

IPhO 1998

理论题与解答 · 冰岛雷克雅未克 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1998/

题目 1：六棱柱的滚动

考虑一根细长、实心、刚性的正六棱柱，其形状如一种常见的铅笔（图 1.1）。棱柱的质量为 M ，且质量分布均匀。其正六边形横截面的边长为 a 。六棱柱绕其中心轴的转动惯量 I 为

$$I = \frac{5}{12}Ma^2 \quad (1.1)$$

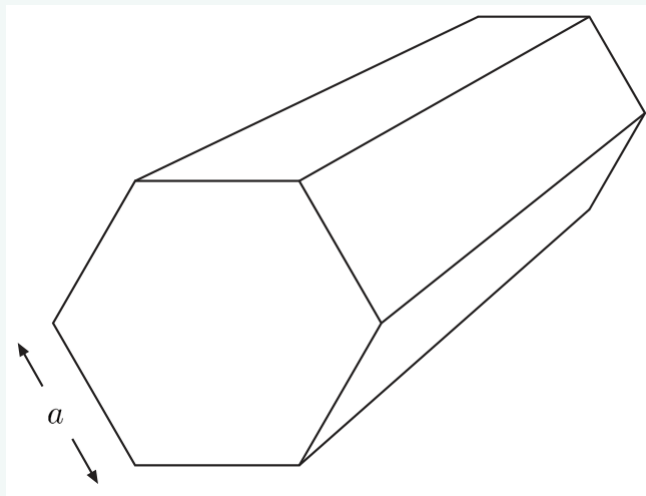


图 1.1：横截面为正六边形的实心棱柱。

棱柱绕其一条侧棱的转动惯量 I' 为

$$I' = \frac{17}{12}Ma^2 \quad (1.2)$$

a) (3.5 分) 棱柱最初静止在一个与水平面成小角度 θ 的斜面上，其轴线保持水平（图 1.2）。假设棱柱的各侧面略微内凹，使棱柱仅以侧棱接触斜面。这种内凹对转动惯量的影响可以忽略。现在使棱柱偏离静止位置，棱柱开始沿斜面向下作不均匀滚动。假设摩擦力阻止了任何滑动，且棱柱始终不脱离斜面。在某一条侧棱即将撞击斜面之前，角速度为 ω_i ，而撞击刚结束时的角速度为 ω_f 。

证明可以写成

$$\omega_f = s\omega_i \quad (1.3)$$

并将系数 s 的值写在答题纸上。

命题人：Leó Kristjánsson 和 Thorsteinn Vilhjálmsson

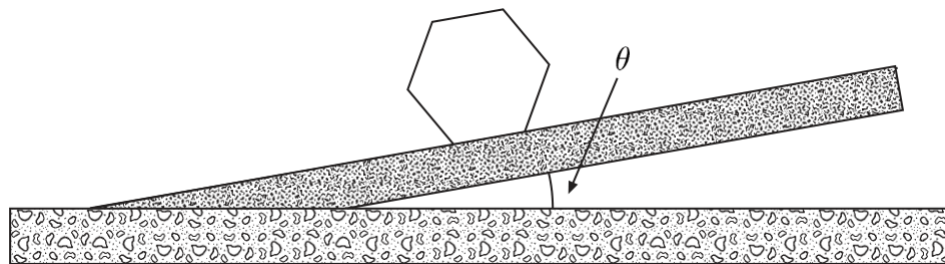


图 1.2: 放置在斜面上的六棱柱。

b) (1 分) 类似地, 棱柱在撞击即将发生之前和刚结束时的动能分别为 K_i 和 K_f 。

证明可以写成

$$K_f = rK_i \quad (1.4)$$

并将系数 r 的值写在答题纸上。

c) (1.5 分) 要使下一次撞击发生, K_i 必须超过一个最小值 $K_{i,min}$, 该最小值可写成如下形式

$$K_{i,min} = \delta Mga \quad (1.5)$$

其中, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度。

求出用斜面倾角 θ 和系数 r 表示的系数 δ 。将答案写在答题纸上。(使用代数符号 r , 不要代入其数值。)

d) (2 分) 如果满足 (c) 部分的条件, 则当棱柱沿斜面向下滚动时, 动能 K_i 将趋于一个固定值 $K_{i,0}$ 。

已知这一极限存在, 证明 $K_{i,0}$ 可写为:

$$K_{i,0} = \kappa Mga \quad (1.6)$$

并将用 θ 和 r 表示的系数 κ 写在答题纸上。

e) (2 分) 计算使这种不均匀滚动一旦开始就能无限持续下去的最小斜面倾角 θ_0 , 精确到 0.1° 。将数值答案写在答题纸上。

题目译自官方英文原文。

答案

- a) $s = \frac{11}{17} \approx 0.6471$.
- b) $r = \frac{121}{289} \approx 0.4187$.
- c) $\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}$.
- d) $\kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}$.
- e) $\theta_0 = 6.5724 \dots^\circ \approx \boxed{6.6^\circ}$.

系数 s, r, δ, κ 均为无量纲量。

解答

将每次撞击视为瞬时过程，忽略撞击期间重力的冲量。在两次撞击之间，棱柱绕静止的接触侧棱转动；接触力不做功，因此机械能守恒。全程保留精确的三角函数表达式。

a) 撞击时角速度的变化

在横截面中，用 A 表示原来的接触侧棱， B 表示下一条将撞击斜面的侧棱， C 表示质心。对于正六边形，有

$$AC = BC = AB = a, \quad \angle ACB = 60^\circ.$$

在撞击即将发生之前，棱柱绕 A 转动，因此

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_i \times \overrightarrow{AC}.$$

撞击时，原来的侧棱脱离接触，新的侧棱成为转轴。接触冲力通过 B ，因此，相对于 B 撞击处的固定直线，角动量守恒。

撞击前，相对于 B 的角动量由绕质心转动的角动量和质心运动的轨道角动量组成：

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{B,i} &= I\boldsymbol{\omega}_i + \overrightarrow{BC} \times M\mathbf{v}_C \\ &= \left(I + M\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \boldsymbol{\omega}_i \\ &= \left(I + \frac{1}{2}Ma^2 \right) \boldsymbol{\omega}_i. \end{aligned}$$

撞击后，棱柱绕 B 转动，故有

$$\mathbf{L}_{B,f} = I'\boldsymbol{\omega}_f.$$

于是，

$$\left(\frac{5}{12} + \frac{1}{2} \right) Ma^2 \omega_i = \frac{17}{12} Ma^2 \omega_f,$$

因此

$$\boxed{\omega_f = \frac{11}{17}\omega_i}, \quad \boxed{s = \frac{11}{17}}.$$

b) 撞击时动能的变化

在撞击即将发生之前和刚结束时，棱柱均绕一条静止的侧棱作纯转动。绕这两条侧棱的转动惯量均为 I' ，因此

$$K_i = \frac{1}{2}I'\omega_i^2, \quad K_f = \frac{1}{2}I'\omega_f^2.$$

由此可得

$$\frac{K_f}{K_i} = \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 = s^2.$$

