dot{N} = \frac{P_{\text{abs}}}{\varepsilon_\gamma} = \frac{8.44024}{3.86468 \times 10^{-19}} = \boxed{2.18 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}}.$$

وهذا هو أيضاً معدل عمليات الامتصاص الأولية لفوتونات الليزر.

5. كفاءة التحويل إلى طاقة وضع اللوح

تزداد طاقة وضع اللوح في مجال الجاذبية بمقدار

$$\Delta E_{\text{pot}} = mg\Delta s = (0.800)(9.80665)(0.0300) = 0.235360 \text{ J}.$$

وعليه، فإن الكفاءة المطلوبة هي

$$\eta = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{E_{\text{abs}}} = \frac{0.235360}{84.4024} = 2.78854 \times 10^{-3}.$$

إنذن

$$\boxed{\eta = 2.79 \times 10^{-3} = 0.279\%}.$$

تعكس قيمتها الصغيرة الطاقة المستخدمة في تسخين الغاز وإزاحة الهواء المحيط.

6. الضغط ودرجة الحرارة بعد الدوران

لتكن θ الزاوية بين محور الأسطوانة والاتجاه الرأسي نحو الأعلى. أثناء الدوران البطيء، يعطي الاتزان الميكانيكي على امتداد المحور

$$p(\theta)A = p_0A + mg \cos \theta,$$

ومن ثم

$$p(\theta) = p_0 + \frac{mg}{A} \cos \theta.$$

عند $\theta = 90^\circ$ ، لا تكون لوزن اللوح مركبة محورية. ولذلك

$$p_2 = p_0 = 101.3 \text{ kPa.}$$

الدوران بطيء، والتبادل الحراري وتبدد الطاقة بالاحتكاك مهملان. لذلك يخضع الغاز لتمدد كظومي شبه ساكن. ويعطي القانون الأول للديناميكا الحرارية

$$nc_V dT = -p dV.$$

وباستخدام $p = nRT/V$

$$c_V \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}.$$

يعطي التكامل

$$TV^{R/c_V} = \text{ثابت},$$

أو، بتعريف

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = 1.399736,$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{ثابت}.$$

بحذف الحجم باستخدام قانون الغاز المثالي نحصل على

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{R/(c_V+R)}.$$

وعليه

$$T_2 = 322.1398 \left(\frac{101300}{102298.9} \right)^{8.314510/29.114510} = 321.2384 \text{ K.}$$

إذن

$$T_2 = 321.2 \text{ K} = 48.1^\circ\text{C.}$$

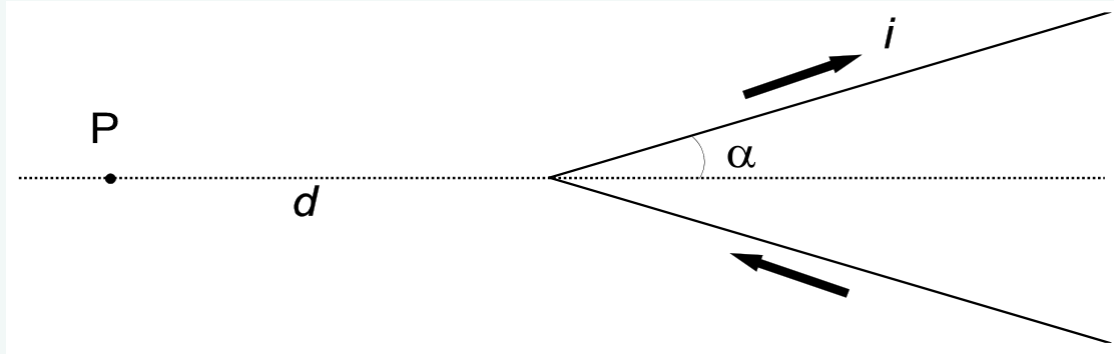
ينخفض كل من الضغط ودرجة الحرارة؛ وتنخفض درجة الحرارة بنحو 0.90 K لأن الغاز المتمدد يبذل شغلاً على حساب طاقته الداخلية.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: المجال المغناطيسي لسلك على شكل V

من أولى نجاحات تفسير أمبير للظواهر المغناطيسية حساب المجال المغناطيسي $\mathbf{B}$ الذي تولّده الأسلاك الحاملة لتيار كهربائي، مقارنةً بالافتراضات المبكرة التي وضعها بيو وسافار في الأصل.

من الحالات المثيرة للاهتمام بوجه خاص حالة سلك رفيع طويل جداً، يحمل تياراً ثابتاً i ، ويتكوّن من جزأين مستقيمين مثنيين على شكل الحرف "V"، ونصف زاوية فتحته¹ هو α (انظر الشكل). فإن مقدار المجال المغناطيسي B عند نقطة معينة P تقع على محور الحرف "V"، خارجه وعلى مسافة d من رأسه، يتناسب طردياً مع $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. وقد أُدرج عمل أمبير لاحقاً في نظرية ماكسويل الكهرومغناطيسية، وهو مقبول على نطاق عالمي.



