

IPhO 1998

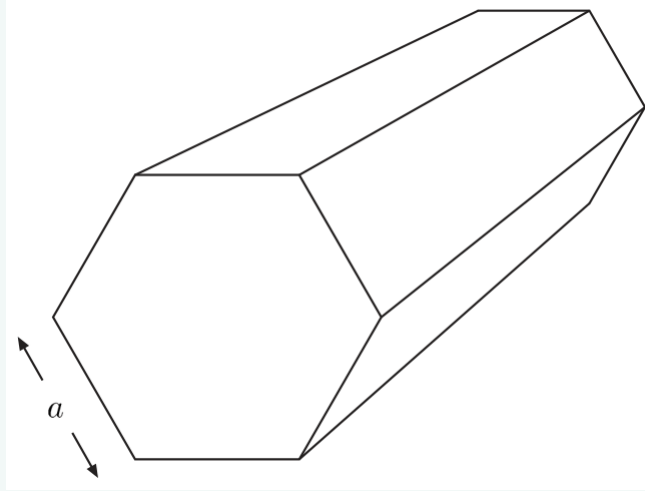
Teorik sorular ve çözümler · Reykjavik, İzlanda · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1998/

Soru 1: Altıgen bir prizmanın yuvarlanması

Yaygın bir kurşun kalem türü gibi uzun, içi dolu, rijit, düzgün altıgen bir prizma düşünün (Şekil 1.1). Prizmanın kütlesi M olup düzgün dağılmıştır. Altıgen kesitin her bir kenarının uzunluğu a 'dır. Altıgen prizmanın merkez eksenini etrafındaki eylemsizlik momenti I şöyledir:

$$I = \frac{5}{12}Ma^2 \quad (1.1)$$



Şekil 1.1: Kesiti düzgün altıgen olan, içi dolu bir prizma.

Prizmanın bir ayrıtı etrafındaki eylemsizlik momenti I' şöyledir:

$$I' = \frac{17}{12}Ma^2 \quad (1.2)$$

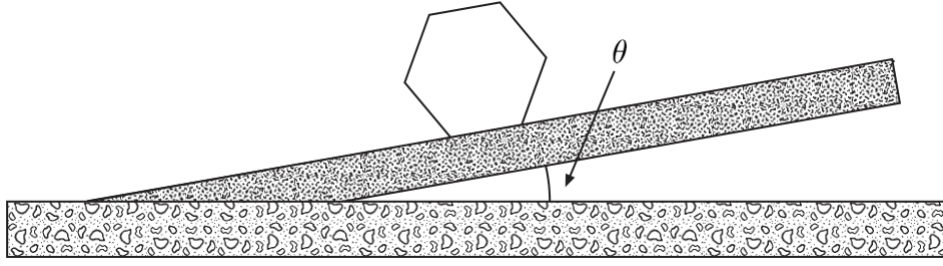
a) (3.5 puan) Prizma başlangıçta, yatayla küçük bir θ açısı yapan eğik bir düzlem üzerinde, eksenini yatay olacak biçimde durmaktadır (Şekil 1.2). Prizmanın yüzeylerinin hafifçe içbükey olduğunu, dolayısıyla prizmanın düzleme yalnızca ayrıtlarından temas ettiğini varsayın. Bu içbükeyliğin eylemsizlik momenti üzerindeki etkisi ihmal edilebilir. Prizma şimdi durgun konumundan hareket ettirilir ve düzlem boyunca aşağıya doğru düzensiz biçimde yuvarlanmaya başlar. Sürtünmenin her türlü kaymayı önlediğini ve prizmanın düzlemle temasını kaybetmediğini varsayın. Belirli bir ayrıtın düzleme çarpmasından hemen önceki açısal hız ω_i , çarpışmadan hemen sonraki açısal hız ise ω_f 'dir.

Şu bağıntının yazılabileceğini gösterin:

$$\omega_f = s\omega_i \quad (1.3)$$

ve s katsayısının değerini cevap kâğıdına yazın.

¹Yazarlar: Leó Kristjánsson ve Thorsteinn Vilhjálmsson



Şekil 1.2: Eğik bir düzlem üzerinde duran altıgen bir prizma.

b) (1 puan) Prizmanın çarpışmadan hemen önceki ve hemen sonraki kinetik enerjileri de benzer biçimde K_i ve K_f ile gösterilmektedir.