因此

$$\boxed{K_f = \frac{121}{289}K_i}, \quad \boxed{r = \frac{121}{289}}.$$

c) 发生下一次撞击所需的最小能量

在 B 处撞击后，质心必须先上升到 B 的正上方，然后下降，直至下一次撞击发生。

在撞击瞬间， C 到斜面的垂直距离为 $\sqrt{3}a/2$ ，且相对于 B ，沿斜面向上的距离为 $a/2$ 。因此，它相对于 B 的竖直高度为

$$h_{\text{start}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}\cos\theta + \frac{a}{2}\sin\theta = a\cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right).$$

对于所考虑的小倾角， $0 \leq \theta < \pi/6$ ，质心随后达到的最大高度为

$$h_{\text{top}} = a.$$

重力势垒为

$$\Delta U = Mga \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\right].$$

撞击刚结束时可用的动能为 rK_i 。要越过最高点并使下一条侧棱接触斜面，必须满足

$$rK_i > \Delta U.$$

因此，撞击前动能的阈值为

$$K_{i,\min} = \frac{Mga}{r} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\right],$$

所以

$$\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}.$$

这里的不等式是严格不等式：当能量恰好等于阈值时，棱柱会趋近不稳定平衡位置，但不会越过该位置。

d) 撞击前动能的极限值

相邻两次撞击时的构型完全相同，只是沿斜面向下平移了一个边长 a 。因此，在两次撞击之间，质心的竖直高度下降了 $a\sin\theta$ 。

设 E_n 为第 n 次撞击即将发生之前的动能。撞击使其降为 rE_n ，而在下一次撞击之前，重力做功使动能增加 $Mga\sin\theta$ 。因此，对于连续完成的滚动步，有

$$E_{n+1} = rE_n + Mga\sin\theta.$$

取题目给出的极限 $E_n \rightarrow K_{i,0}$ ，得

$$K_{i,0} = rK_{i,0} + Mga\sin\theta.$$

因此

$$K_{i,0} = \frac{Mga\sin\theta}{1-r}, \quad \kappa = \frac{\sin\theta}{1-r}.$$

事实上，由递推关系可得

$$E_n = K_{i,0} + r^n(E_0 - K_{i,0}),$$

由于 $0 < r < 1$ ，只要棱柱持续越过每一个势垒，该式就会收敛。

e) 无限持续滚动的最小倾角

如果 $K_{i,0} < K_{i,\min}$ ，那么无论初始能量为多大的有限值，它最终都会减小到不足以使棱柱越过下一个势垒。如果 $K_{i,0} \geq K_{i,\min}$ ，且初始能量满足 $E_0 > K_{i,\min}$ ，则递推关系保证后续每个有限序号对应的 E_n 都高于阈值。

因此，临界倾角由下式确定：

$$K_{i,0} = K_{i,\min},$$

即

$$\frac{\sin \theta_0}{1-r} = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta_0)}{r}.$$

代入 $r = 121/289$ ，得

$$121 \sin \theta_0 = 168 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta_0 \right) \right].$$

展开余弦项，得到

$$205 \sin \theta_0 + 84\sqrt{3} \cos \theta_0 = 168.$$

令 $t = \tan(\theta_0/2)$ ，上式化为

$$(168 + 84\sqrt{3})t^2 - 410t + (168 - 84\sqrt{3}) = 0.$$

物理区间 $0 < \theta_0 < 30^\circ$ 内的根为

$$t = \frac{3(2 - \sqrt{3})}{14}.$$

于是，

$$\theta_0 = 2 \arctan \left[\frac{3(2 - \sqrt{3})}{14} \right] = 6.5723657 \dots^\circ,$$

按要求的精度取值，得

$$\boxed{\theta_0 = 6.6^\circ}.$$

在临界倾角下，严格高于阈值的初始能量能够使此后的每一步滚动都得以完成，不过棱柱在每个不稳定平衡位置附近停留的时间会越来越长。

解答已与官方解答核对。

题目 2：冰盖下的水

冰盖是覆盖在地面上的厚冰层（厚度可达数 km），在水平方向上延伸数十至数百 km。本题讨论温性冰盖，即处于熔点的冰盖下方冰的熔化和水的行为。可以假设，在这种条件下，冰像黏性流体一样产生压强变化，但以脆性方式变形，且主要沿竖直方向运动。本题给出以下数据。

水的密度：	$\rho_w = 1.000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
冰的密度：	$\rho_i = 0.917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
冰的比热容：	$c_i = 2.1 \cdot 10^3 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$
冰的比熔化潜热：	$L_i = 3.4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$

岩石和岩浆的密度:	$\rho_r = 2.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
岩石和岩浆的比热容:	$c_r = 700 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$
岩石和岩浆的比熔化潜热:	$L_r = 4.2 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$
通过地表向外传递的平均热流密度:	$J_Q = 0.06 \text{ W/m}^2$
冰的熔点:	$T_0 = 0^\circ\text{C}$, 为常量

a) (0.5 分) 考虑一处从地球内部传来的热流密度等于平均值的地点, 该处覆盖着厚冰盖。利用表中的数据, 计算每年熔化的冰层厚度 d , 并将答案写在答题纸的指定方框内。

b) (3.5 分) 现在考虑冰盖的上表面。冰盖下方地面的倾角为 α 。冰盖上表面的倾角为 β , 如图 2.1 所示。在 $x = 0$ 处, 冰的竖直厚度为 h_0 。因此, 冰盖的下表面和上表面可由下列方程描述:

$$y_1 = x \tan \alpha, \quad y_2 = h_0 + x \tan \beta \quad (2.1)$$

推导冰盖底部压强 p 随水平坐标 x 变化的表达式, 并写在答题纸上。

用数学形式写出 β 与 α 之间应满足的条件, 使冰盖与地面之间水层中的水不向任何一个方向流动。证明该条件具有 $\tan \beta = s \tan \alpha$ 的形式。求出系数 s , 并将结果以符号表达式的形式写在答题纸上。

图 2.2 中的直线 $y_1 = 0.8x$ 表示冰盖下方的地表。在 $x = 0$ 处, 冰的竖直厚度 h_0 为 2 km。假设底部的水处于平衡状态。在绘图答题纸上画出直线 y_1 , 并添加一条表示冰上表面的直线 y_2 。在图中标明各条直线所代表的表面。