باستخدام معرفتنا المعاصرة بالكهرومغناطيسية،

1. أوجد اتجاه المجال B عند P . [1 نقطة]

2. علماً بأن المجال يتناسب طردياً مع $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ، أوجد ثابت التناسب k في

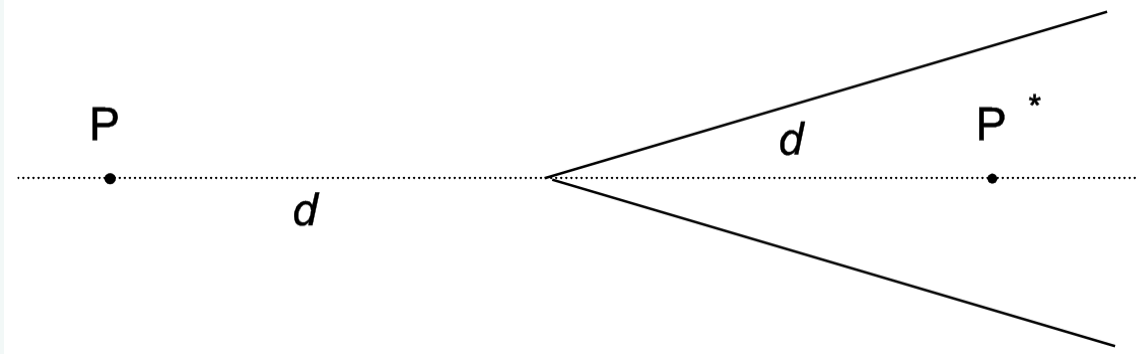
$$|B(P)| = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

[1.5 نقطة]

3. احسب المجال B عند نقطة P^* متناظرة مع P بالنسبة إلى الرأس، أي تقع على المحور وعلى المسافة نفسها d ، ولكن داخل

الحرف "V" (انظر الشكل). [2 نقطتان]

¹ يُعبّر عن α بالراديان في جميع أجزاء هذه المسألة



4. لقياس المجال المغناطيسي، نضع عند P إبرة مغناطيسية صغيرة عزم قصورها الذاتي I وعزمها المغناطيسي ثنائي القطب μ ؛ وتتذبذب حول نقطة ثابتة في مستوى يحتوي على اتجاه B . احسب زمن دورة التذبذبات الصغيرة لهذه الإبرة بدلالة B .

[2.5 نقطة]

في الظروف نفسها، كان بيو وسافار قد افترضوا بدلاً من ذلك أن المجال المغناطيسي عند P قد يكون (نستخدم هنا الترميز الحديث) $B(P) = \frac{i\mu_0\alpha}{\pi^2 d}$ ، حيث μ_0 هي النفاذية المغناطيسية للفراغ. وقد حاولوا بالفعل الحسم تجريبياً بين التفسيرين (تفسير أمبير وتفسير بيو وسافار) بقياس زمن دورة تذبذب الإبرة المغناطيسية بدلالة زاوية فتحة الحرف "V". غير أن الفروق، لبعض قيم α ، تكون صغيرة جداً بحيث يصعب قياسها بسهولة.

5. إذا كنا، للتمييز تجريبياً بين التنبؤين بزمن دورة تذبذب الإبرة المغناطيسية T عند P ، نحتاج إلى فرق لا يقل عن 10%، أي

$T_1 > 1.10 T_2$ (حيث T_1 هو تنبؤ أمبير و T_2 هو تنبؤ بيو-سافار)، فحدّد المجال التقريبي الذي يجب أن نختار ضمنه

نصف زاوية فتحة الحرف "V"، أي α ، لكي نتمكن من الحسم بين التفسيرين. [3 نقاط]

تلميح

بحسب المسار الذي تتبَّعه في الحل، قد تكون المعادلة المثلثية التالية مفيدة:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

الثوابت الفيزيائية والمعطيات العامة

إضافةً إلى المعطيات العددية الواردة في نص كل مسألة، قد تكون معرفة بعض المعطيات العامة والثوابت الفيزيائية مفيدة، ويمكنك أن تجدَها ضمن القائمة التالية. وهذه من أدق المعطيات المتاحة حاليًا تقريبًا، ولذلك تتضمَّن عددًا كبيرًا من الأرقام؛ غير أنه يُتَوَقَّع منك أن تكتب نتائجك بعدد من الأرقام يتناسب مع كل مسألة.

سرعة الضوء في الفراغ: $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

النفاذية المغناطيسية للفراغ: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

السماحية الكهربائية للفراغ: $\epsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$

ثابت الجاذبية: $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

ثابت الغازات: $R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$

ثابت بولتزمان: $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

ثابت ستيفان: $\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$

شحنة البروتون: $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

كتلة الإلكترون: $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

ثابت بلانك: $h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

نقطة الصفر في المقياس المئوي: $T_K = 273.15 \text{ K}$

كتلة الشمس: $M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

كتلة الأرض: $M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

متوسط نصف قطر الأرض: $r_E = 6.373 \text{ Mm}$

نصف المحور الأكبر لمدار الأرض: $R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$

اليوم النجمي: $d_S = 86.16406 \text{ ks}$

السنة: $y = 31.558150 \text{ Ms}$

القيمة المعيارية لمجال الجاذبية عند سطح الأرض: $g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

القيمة المعيارية للضغط الجوي عند مستوى سطح البحر: $p_0 = 101325 \text{ Pa}$

معامل انكسار الهواء للضوء المرئي، عند الضغط المعياري ودرجة حرارة 15°C : $n_{\text{air}} = 1.000277$

الثابت الشمسي: $S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

كتلة المشتري: $M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

نصف قطر المشتري الاستوائي: $R_B = 69.8 \text{ Mm}$

متوسط نصف قطر مدار المشتري: $R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$

اليوم على المشتري: $d_J = 35.6 \text{ ks}$

السنة على المشتري: $y_J = 374.32 \text{ Ms}$

$3.14159265 : \pi$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

ليكن اتجاه $\hat{z}$ خارجًا من الصفحة نحو القارئ، ولتكن $\mu = |\mu|$.