⁶作者: Gudni Axelsson 和 Thorsteinn Vilhjálmsson

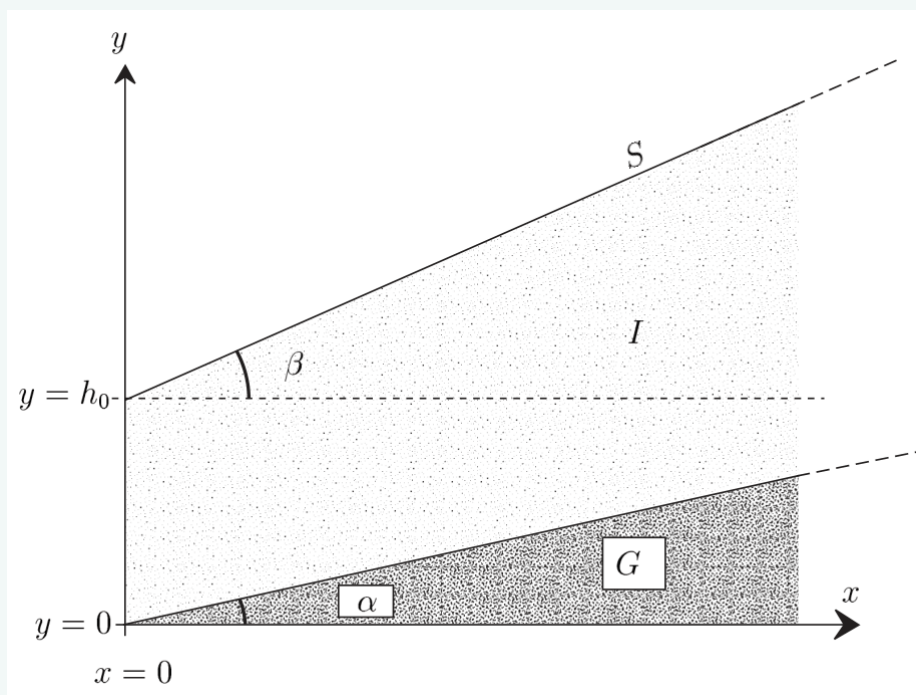


图 2.1: 位于倾斜平面地面上、上表面为平面的冰盖的剖面图。S: 表面, G: 地面, I: 冰盖。

c) (1 分) 水平地面上有一大片冰层, 最初厚度均匀, 为 $D = 2.0 \text{ km}$ 。由于冰的熔化, 冰层内较为突然地形成了一个高 $H = 1.0 \text{ km}$ 、半径 $r = 1.0 \text{ km}$ 的圆锥形水体 (图 2.3)。假设剩余的冰仅通过竖直运动来适应这一变化。

在空白答题纸上用解析方法, 并在绘图答题纸上用图形, 给出水锥形成并达到流体静力平衡后冰盖表面的形状。

d) (5 分) 一个国际科学家团队在年度考察中探索南极洲的一处温性冰盖。这一地区通常是一片广阔的高原，但这次他们发现了一个类似火山口的深凹陷，呈倒圆锥形，深度 h 为 100 m，半径 r 为 500 m (图 2.4)。该地区冰的厚度为 2000 m。

经过讨论，科学家们认为，最可能的原因是冰盖下发生了一次小规模火山喷发。少量岩浆（熔融的岩石）侵入冰盖底部，凝固并冷却，使一定体积的冰熔化。科学家们尝试用以下方法估算侵入体的体积，并了解融水的去向。

假设冰仅沿竖直方向运动。同时假设岩浆最初完全处于熔融状态，温度为 1200°C 。为简单起见，进一步假设侵入体是一个具有圆形底面的圆锥体，位于表面圆锥形凹陷的正下方。岩浆上升所需的时间远短于这一过程中热交换所需的时间。假设热量主要沿竖直方向传递，使得任意时刻冰中融化区域的边界均为一个圆锥面，其中心位于岩浆侵入体中心的正上方。

在这些假设下，冰的熔化分为两个阶段。起初，水在岩浆表面未达到压强平衡，因此流走。可以假设流走的水的温度为 0°C 。随后，

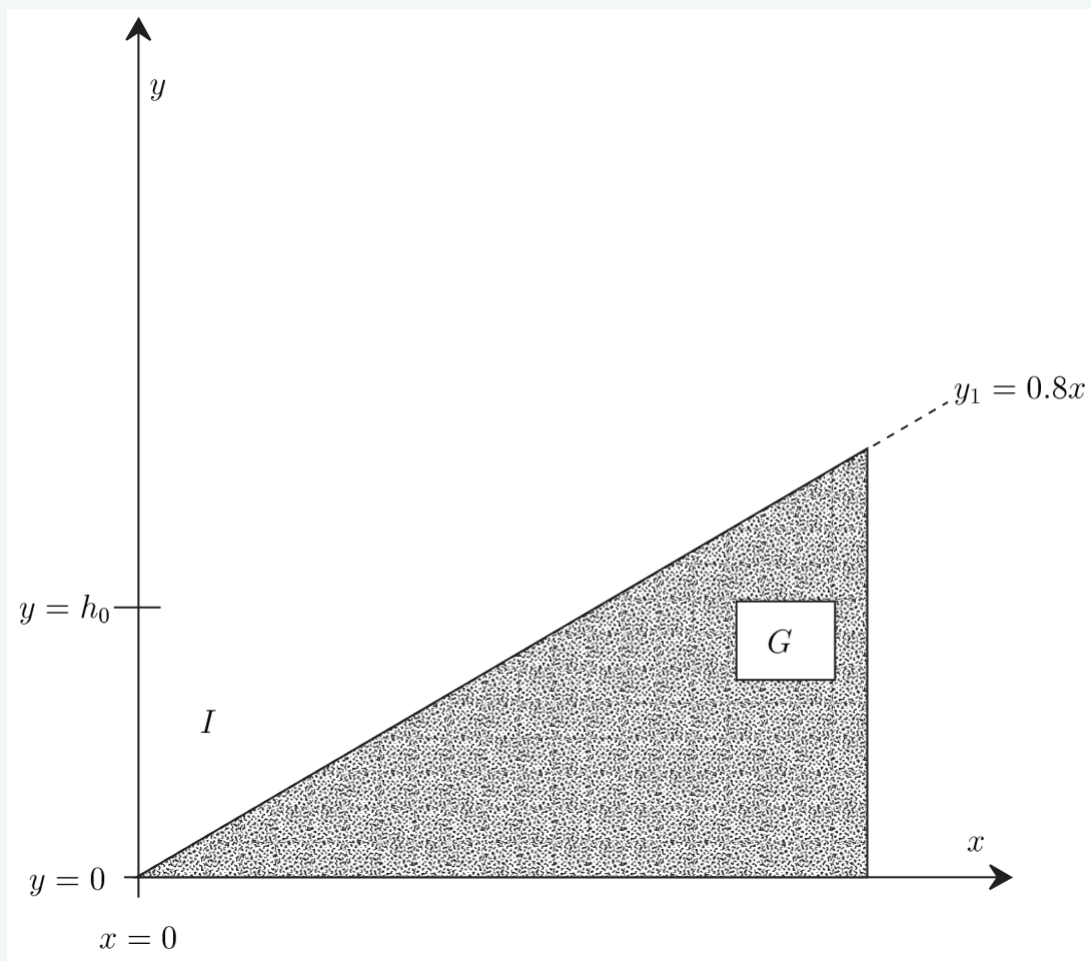


图 2.2：位于倾斜地面上、底部的水处于平衡状态的温性冰盖的剖面图。 G ：地面， I ：冰盖。

达到流体静力平衡，水便积聚在侵入体上方，而不再流走。

请确定达到热平衡时的下列物理量。将答案写在答题纸上。

1. 冰盖下形成的水锥顶点相对于冰盖原始底面的高度 H 。
2. 侵入体的高度 h_1 。
3. 产生的水的总质量 m_{tot} 和流走的水的质量 m' 。

在绘图答题纸上按比例画出岩石侵入体和剩余水体的形状。使用图 2.4 中给出的坐标系。

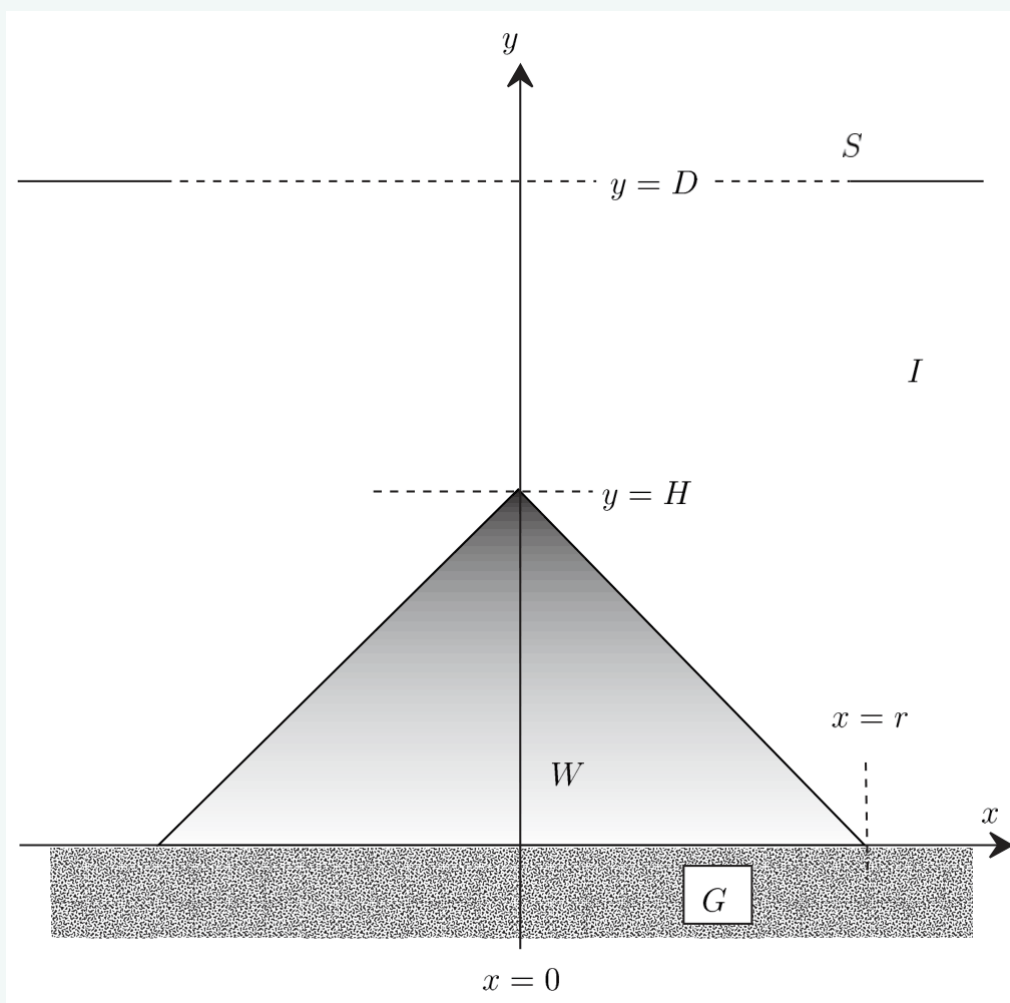


图 2.3：通过冰盖内部水锥中央平面的竖直剖面图。 S ：表面， W ：水， G ：地面， I ：冰盖。

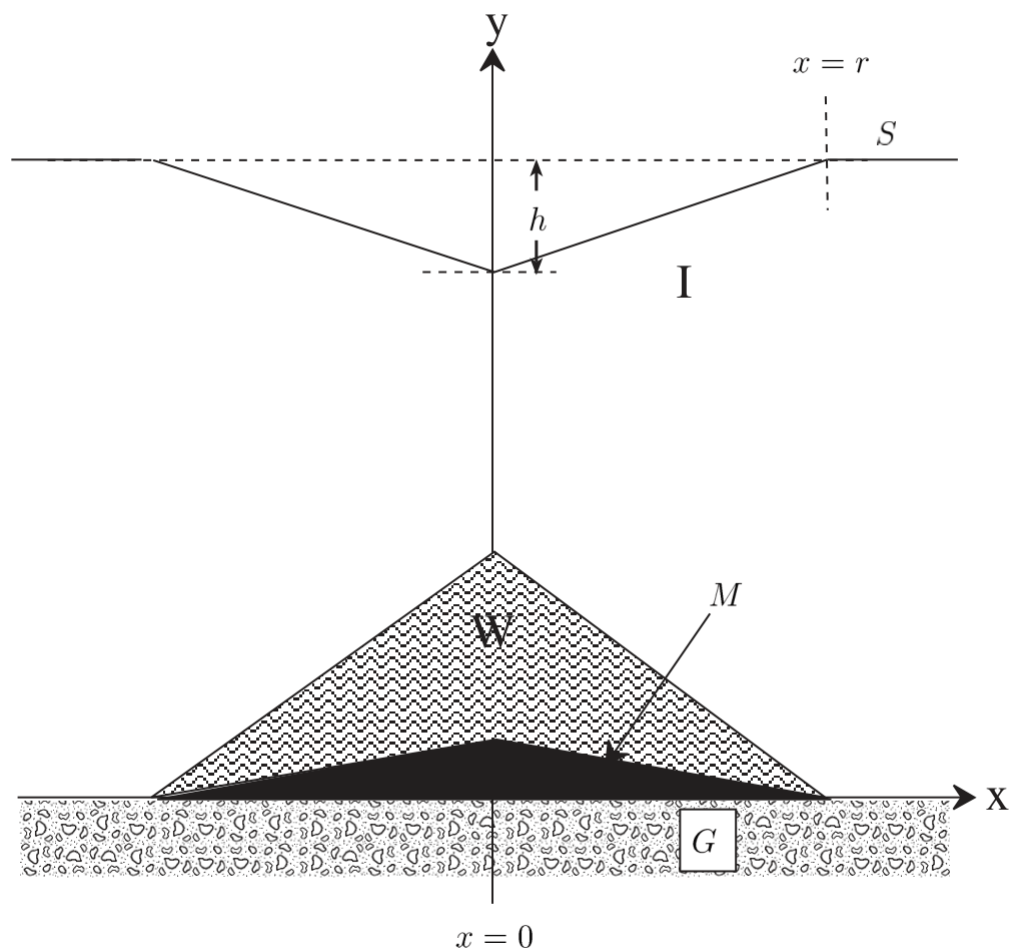


图 2.4：通过温性冰盖中圆锥形凹陷中心的竖直剖面图。 S ：表面， G ：地面， I ：冰盖， M ：岩石/岩浆侵入体， W ：水。注意，此图并未按比例绘制。

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 每年熔化的厚度为

$$d \simeq 6.1 \times 10^{-3} \text{ m} = 6.1 \text{ mm.}$$

- b) 设大气压强均匀，为 p_a ，则

$$p(x) - p_a = \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

水不流动要求

$$\tan \beta = s \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \simeq -0.09051.$$

对于题目要求的图形，两个坐标均以千米为单位时，

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.07241x.$$

两条直线的交点约为 (2.293, 1.834) km。

- c) 设 R 为到圆锥轴线的水平距离。表面为

$$y_s(R) = \begin{cases} D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r}\right), & 0 \leq R \leq r, \\ D, & R \geq r. \end{cases}$$

它是一个半径为 1.0 km、深度约为 91 m 的圆锥形凹陷。其中心高出基底 1.9095 km。

- d), 1.