1. المجال عند P عمودي على مستوى السلك، ومُتجه إلى خارج الصفحة.

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}, \quad \mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}. \quad .2$$

$$\mathbf{B}(P^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}, \quad .3$$

واتجاهه إلى داخل الصفحة.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}. \quad .4$$

5. بالنسبة إلى المتباينة الصارمة المذكورة $T_1 > 1.10T_2$

$$0 < \alpha < \alpha_c, \quad \alpha_c \simeq 0.768 \text{ rad} \simeq 44.0^\circ.$$

عند $\alpha = \alpha_c$ ، يكون الفرق 10% بالضبط.

الحل

نعامل الذراعين الطويلتين الرفيعتين على أنهما سلكان مستقيمان نصف لانهايين في الفراغ. يدخل التيار إلى الرأس على امتداد الذراع السفلى ويخرج على امتداد الذراع العليا، كما هو موضح. نتخذ الرأس مبدأ الإحداثيات، بحيث يتجه محور x الموجب إلى داخل الحرف V ويتجه $\hat{\mathbf{z}}$ إلى خارج الصفحة.

1. اتجاه المجال عند P

قانون بيوسافار الحديث هو

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

حيث يتجه $d\boldsymbol{\ell}$ مع التيار، ويتجه $\mathbf{R}$ من عنصر التيار إلى نقطة الرصد.

يقع كلا المتجهين في مستوى الشكل، ولذلك تكون كل مساهمة عمودية على ذلك المستوى. عند P، تعطي قاعدة اليد اليمنى مساهمة نحو الخارج من كل ذراع: فالذراع السفلى تحمل تياراً نحو الرأس، بينما تحمل الذراع العليا تياراً مبتعداً عنه. ومن ثم تتضافر مساهمتهما:

$$\mathbf{B}(P) \text{ يتجه إلى خارج الصفحة}$$

2. تعيين k

الاعتماد على الزاوية معطى بالعلاقة:

$$B(P) = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

لننظر في الوضع الحدي $\alpha = \pi/2$. عندئذ تشكل الذراعان سلكاً مستقيماً واحداً لا نهائياً، وتقع P على مسافة عمودية d منه.

لهذا السلك المستقيم، يعطي التناظر الأسطواني وقانون أمبير للدوران

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = B(2\pi d) = \mu_0 i.$$

وبالتالي،

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

وبما أن $\tan(\pi/4) = 1$ ، فإن ذلك يحدد

$$k = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}.$$

باستخدام النفاذية المعطاة،

$$k = (2 \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1}) \frac{i}{d}.$$

إذن،

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

3. المجال عند P^*

عند P^* ، تعطي قاعدة اليد اليمنى مجالاً متجهاً إلى داخل الصفحة من كل ذراع أصلية.

لإيجاد مقداره، نمدّ كلتا الذراعين عبر الرأس، مع الحفاظ على اتجاهي التيار فيهما، بحيث تصبح كل منهما سلكاً مستقيماً لا نهائياً. المسافة العمودية من P^* إلى أيٍّ من السلكين المكتملين هي

$$\rho = d \sin \alpha.$$

يولد كل سلك مكتمل مجالاً نحو داخل الصفحة مقداره

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi \rho}.$$

ولذلك يكون مقدار مجالهما الكلي

$$B_{\text{complete}} = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

يشكل نصفاً المستقيم المضافان حرف V مفتوحاً نحو اليسار، وهو الصورة المرآتية للسلك الأصلي. بالنسبة إلى هذا الحرف V المضاف، تكون P^* نقطة خارجية على المحور تبعد مسافة d . وبالتالي يكون مقدار مجاله عندها $B(P)$ ، وتبين قاعدة اليد اليمنى أنه يتجه أيضاً إلى داخل الصفحة.

ومن ثم يعطي مبدأ التراكب

$$B(P^*) + B(P) = \frac{\mu_0 i}{\pi d \sin \alpha}.$$

بالتعويض بنتيجة الجزء 2،

$$B(P^*) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \left[\frac{2}{\sin \alpha} - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right].$$

وباستخدام

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

يصبح ما بين القوسين

$$\frac{2 - (1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

ومن ثم

$$\mathbf{B}(P^*) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \hat{\mathbf{z}}.$$

4. زمن دورة التذبذبات الصغيرة

نعامل الإبرة الصغيرة على أنها ثنائي قطب مغناطيسي في مجال منتظم على امتداد طولها، مع إهمال التخمد وعزوم القوى الأخرى. لتكن θ الزاوية بين عزمها المغناطيسي والمجال.

عزم القوة المغناطيسية هو

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}.$$

يكون وضع الاتزان الذي فيه $\boldsymbol{\mu}$ موازيًا لـ $\mathbf{B}$ مستقرًا. وباعتبار θ إزاحةً عن وضع الاتزان هذا، تكون معادلة الحركة الدورانية

$$I\ddot{\theta} = -\mu B \sin \theta.$$

للتذبذبات الصغيرة، تكون $|\theta| \ll 1$ راديان و $\sin \theta \simeq \theta$ ، ولذلك

$$\ddot{\theta} + \frac{\mu B}{I} \theta = 0.$$

وهذه حركة توافقية بسيطة ترددها الزاوي

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu B}{I}},$$

ولذلك

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}.$$

عند التعبير عن I و μ و B بوحدات النظام الدولي، يكون زمن الدورة بالثواني.