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} \simeq 1.10 \times 10^3 \text{ m}.$$

- d), 2.

$$h_1 \simeq 103 \text{ m}.$$

侵入体的体积约为 $2.7 \times 10^7 \text{ m}^3$ 。

- d), 3.

$$m_{tot} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ kg}, \quad m' \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ kg}.$$

约有 9.3% 的融水流走。作图时，定义 $f(x) = 1 - |x|/(500 \text{ m})$ ，适用于 $|x| \leq 500 \text{ m}$ 。岩石表面和水-冰界面为

$$y_M = (102.8 \text{ m})f(x), \quad y_W = (1104.8 \text{ m})f(x).$$

水占据这两个表面之间的区域。

解答

a) 每年的熔化量

冰已处于熔点，因此供给的地热全部用于提供熔化潜热。对于水平面积 A ，一年内的能量守恒关系为

$$J_Q A t = \rho_i A d L_i.$$

因此

$$d = \frac{J_Q t}{\rho_i L_i}.$$

取一年为 $365 \times 24 \times 3600 = 3.1536 \times 10^7 \text{ s}$,

$$d = \frac{0.06(3.1536 \times 10^7)}{(917)(3.4 \times 10^5)} = 6.069 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

所以每年约有 6.1 mm 厚的冰熔化。由于不需要先将冰升温，因此无需使用冰的比热容。

b) 压强和水不流动的条件

冰的竖直厚度为

$$h_i(x) = y_2 - y_1 = h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha).$$

根据题目给定的模型，底部压强等于大气压强加上单位水平面积上方冰的重量：

$$p(x) = p_a + \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

若以大气压强为参考来计量压强，则省略 p_a 项。

对于静止的水，流体静力平衡要求

$$p + \rho_w g y = \text{常量}.$$

沿薄水层有 $y = y_1(x)$ ，因此水不流动的条件为

$$\frac{dp}{dx} + \rho_w g \frac{dy_1}{dx} = 0.$$

代入压强和地面的斜率，得

$$\rho_i g (\tan \beta - \tan \alpha) + \rho_w g \tan \alpha = 0.$$

于是，

$$\tan \beta = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i}.$$

代入数值，

$$s = \frac{917 - 1000}{917} = -0.0905125.$$

负号意味着，沿地面升高的方向，冰面必须向下倾斜。

对于 $y_1 = 0.8x$ 和 $h_0 = 2 \text{ km}$ ，

$$\tan \beta = (-0.0905125)(0.8) = -0.0724100,$$

因此，当 x 和 y 均以千米为单位时，

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.0724100x.$$

将地面画成一条过原点的上升直线，将冰面画成一条经过 $(0, 2)$ 的缓慢下降的直线。可使用以下坐标作图：

$x \text{ (km)}$	地面 $y_1 \text{ (km)}$	冰面 $y_2 \text{ (km)}$
0	0	2.000
1.000	0.800	1.928
2.000	1.600	1.855
2.2925	1.834	1.834

对于 $x \geq 0$ ，冰位于这两条直线之间，直至它们的交点。

c) 圆锥形水体上方的表面

用 $z(R)$ 表示冰-水界面相对于水平基底的高度：

$$z(R) = H \left(1 - \frac{R}{r} \right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

在边缘处，水层厚度趋于零，冰保持原始厚度 D 。因此，基底高度处的水压为

$$p_b = p_a + \rho_i g D.$$

由流体静力平衡可得高度 z 处的压强：

$$p_w(z) = p_a + \rho_i g D - \rho_w g z.$$

该点上方冰柱的厚度为 $y_s - z$ ，因此产生的压强为

$$p_i = p_a + \rho_i g(y_s - z).$$

令冰-水界面两侧的压强相等,

$$\rho_i(y_s - z) = \rho_i D - \rho_w z.$$

因此

$$y_s = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} z.$$

代入圆锥形界面的表达式, 得到

$$y_s(R) = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r}\right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

在水体的水平投影范围之外, $y_s = D$ 。凹陷的深度为

$$\delta = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H = \frac{83}{917}(1000 \text{ m}) = 90.51 \text{ m}.$$

因此, 表面是一个半径为 1.0 km 的倒圆锥面, 与周围的水平表面连续相接。其最低点为

$$y_s(0) = 2000 - 90.51 = 1909.49 \text{ m}.$$

对于通过中心的竖直剖面, 令 $R = |x|$ 。坐标以千米为单位, 用直线段依次连接

$$(-1.000, 2.000), \quad (0, 1.90949), \quad (1.000, 2.000)$$

并在两侧沿 $y = 2.000 \text{ km}$ 水平延伸。将这一剖面轮廓绕竖直轴旋转, 即得到表面的凹陷。

d) 火山侵入体

令

$$f(R) = 1 - \frac{R}{r}, \quad 0 \leq R \leq r,$$

其中 $r = 500 \text{ m}$ 。最终的冰面、水-冰界面和岩石表面具有以下形式:

$$y_s = D - hf(R), \quad y_W = Hf(R), \quad y_M = h_1 f(R).$$

这里 $D = 2000 \text{ m}$, $h = 100 \text{ m}$ 。

1. 水锥顶点的高度

c) 部分推导出的流体静力学关系在此仍适用:

$$D - y_s = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} y_W.$$

在中心处,

$$h = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H.$$

因此

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} = \frac{917(100)}{83} = 1104.82 \text{ m}.$$

该高度从原始基底量起。中心处的实际水深将为 $H - h_1$ 。

2. 侵入体的高度

首先确定融化了多少冰。一个竖直柱体内最终的冰厚为

$$y_s - y_W = D - (h + H)f(R).$$

由于冰仅沿竖直方向运动，每个柱体损失的冰厚为

$$(h + H)f(R).$$

岩浆最初将冰抬升，并不改变柱体内的冰量。因此，熔化的冰的总体积为

$$V_{\text{melt}} = \int_0^r (h + H) \left(1 - \frac{R}{r}\right) 2\pi R dR = \frac{\pi r^2}{3} (h + H).$$

记

$$C = \frac{\pi r^2}{3}.$$

则

$$m_{\text{tot}} = \rho_i C(h + H), \quad V_M = Ch_1, \quad m_M = \rho_r Ch_1.$$

最终达到热平衡时，岩石和冰水混合物的温度均为 0°C 。每千克岩浆放出的热量为

$$q_M = L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0) = 4.2 \times 10^5 + 700(1200) = 1.26 \times 10^6 \text{ J/kg}.$$

其中包括凝固和冷却两个过程放出的热量。忽略热损失和微小的机械能变化，由能量守恒得

$$\rho_r Ch_1 q_M = \rho_i C(h + H)L_i.$$

因此

$$h_1 = \frac{\rho_i (h + H)L_i}{\rho_r [L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

由流体静力学关系还可得

$$\rho_i (h + H) = \rho_w H,$$

所以也可等价地写为

$$h_1 = \frac{\rho_w H L_i}{\rho_r [L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

代入数值，

$$h_1 = \frac{1000(1104.819)(3.4 \times 10^5)}{2900(1.26 \times 10^6)} = 102.80 \text{ m} \simeq 103 \text{ m}.$$

因此，侵入体的体积为

$$V_M = \frac{\pi(500)^2}{3} (102.802) = 2.691 \times 10^7 \text{ m}^3.$$

3. 产生的水的总量和流走的水量

由熔化的冰的体积，得

$$m_{\text{tot}} = \rho_i C(h + H) = \rho_w CH.$$

因此

$$m_{\text{tot}} = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3} (1104.819) = 2.8924 \times 10^{11} \text{ kg} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