5. المجال الزاوي الذي يعطي فرقاً في زمن الدورة أكبر من 10%

النتيئة بالمجال عند P هما

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad B_2 = \frac{\mu_0 i \alpha}{\pi^2 d},$$

حيث يمثل التعبير الثاني الافتراض التاريخي الوارد في المسألة.

بما أن $T \propto B^{-1/2}$ ،

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)}}.$$

يصبح الشرط التجريبي

$$\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)} > 1.10^2 = 1.21.$$

تتناقص نسبة زمني الدورة مع ازدياد α . للتحقق من ذلك، نضع $x = \alpha/2$ ؛ فيكون مربع هذه النسبة متناسباً طردياً مع $x \cot x$ ، ولدينا

$$\frac{d}{dx}(x \cot x) = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x} < 0,$$

لأن $\sin(2x) < 2x$ للزوايا الموجبة التي ننظر فيها.

قيمتها الحديتان هما

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \simeq 1.1284, \quad \frac{T_1}{T_2} \Big|_{\alpha=\pi/2} = 1.$$

إذن توجد عتبة واحدة تفصل بين المجال الذي يمكن فيه التمييز والمجال الذي لا يمكن فيه ذلك.

بحل المعادلة

$$\frac{2\alpha_c}{\pi \tan(\alpha_c/2)} = 1.21$$

عددياً نحصل على

$$\alpha_c \simeq 0.7682 \text{ rad} \simeq 44.01^\circ.$$

إذن نصف زاوية الفتحه المطلوب يقع تقريباً ضمن

$$[0 < \alpha < 0.77 \text{ rad} \quad (44^\circ \text{ تقريباً أقل من})]$$

تُدرج قيمة العتبة الدقيقة إذا فُسِّرت عبارة «لا يقل عن 10%» على أنها تشمل المساواة؛ وتُستبعد وفقاً للمتباينة الصارمة المذكورة صراحةً. وتُستبعد القيمة المنحلة $\alpha = 0$ لأن كلا المجالين يندم عندها، ولا يوجد زمن دورة محدود للتذبذب المغناطيسي.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: مسبار فضائي إلى المشتري

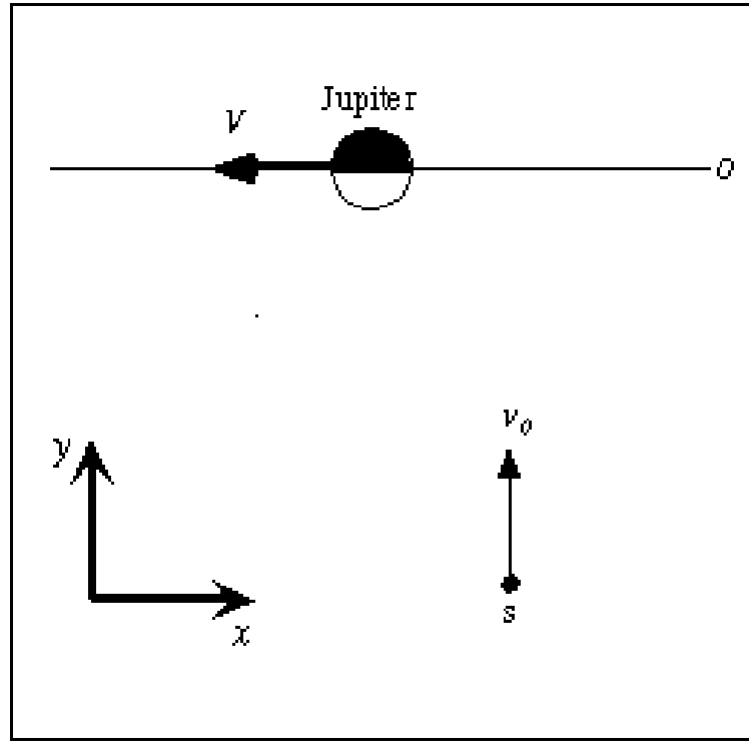
ندرس في هذه المسألة طريقة تُستخدم كثيراً لتسريع المسابير الفضائية في الاتجاه المطلوب. يمر المسبار الفضائي بالقرب من كوكب، ويمكنه أن يزيد سرعته زيادة كبيرة وأن يغيّر اتجاه طيرانه تغييراً ملحوظاً، وذلك باكتساب مقدار ضئيل جداً من الطاقة من الحركة المدارية للكوكب. ونحلّل هنا هذا التأثير لمسبار فضائي يمر بالقرب من المشتري.

يدور كوكب المشتري حول الشمس في مسار إهليلجي يمكن تقريبه بحيط دائرة متوسط نصف قطرها R ؛ ولكي نمضي في تحليل الوضع الفيزيائي، علينا أولاً:

1. إيجاد سرعة الكوكب V على طول مداره حول الشمس. [1.5 درجة]
2. عندما يكون المسبار بين الشمس والمشتري (على القطعة المستقيمة الواصلة بين الشمس والمشتري)، إيجاد المسافة من المشتري التي تتوازن عندها قوة جذب الشمس مع قوة جذب المشتري. [1 درجة]

يمر مسبار فضائي كتلته $m = 825 \text{ kg}$ بالقرب من المشتري. للتبسيط، افترض أن مسار المسبار الفضائي يقع بأكمله في مستوى مدار المشتري؛ وبهذا نهمل الحالة المهمة التي يُقذف فيها المسبار الفضائي خارج مستوى مدار المشتري. نقتصر على دراسة ما يحدث في المنطقة التي تتغلب فيها قوة جذب المشتري على جميع قوى الجاذبية الأخرى.

في الإطار المرجعي لمركز كتلة الشمس، تبلغ السرعة الابتدائية للمسبار الفضائي $v_0 = 1.00 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ (في اتجاه y الموجب)، بينما تتجه سرعة المشتري في اتجاه x السالب (انظر الشكل 1)؛ ونقصد بعبارة «السرعة الابتدائية» سرعة المسبار الفضائي حين يكون في الفضاء بين الكواكب، ولا يزال بعيداً عن المشتري، لكنه دخل بالفعل المنطقة التي يكون فيها جذب الشمس مهماً مقارنة بجذب المشتري. نفترض أن اللقاء يحدث خلال زمن قصير بما يكفي لإهمال تغير اتجاه حركة المشتري على طول مداره حول الشمس. ونفترض أيضاً أن المسبار يمر خلف المشتري، أي إن الإحداثي x للمسبار أكبر منه للمشتري عندما يتساوى الإحداثي y لهما.



الشكل 1: منظر في إطار مركز كتلة الشمس. يرمز O إلى مدار المشتري، وS إلى المسبار الفضائي.

3. أوجد اتجاه حركة المسبار الفضائي (معبّرًا عنه بالزاوية φ بين اتجاهه والمحور x) وسرعته v' في الإطار المرجعي للمشتري، عندما يكون ما يزال بعيدًا عن المشتري. [2 درجة]

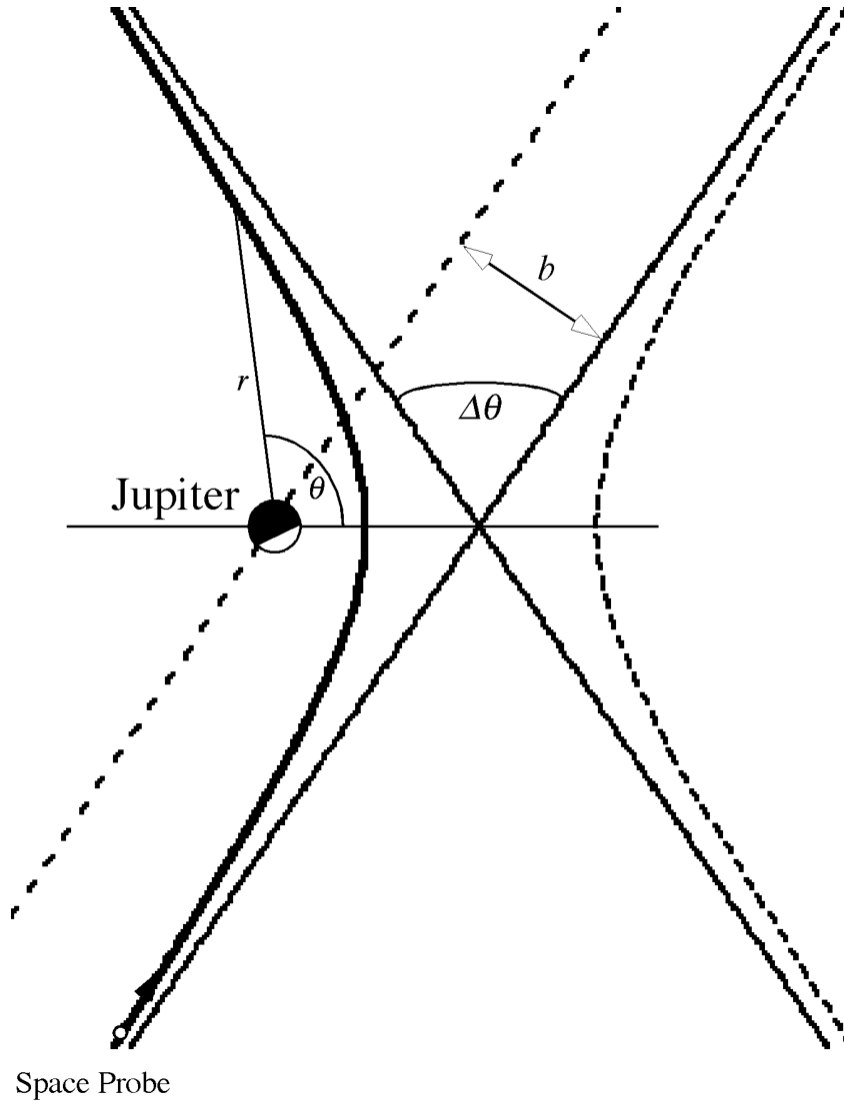
4. أوجد قيمة الطاقة الميكانيكية الكلية E للمسبار الفضائي في الإطار المرجعي للمشتري، مع اعتبار طاقة وضعه، كالمعتاد، مساوية للصفر على مسافة كبيرة جدًا؛ أي، في هذه الحالة، عندما يكون بعيدًا بما يكفي ليتحرك بسرعة متجهة شبه ثابتة بسبب ضالة جميع التأثيرات الثقالية. [1 درجة]

مسار المسبار الفضائي في الإطار المرجعي للمشتري قطع زائد، ومعادلته بالإحداثيات القطبية في هذا الإطار المرجعي هي

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right). \quad (1)$$

حيث b هي المسافة بين أحد الخطين المقاربين والمشتري (وتُسمى معامل التصادم)، و E هي الطاقة الميكانيكية الكلية للمسبار في الإطار المرجعي للمشتري، و G ثابت الجذب العام، و M كتلة المشتري، و r و θ هما الإحداثيان القطبيان (المسافة الشعاعية والزاوية القطبية).