剩余的水占据水—冰圆锥面与岩石圆锥面之间的空间。其体积为

$$V_{\text{remaining}} = C(H - h_1),$$

其质量为

$$m_{\text{remaining}} = \rho_w C(H - h_1) = 2.6233 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

因此，由质量守恒得

$$\begin{aligned} m' &= m_{\text{tot}} - m_{\text{remaining}} \\ &= \rho_w CH - \rho_w C(H - h_1) \\ &= \rho_w Ch_1. \end{aligned}$$

于是

$$m' = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3} (102.802) = 2.6914 \times 10^{10} \text{ kg} \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ kg}.$$

流走的水的体积等于侵入体的体积：

$$\frac{m'}{\rho_w} = V_M.$$

这也解释了两个阶段的过程。起初，岩浆将冰抬升而未减小其厚度，因此抬高后的岩石表面上的水具有过高的水压，并向外排出。在这一排水阶段结束时，冰-水界面近似为岩石表面 $h_1 f(R)$ 。此时，流体静力平衡要求冰厚为

$$D - \frac{\rho_w}{\rho_i} h_1 f(R).$$

到这一阶段结束时，熔化的冰的质量为 $\rho_w Ch_1$ ，恰好等于上面求出的流走的水的质量。进一步熔化所产生的水形成保留下来的水体。

图形说明

对于通过中心的竖直剖面，取 $R = |x|$ 。在 $|x| \leq 500 \text{ m}$ 范围内，

$$\begin{aligned} y_M(x) &= 102.802 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m}, \\ y_W(x) &= 1104.819 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m}, \\ y_s(x) &= 2000 - 100 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m}, \end{aligned}$$

其中 x 的数值以米为单位。

使用下列坐标，并用直线连接相邻各点：

x (m)	岩石表面 y_M (m)	水-冰界面 y_W (m)	冰面 y_s (m)
-500	0	0	2000
-250	51.4	552.4	1950
0	102.8	1104.8	1900
250	51.4	552.4	1950
500	0	0	2000

沿 $y = 0$ 画出原始基底，将基底与 y_M 之间的侵入体区域涂上阴影，并将 y_M 与 y_W 之间的水体区域涂上阴影。冰位于 y_W 与 y_s 之间。在侵入体的水平投影范围之外，基底仍位于 $y = 0$ ，冰面仍位于 $y = 2000 \text{ m}$ 。

两坐标轴采用相同的长度比例尺时，侵入体仅约 103 m 高，而水体边界则达到约 1105 m 的高度。中心处的水深为

$$H - h_1 \simeq 1002 \text{ m},$$

其正上方剩余的冰厚约为 795 m。

解答已与官方解答核对。

题目 3：比光更快？

在本题中，我们将分析并解释 1994 年对银河系内一个复合源的射电辐射所作的测量。

接收机调谐到一个较宽的射电波段，其波长为数厘米。图 3.1 显示了在不同时刻记录的一系列图像。图中的等值线表示辐射强度相同的位置，与地理地图上的等高线十分相似。图中的两个极大值被解释为两个正在远离共同中心的物体，各幅图像中的十字标记表示这个中心。（假定该中心在空间中固定不动，它也是一个强辐射源，但主要在其他波长上发射辐射。）不同日期的测量均在一天中的同一时刻进行。

图中的比例尺是一条表示一角秒 (as) 的线段。（1 as = 1/3600 度。）图中十字标记所示的中心天体到我们的距离估计为 $R = 12.5 \text{ kpc}$ 。一千秒差距 (kpc) 等于 $3.09 \cdot 10^{19} \text{ m}$ 。光速为 $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ 。解答中不要求进行误差计算。

a) (2 分) 我们用 $\theta_1(t)$ 和 $\theta_2(t)$ 表示两个被抛射出的射电辐射源相对于共同中心的角位置，其中下标 1 和 2 分别指左侧和右侧的辐射源， t 为观测时刻。从地球上观测到的角速度分别为 ω_1 和 ω_2 。两个辐射源相应的视横向线速度分别记为 $v'_{1,\perp}$ 和 $v'_{2,\perp}$ 。

利用图 3.1 作图，求出 ω_1 和 ω_2 的数值，以毫角秒每天 (mas/d) 为单位。还要求出 $v'_{1,\perp}$ 和 $v'_{2,\perp}$ 的数值，并将所有答案写在答题纸上。（其中一些结果可能会令你感到困惑。）

b) (3 分) 为了解决 (a) 部分中出现的疑惑，考虑一个以速度 $\vec{v}$ 运动的光源，其运动方向与指向远处观测者 O 的方向成 ϕ 角 ($0 \leq \phi \leq \pi$) (图 3.2)。其速率可写为 $v = \beta c$ ，其中 c 为光速。观测者测得的光源距离为 R 。观测者看到的光源角速度为 ω ，垂直于视线方向的视线性速度为 $v'_{\perp}$ 。

用 β 、 R 和 ϕ 表示 ω 和 $v'_{\perp}$ ，并将答案写在答题纸上。

c) (1 分) 假定引言和 (a) 部分中描述的两个被抛射出的物体以相同的速率 $v = \beta c$ 沿相反方向运动。这样，利用 (b) 部分的结果，就可以由角速度 ω_1 和 ω_2 以及距离 R 计算出 β 和 ϕ 。这里， ϕ 是 (b) 部分中定义的角度，针对的是左侧物体，即 (a) 部分中下标为 1 的物体。