يبين الشكل 2 فرعي قطع زائد تصفه المعادلة (1)؛ كما يبين الخطين المقاربين والإحداثيات القطبية. لاحظ أن أصل الإحداثيات في المعادلة (1) يقع عند «البؤرة الجاذبة» للقطع الزائد. ومسار المسبار الفضائي هو مسار التجاذب (الفرع المرسوم بخط غليظ).



الشكل 2

5. باستخدام المعادلة (1) التي تصف مسار المسبار الفضائي، أوجد الانحراف الزاوي الكلي $\Delta\theta$ في الإطار المرجعي للمشتري (كما هو موضح في الشكل 2)، وعبر عنه بدلالة السرعة الابتدائية v' ومعامل التصادم b . [2 درجة]
6. افترض أن المسبار لا يمكن أن يمر بالمشتري على مسافة من مركز الكوكب تقل عن ثلاثة أمثال نصف قطر المشتري؛ أوجد أصغر معامل تصادم ممكن وأكبر انحراف زاوي ممكن. [1 درجة]
7. أوجد معادلة للسرعة النهائية v'' للمسبار في الإطار المرجعي للشمس بدلالة سرعة المشتري V ، والسرعة الابتدائية للمسبار v_0 ، وزاوية الانحراف $\Delta\theta$ فقط. [1 درجة]
8. استخدم النتيجة السابقة لإيجاد القيمة العددية للسرعة النهائية v'' في الإطار المرجعي للشمس عندما يبلغ الانحراف الزاوي أكبر قيمة ممكنة له. [0.5 درجة]

تلميح

قد تفيدك المتطابقات المثلثية الآتية، بحسب الطريقة التي تتبعها في الحل:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

الثوابت الفيزيائية والمعطيات العامة

بالإضافة إلى المعطيات العددية الواردة في نص كل مسألة، قد تكون معرفة بعض المعطيات العامة والثوابت الفيزيائية مفيدة، ويمكنك العثور عليها فيما يلي. هذه المعطيات من أدق المعطيات المتاحة حاليًا تقريبًا، ولذلك تتضمن عددًا كبيرًا من الأرقام؛ ومع ذلك، يُتوقع منك أن تكتب نتائجك بعدد من الأرقام يناسب كل مسألة.

$c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	سرعة الضوء في الفراغ:
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$	النفاذية المغناطيسية للفراغ:
$\varepsilon_0 = 8.8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$	السماحية الكهربائية للفراغ:
$G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$	ثابت الجذب العام:
$R = 8.314510 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$	ثابت الغازات:
$k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	ثابت بولتزمان:
$\sigma = 56.703 \text{ nW}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$	ثابت ستيفان:
$e = 1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	شحنة البروتون:
$m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	كتلة الإلكترون:
$h = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	ثابت بلانك:
$T_K = 273.15 \text{ K}$	نقطة الصفر في المقياس المئوي:
$M_S = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	كتلة الشمس:
$M_E = 5.979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	كتلة الأرض:
$r_E = 6.373 \text{ Mm}$	متوسط نصف قطر الأرض:
$R_E = 1.4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$	نصف المحور الأكبر لمدار الأرض:
$d_S = 86.16406 \text{ ks}$	اليوم النجمي:
$y = 31.558150 \text{ Ms}$	السنة:
$g = 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	القيمة القياسية لمجال الجاذبية عند سطح الأرض:
$p_0 = 101325 \text{ Pa}$	القيمة القياسية للضغط الجوي عند مستوى سطح البحر:
$n_{\text{air}} = 1.000277$	معامل انكسار الهواء للضوء المرئي، عند الضغط القياسي ودرجة حرارة 15°C :
$S = 1355 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	الثابت الشمسي:
$M = 1.901 \cdot 10^{27} \text{ kg}$	كتلة المشتري:
$R_B = 69.8 \text{ Mm}$	نصف قطر المشتري الاستوائي:
$R = 7.783 \cdot 10^{11} \text{ m}$	متوسط نصف قطر مدار المشتري:
$d_J = 35.6 \text{ ks}$	اليوم على المشتري:
$y_J = 374.32 \text{ Ms}$	السنة على المشتري:
3.14159265	π :

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

1. سرعة المشتري المدارية هي

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} \simeq 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

2. المسافة من المشتري في اتجاه الشمس هي

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_S/M}} \simeq 2.33 \times 10^{10} \text{ m}.$$

3. السرعة المتجهة الابتدائية في إطار المشتري هي (V, v_0) ومن ثم

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{V}\right) = 37.4^\circ, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2} = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

تُقاس الزاوية عكس اتجاه عقارب الساعة انطلاقاً من المحور x الموجب.

4. الطاقة الميكانيكية الكلية في إطار المشتري هي

$$E = \frac{1}{2}m(V^2 + v_0^2) = 1.12 \times 10^{11} \text{ J}.$$

5. الانحراف الزاوي هو

$$\Delta\theta = 2 \tan^{-1}\left(\frac{GM}{b v'^2}\right).$$

6. عند $r_0 = 3R_B$

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}} = 4.90 \times 10^8 \text{ m},$$

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{1 + r_0 v'^2/(GM)}\right) = 87.4^\circ \simeq 1.53 \text{ rad}.$$

7. السرعة النهائية في إطار الشمس هي

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2V v_0 \sin \Delta\theta}.$$

8. عند أكبر انحراف مسموح به،

$$v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.$$

الحل

نستخدم قانون نيوتن للجاذبية والتقريبات المحددة في المسألة. مدار المشتري دائري، وسرعته المتجهة ثابتة عملياً أثناء اللقاء. كتلة المسبار مهمة مقارنة بكتلة المشتري. نهمل قوة الشمس أثناء المرور بالقرب من المشتري، ولذلك نعامل إطار المشتري بوصفه إطاراً عطالياً، ويتحرك المسبار في مجال طاقة الوضع

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

تشير السرعتان المتجهتان الابتدائية والنهائية إلى السرعتين المتجهتين المقاربتين في هذا التقريب لمسألة الجسمين. تُجرى الحسابات العددية مع الاحتفاظ بالقيم الوسيطة دون تقريب.

1. سرعة المشتري المدارية

يوفر جذب الشمس الثقالي القوة المركزية اللازمة لحركة المشتري:

$$\frac{GM_S M}{R^2} = \frac{MV^2}{R}.$$

لذلك

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}.$$

باستخدام الثوابت المعطاة،

$$V = \sqrt{\frac{(6.67259 \times 10^{-11})(1.991 \times 10^{30})}{7.783 \times 10^{11}}} = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

ومن ثم

$$V = 1.31 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

يعطي الحساب البديل للمدار الدائري $V = 2\pi R/y_J$ القيمة $1.30642 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}$ ، وهي متفقة مع النتيجة ضمن الدقة المعروضة.

2. النقطة التي تتوازن عندها قوتا الجذب الثقالي

لتكن d المسافة من المشتري في اتجاه الشمس. تكون المسافة من الشمس عندئذ $R - d$. تتجه قوتا الجذب الثقالي في اتجاهين متعاكسين، ولذلك يتطلب توازنهما

$$\frac{GMm}{d^2} = \frac{GM_S m}{(R - d)^2}.$$

بأخذ الجذرين التربيعيين الموجبين،

$$\frac{R - d}{d} = \sqrt{\frac{M_S}{M}}.$$

وبحل المعادلة،

$$d = \frac{R}{1 + \sqrt{M_S/M}}.$$

عددياً،

$$d = \frac{7.783 \times 10^{11}}{1 + \sqrt{(1.991 \times 10^{30})/(1.901 \times 10^{27})}} = 2.33285 \times 10^{10} \text{ m}.$$

إذن

$$d = 2.33 \times 10^{10} \text{ m}.$$

3. الحركة الابتدائية في إطار المشتري

في إطار الشمس، السرعتان المتجهتان الابتدائيتان هما

$$\mathbf{v}_i = v_0 \hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{V}_J = -V \hat{\mathbf{x}}.$$

يعطي تحويل غاليليو للسرعات

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}_J = V \hat{\mathbf{x}} + v_0 \hat{\mathbf{y}}.$$

كلتا المركبتين موجبة، ولذلك يقع متجه السرعة في الربع الأول:

$$\tan \varphi = \frac{v_0}{V}, \quad v' = \sqrt{V^2 + v_0^2}.$$

عددياً،

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{1.00 \times 10^4}{1.30650 \times 10^4} \right) = 37.4306^\circ,$$

$$v' = \sqrt{(1.30650 \times 10^4)^2 + (1.00 \times 10^4)^2} = 1.64528 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

ومن ثم

$$\boxed{\varphi = 37.4^\circ, \quad v' = 1.65 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

4. الطاقة الميكانيكية الكلية في إطار المشتري

تتعدى طاقة الوضع عند انفصال لا نهائي. وبناءً على ذلك، تساوي الطاقة الكلية المحفوظة الطاقة الحركية الابتدائية المقاربة:

$$E = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m (V^2 + v_0^2).$$

بالتعويض نحصل على

$$E = \frac{1}{2} (825) (1.64528 \times 10^4)^2 = 1.11661 \times 10^{11} \text{ J}.$$

لذلك

$$\boxed{E = 1.12 \times 10^{11} \text{ J}.$$

تتفق قيمتها الموجبة مع مدار غير مقيد على شكل قطع زائد.

5. الانحراف الزاوي

باستخدام $E = \frac{1}{2} m v'^2$ ، نكتب المعادلة (1) على الصورة

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

حيث

$$p = \frac{v'^2 b^2}{GM}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2 v'^4}{G^2 M^2}} > 1.$$

عند أي من الخطين المقاربين، $r \rightarrow \infty$ ، ومن ثم

$$1 + e \cos \theta = 0.$$

لتكن الزاويتان القطبيتان المقاربتان $\pm \theta_\infty$ ، حيث

$$\cos \theta_\infty = -\frac{1}{e}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta_\infty < \pi.$$

على الخط المقارب الوارد، تتجه السرعة عكس الاتجاه الشعاعي. ولذلك تكون زاويتها بالنسبة إلى محور الحضيض $\pi - \theta_\infty$. وعلى الخط المقارب الصادر، تتجه السرعة في الاتجاه الشعاعي وتكون زاويتها θ_∞ . والفرق بينهما هو

$$\Delta \theta = \theta_\infty - (\pi - \theta_\infty) = 2\theta_\infty - \pi.$$

ويترتب على ذلك أن

$$\sin \frac{\Delta \theta}{2} = \sin \left(\theta_\infty - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \theta_\infty = \frac{1}{e}.$$

وبما أن $0 < \Delta \theta / 2 < \pi / 2$ ،

$$\tan \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{GM}{bv'^2}.$$

ومن ثم

$$\boxed{\Delta\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{bv'^2} \right).}$$

وبصورة مكافئة،

$$\Delta\theta = 2 \sin^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + b^2 v'^4 / (G^2 M^2)}} \right].$$