推导用已知量表示 β 和 ϕ 的公式，并根据 (a) 部分中的数据求出它们的数值。将答案写在答题纸的指定位置。

d) (2 分) 在 (b) 部分的单物体情形中，求视横向速度 $v'_{\perp}$ 大于光速 c 的条件。

⁷ 作者：Einar Gudmundsson、Knútur Árnason 和 Thorsteinn Vilhjálmsson

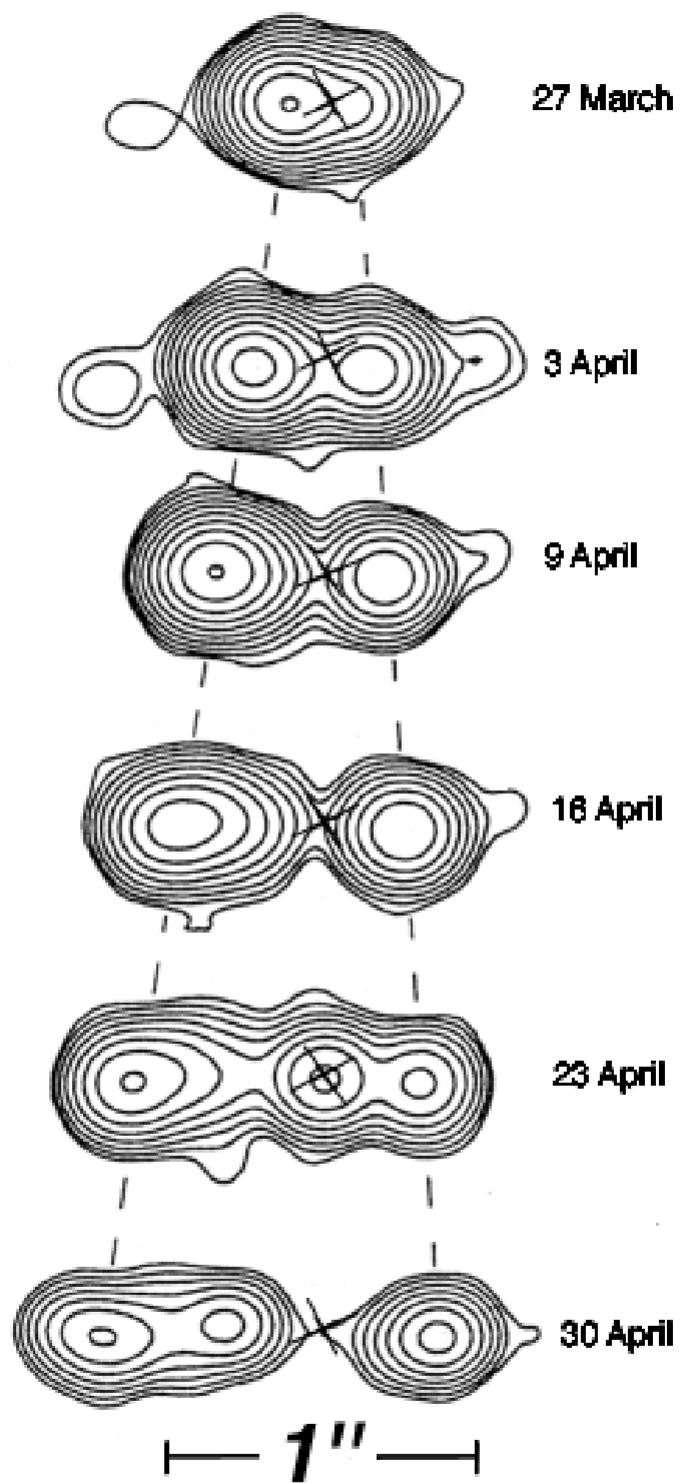


图 3.1: 银河系内一个源的射电辐射。

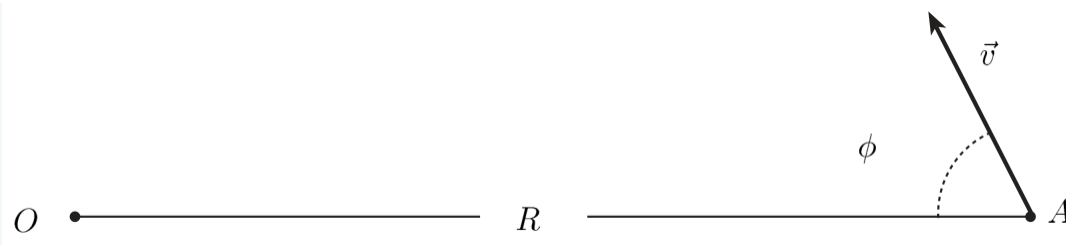


图 3.2: 观测者位于 O , 光源的初始位置为 A 。速度矢量为 $\vec{v}$ 。

将条件写成 $\beta > f(\phi)$ 的形式, 并在答题纸上给出函数 f 的解析表达式。

在作图答题纸上画出 (β, ϕ) 平面中具有物理意义的区域。用阴影标明该区域中满足条件 $v'_{\perp} > c$ 的部分。

e) (1 分) 仍考虑 (b) 部分的单物体情形, 求给定 β 时视横向速度 $v'_{\perp}$ 的最大值 $(v'_{\perp})_{\max}$ 的表达式, 并将其写在答题纸的指定位置。注意, 当 $\beta \rightarrow 1$ 时, 这一速度无限增大。

f) (1 分) 引言中给出的 R 的估计值并不十分可靠。因此, 科学家已开始探讨一种更好、更直接的确定 R 的方法。一种设想如下。假定我们能够识别并测量两个被抛射物体的辐射经过多普勒频移后的波长 λ_1 和 λ_2 , 它们在各自物体的静止参考系中对应同一个已知的原始波长 λ_0 。

从相对论多普勒频移公式 $\lambda = \lambda_0(1 - \beta \cos \phi)(1 - \beta^2)^{-1/2}$ 出发, 并与前面一样假定两个物体具有相同的速率 v , 证明未知量 $\beta = v/c$ 可以用 λ_0, λ_1 , 和 λ_2 表示为

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}. \quad (3.1)$$

将系数 α 的数值写在答题纸的指定位置。

你可以注意到, 这意味着所提出的波长测量实际上将给出一个新的距离估计值。

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 由图得到的代表性数值为

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

因此,

$$v'_{1,\perp} \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c, \quad v'_{2,\perp} \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

- b)

$$\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}, \quad v'_{\perp} = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

- c) 将角速度用单位时间内转过的弧度数表示，定义

$$X = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad Y = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

则

$$\beta = \sqrt{X^2 + Y^2} \simeq 0.92, \quad \phi = \arccos\left(\frac{X}{\beta}\right) \simeq 70^\circ.$$

左侧物体正在接近观测者。

- d) 视超光速运动的区域为

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.$$

因此，在相关的角度区间内， $f(\phi) = 1/(\sin \phi + \cos \phi)$ 。这种运动要求 $\beta > 1/\sqrt{2}$ 。

- e)

$$(v'_\perp)_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

- f)

$$\alpha = 4, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}.$$

解答

a) 角运动与视横向速度

取 3 月 27 日为 $t = 0$ 。以图中标出的整段比例尺长度作为 $1'' = 1000 \text{ mas}$ ，在各幅图像中测量每个分量到十字标记的角距离。沿虚线轨迹追踪两个向外运动的分量。中心两侧的角距离均取正值。

从所给图中读出的近似数值如下：

日期	t (天)	θ_1 (角秒)	θ_2 (角秒)
3 月 27 日	0	0.12	0.07
4 月 3 日	7	0.22	0.14
4 月 9 日	13	0.35	0.20
4 月 16 日	20	0.46	0.26
4 月 23 日	27	0.61	0.31
4 月 30 日	34	0.70	0.38

以 t 为横坐标、角距离为纵坐标作图。每组数据点都近似位于一条直线上；左侧分量对应的斜率较大。具有代表性的直线为

$$\frac{\theta_1}{\text{arcsec}} \simeq 0.11 + 0.0175 \frac{t}{\text{d}}, \quad \frac{\theta_2}{\text{arcsec}} \simeq 0.08 + 0.0090 \frac{t}{\text{d}}.$$

因此，它们在纵轴上的截距分别约为 $0.11''$ 和 $0.08''$ ，由斜率可得

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

这些角度极小，因此角位移 θ 所对应的横向位移为 $R\theta$ 。于是，

$$v'_{i,\perp} = R\omega_i,$$

其中 ω_i 必须以弧度每秒为单位。所需的单位换算为

$$R = 12.5(3.09 \times 10^{19}) = 3.8625 \times 10^{20} \text{ m},$$

$$1 \text{ mas} = \frac{\pi}{180 \times 3600 \times 1000} \text{ rad} = 4.8481 \times 10^{-9} \text{ rad},$$

因而

$$1 \text{ mas/d} = 5.6113 \times 10^{-14} \text{ rad/s}.$$

在给定距离处，1 mas/d 对应于

$$R(5.6113 \times 10^{-14}) = 2.1674 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