6. أصغر معامل تصادم وأكبر انحراف

لتكن r_p أقصر مسافة إلى مركز المشتري، و v_p السرعة عندها. يعطي انحفاظ الطاقة

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2}mv'^2,$$

ومن ثم

$$v_p^2 = v'^2 + \frac{2GM}{r_p}.$$

القوة مركزية، ولذلك يُحفظ الزخم الزاوي حول المشتري. وعند أقرب اقتراب، تكون السرعة عمودية على نصف القطر:

$$mbv' = mr_p v_p.$$

بالتربيع والتعويض بنتيجة انحفاظ الطاقة،

$$b^2 v'^2 = r_p^2 \left(v'^2 + \frac{2GM}{r_p} \right),$$

فنحصل على

$$b^2 = r_p^2 + \frac{2GM r_p}{v'^2}.$$

يزداد هذا التعبير بزيادة r_p . لذلك تتحقق أصغر قيمة مسموح بها لمعامل التصادم عند

$$r_p = r_0 = 3R_B = 3(69.8 \times 10^6) \text{ m}.$$

وعليه

$$b_{\min} = \sqrt{r_0^2 + \frac{2GM r_0}{v'^2}}.$$

باستخدام

$$GM = 1.268459359 \times 10^{17} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2},$$

نحصل على

$$b_{\min} = 4.89996 \times 10^8 \text{ m},$$

أي

$$\boxed{b_{\min} = 4.90 \times 10^8 \text{ m}.}$$

يتناقص الانحراف بزيادة b ، ولذلك يبلغ قيمته العظمى عند $b_{\min}$. ومن ثم

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{GM}{b_{\min} v'^2} \right).$$

للتعبير عن ذلك مباشرة بدلالة أقصر مسافة، نعوض بعلاقة $b_{\min}^2$ في تعبير الاختلاف المركزي:

$$e_{\min}^2 = 1 + \frac{b_{\min}^2 v'^4}{G^2 M^2} = \left(1 + \frac{r_0 v'^2}{GM}\right)^2.$$

إذن

$$e_{\min} = 1 + \frac{r_0 v'^2}{GM} = 1.44687$$

و

$$\Delta\theta_{\max} = 2 \sin^{-1} \left(\frac{1}{e_{\min}} \right) = 1.52615 \text{ rad} = 87.4421^\circ.$$

لذلك

$$\boxed{\Delta\theta_{\max} = 87.4^\circ.}$$

7. السرعة النهائية في إطار الشمس

يضمن انحفاظ الطاقة في إطار المشتري أن تظل السرعة المقاربة الصادرة مساوية لـ v' .

لأن المسبار يمر خلف المشتري، فإن الانحراف الثقالي يدير متجه سرعته عكس اتجاه عقارب الساعة في الإحداثيين المعطيين x, y . وبالتالي تصنع السرعة المتجهة النسبية الصادرة زاوية $\varphi + \Delta\theta$ مع المحور x الموجب:

$$\mathbf{v}'_f = v' \cos(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{x}} + v' \sin(\varphi + \Delta\theta) \hat{\mathbf{y}}.$$

باستخدام

$$v' \cos \varphi = V, \quad v' \sin \varphi = v_0,$$

تعطي متطابقات جمع الزوايا

$$v'_{f,x} = V \cos \Delta\theta - v_0 \sin \Delta\theta,$$

$$v'_{f,y} = V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta.$$

يتطلب التحويل مجدداً إلى إطار الشمس إضافة سرعة المشتري المتجهة $-V\hat{\mathbf{x}}$:

$$v''_x = V(\cos \Delta\theta - 1) - v_0 \sin \Delta\theta,$$

$$v''_y = V \sin \Delta\theta + v_0 \cos \Delta\theta.$$

لذلك

$$\begin{aligned} v''^2 &= (v''_x)^2 + (v''_y)^2 \\ &= V^2 [(\cos \Delta\theta - 1)^2 + \sin^2 \Delta\theta] \\ &\quad + v_0^2 [\sin^2 \Delta\theta + \cos^2 \Delta\theta] + 2Vv_0 \sin \Delta\theta \\ &= 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + v_0^2 + 2Vv_0 \sin \Delta\theta. \end{aligned}$$

ومن ثم يكون التعبير المطلوب

$$\boxed{v'' = \sqrt{v_0^2 + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta) + 2Vv_0 \sin \Delta\theta}.}$$

للتحقق من الاتساق، يؤدي وضع $\Delta\theta = 0$ إلى $v'' = v_0$.

8. السرعة النهائية عند أكبر انحراف زاوي

بالتعويض بالقيم غير المقربة

$$V = 1.30650 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad v_0 = 1.00 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}, \quad \Delta\theta_{\max} = 1.52615 \text{ rad},$$

نحصل على

$$v'' = \left[(1.00 \times 10^4)^2 + 2(1.30650 \times 10^4)^2(1 - \cos 1.52615) \right. \\ \left. + 2(1.30650 \times 10^4)(1.00 \times 10^4) \sin 1.52615 \right]^{1/2} \\ = 2.62144 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

إذن

$$\boxed{v'' = 2.62 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 26.2 \text{ km s}^{-1}.}$$

تغيّر جاذبية المشتري اتجاه السرعة المتجهة المقاربة للمسبار في إطار المشتري. ويؤدي هذا التغير إلى زيادة السرعة والطاقة الحركية في إطار الشمس، وتأتي هذه الزيادة من نقصان ضئيل لا يُعتد به في الطاقة المدارية للمشتري.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.