所以

$$v'_{1,\perp} \simeq 17.5(2.1674 \times 10^7) \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c,$$

$$v'_{2,\perp} \simeq 9.0(2.1674 \times 10^7) \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

第一个数值超过了 c 。计算这些速度时使用的是信号到达地球的时间间隔；这一间隔不同于信号发射的时间间隔。

b) 光传播时间的影响

在观测者和中心源均静止的惯性参考系中进行分析。设两个信号在此参考系中相隔 Δt_e 发射。

在这一时间间隔内，辐射源移动的横向距离为

$$\Delta x_{\perp} = v \sin \phi \Delta t_e.$$

它沿朝向观测者方向的位移为

$$\Delta x_{\parallel} = v \cos \phi \Delta t_e.$$

对于远处的观测者，第二个信号的传播路程约缩短了 $\Delta x_{\parallel}$ 。因此，到达时间间隔为

$$\Delta t_{\text{obs}} = \Delta t_e - \frac{\Delta x_{\parallel}}{c} = (1 - \beta \cos \phi) \Delta t_e.$$

同一表达式也适用于远离观测者的源：此时 $\cos \phi < 0$ ，所以第二个信号传播的路程更长。

在小角近似下，角位移为

$$\Delta \theta \simeq \frac{\Delta x_{\perp}}{R}.$$

因此

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t_{\text{obs}}} = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}$$

以及

$$v'_{\perp} = R\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

这里，源的位移与 R 相比可以忽略，因此在观测期间可将 R 和 ϕ 视为常量。

对于正在接近观测者的辐射源，连续信号到达的时间间隔比发射的时间间隔更短。用横向位移除以这个缩短的时间间隔，可能得到 $v'_{\perp} > c$ ，尽管辐射源的实际速率仍为 $v = \beta c < c$ 。

c) 求出真实速率和方向

两个运动方向与指向观测者的方向分别成 ϕ 和 $\pi - \phi$ 角。它们的横向速度大小相等，而径向分量的符号相反。因此，

$$\frac{R\omega_1}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}, \quad \frac{R\omega_2}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 + \beta \cos \phi}.$$

令

$$X = \beta \cos \phi, \quad Y = \beta \sin \phi.$$

则

$$\omega_1(1 - X) = \omega_2(1 + X) = \frac{cY}{R}.$$

令前两个表达式相等，得到

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

将其代入任一角速度方程，得到

$$Y = \beta \sin \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

因此，

$$\beta = \frac{\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (2R\omega_1\omega_2/c)^2}}{\omega_1 + \omega_2}$$

而在整个 $0 \leq \phi \leq \pi$ 范围内适用的表达式为

$$\phi = \arccos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta(\omega_1 + \omega_2)} \right].$$

对于这些观测， $\omega_1 > \omega_2$ ，因此 ϕ 为锐角。我们也可以使用

$$\tan \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 - \omega_2)}.$$

使用 (a) 中具有代表性的角速度值，

$$X \simeq \frac{17.5 - 9.0}{17.5 + 9.0} \simeq 0.321, \\ Y \simeq 0.859.$$

于是

$$\beta \simeq \sqrt{0.321^2 + 0.859^2} \simeq 0.917, \quad \phi \simeq 69.5^\circ.$$

按照图像所能支持的精度，

$$\beta \simeq 0.92, \quad \phi \simeq 70^\circ.$$

真实速率约为 2.8×10^8 m/s。由于 $\beta \cos \phi > 0$ ，左侧分量正在接近观测者，右侧分量则正在远离观测者。

d) 视超光速运动的条件和区域

对于实物辐射源, $0 \leq \beta < 1$ 。因此 $1 - \beta \cos \phi > 0$, 条件 $v'_\perp > c$ 变为

$$\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} > 1,$$

即

$$\boxed{\beta(\sin \phi + \cos \phi) > 1.}$$

当 $\phi \geq \pi/2$ 时, $v'_\perp/c$ 的分母至少为一, 而分子至多为 $\beta < 1$ 。因此, 远离观测者或完全沿横向运动的源不可能出现视超光速运动。在 $\phi = 0$ 时, 横向运动为零, 也不可能出现这种现象。

在相关区间 $0 < \phi < \pi/2$ 内,

$$\boxed{\beta > f(\phi), \quad f(\phi) = \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi}.$$

因此, 完整的物理条件为

$$\boxed{0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.}$$

对于题目要求的图, 具有物理意义的区域满足

$$0 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

以 ϕ 为横坐标、 β 为纵坐标, 在 $0 \leq \phi \leq \pi/2$ 范围内画出临界曲线。可用于作图的点如下:

ϕ	$f(\phi)$
0	1
$\pi/6$	0.732
$\pi/4$	$1/\sqrt{2} \simeq 0.707$
$\pi/3$	0.732
$\pi/2$	1

曲线关于 $\phi = \pi/4$ 对称。它从 1 下降到最小值 $1/\sqrt{2}$, 然后上升到 1。将严格位于这条曲线上方且严格位于 $\beta = 1$ 下方的区域涂上阴影。在临界曲线本身上, $v'_\perp = c$, 因此阴影不包括这条曲线。 $\phi \geq \pi/2$ 的区域不涂阴影。

由于

$$\sin \phi + \cos \phi = \sqrt{2} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2},$$

只有在下列条件成立时, 这样的区域才存在:

$$\boxed{\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

等价地, 对于任意固定的 $\beta > 1/\sqrt{2}$, 其角度范围为

$$\left| \phi - \frac{\pi}{4} \right| < \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\beta}\right).$$

e) 最大视横向速度

固定 $0 < \beta < 1$, 对 (b) 的结果求导:

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{v'_{\perp}}{c} \right) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} \right) = \frac{\beta(\cos \phi - \beta)}{(1 - \beta \cos \phi)^2}.$$

导数在满足下式的位置由正变负:

$$\cos \phi = \beta.$$

由于视横向速度在 $\phi = 0$ 和 $\phi = \pi$ 处均为零, 这个驻点对应全局最大值。在该角度处,

$$\sin \phi = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad 1 - \beta \cos \phi = 1 - \beta^2.$$

因此,

$$(v'_{\perp})_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

当 $\beta \rightarrow 1^-$ 时, 分母趋于零, 最大视速度无限增大。对于 $\beta = 0$, 视速度在所有角度下均为零。

f) 由多普勒频移确定 β

令

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

对于第一个物体, 给定的多普勒公式为

$$\lambda_1 = \lambda_0 \gamma (1 - \beta \cos \phi).$$

对于沿相反方向运动的物体, $\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$, 从而

$$\lambda_2 = \lambda_0 \gamma (1 + \beta \cos \phi).$$

将这两个表达式相加, 即可消去方向因素:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0 \gamma = \frac{2\lambda_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

因此

$$1 - \beta^2 = \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2},$$

取非负的速率, 得到

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}, \quad \alpha = 4.$$

这也说明了如何求得距离。角运动可确定

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2},$$

而波长可确定 β 。因此 $\beta \sin \phi = \sqrt{\beta^2 - X^2}$, 由 (c) 中推导出的关系可得

$$R = \frac{c(\omega_1 + \omega_2)}{2\omega_1\omega_2} \sqrt{\beta^2 - X^2}.$$

因此，结合角运动和波长的测量即可确定 R ，无需采用其初始估计值。

解答已与官方解答核对。