Şu bağıntının yazılabileceğini gösterin:

$$K_f = rK_i \quad (1.4)$$

ve r katsayısının değerini cevap kâğıdına yazın.

c) (1.5 puan) Bir sonraki çarpışmanın gerçekleşmesi için K_i , aşağıdaki biçimde yazılabilen bir minimum $K_{i,min}$ değerini aşmalıdır:

$$K_{i,min} = \delta Mga \quad (1.5)$$

Burada $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ yerçekimi ivmesidir.

δ katsayısını eğim açısı θ ve r katsayısı cinsinden bulun. Cevabınızı cevap kâğıdına yazın. (r 'nin değerini değil, cebirsel simgesi olan r 'yi kullanın.)

d) (2 puan) (c) kısmındaki koşul sağlanırsa prizma eğik düzlem boyunca aşağıya yuvarlandıkça kinetik enerji K_i , sabit bir $K_{i,0}$ değerine yaklaşır.

Limitin var olduğu verildiğine göre, $K_{i,0}$ 'ın şu biçimde yazılabileceğini gösterin:

$$K_{i,0} = \kappa Mga \quad (1.6)$$

ve κ katsayısını θ ve r cinsinden cevap kâğıdına yazın.

e) (2 puan) Düzensiz yuvarlanmanın bir kez başladıktan sonra süresiz olarak devam edeceği minimum eğim açısı θ_0 'ı 0.1° doğrulukla hesaplayın. Sayısal cevabınızı cevap kâğıdına yazın.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a) $s = \frac{11}{17} \approx 0.6471$.
- b) $r = \frac{121}{289} \approx 0.4187$.
- c) $\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}$.
- d) $\kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}$.
- e) $\theta_0 = 6.5724 \dots^\circ \approx \boxed{6.6^\circ}$.

s, r, δ, κ katsayıları boyutsuzdur.

Çözüm

Her çarpışmayı anlık kabul ediyor ve çarpışma sırasında yerçekiminin itmesini ihmal ediyoruz.

Çarpışmalar arasında prizma, sabit duran temas ayrıtı etrafında döner; temas kuvveti iş yapmadığından mekanik enerji korunur. Çözüm boyunca trigonometrik fonksiyonları yaklaştırma yapmadan kullanıyoruz.

a) Çarpışmada açısal hızın değişimi

Bir kesitte, eski temas ayrıtını A , düzleme çarpacak bir sonraki ayrıtı B ve kütle merkezini C ile gösterelim. Düzgün bir altıgen için

$$AC = BC = AB = a, \quad \angle ACB = 60^\circ.$$

Çarpışmadan hemen önce prizma A etrafında döndüğünden

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_i \times \overrightarrow{AC}.$$

Çarpışma anında eski ayrıtın teması kesilir ve yeni ayrıt dönme eksenine hâline gelir. İtme oluşturan temas kuvveti B 'den geçtiği için, B 'nin çarptığı sabit doğruya göre açısal momentum korunur.

Çarpışmadan önce B 'ye göre açısal momentum, kütle merkezi etrafındaki dönmeye ait açısal momentum ile kütle merkezinin yörüngesel açısal momentumundan oluşur:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{B,i} &= I\boldsymbol{\omega}_i + \overrightarrow{BC} \times M\mathbf{v}_C \\ &= \left(I + M\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \boldsymbol{\omega}_i \\ &= \left(I + \frac{1}{2}Ma^2 \right) \boldsymbol{\omega}_i. \end{aligned}$$

Çarpışmadan sonra prizma B etrafında döner ve dolayısıyla

$$\mathbf{L}_{B,f} = I'\boldsymbol{\omega}_f.$$

Böylece,

$$\left(\frac{5}{12} + \frac{1}{2} \right) Ma^2 \omega_i = \frac{17}{12} Ma^2 \omega_f,$$

ve buradan

$$\boxed{\omega_f = \frac{11}{17}\omega_i}, \quad \boxed{s = \frac{11}{17}}.$$

b) Çarpışmada kinetik enerjinin değişimi

Çarpışmadan hemen önce ve hemen sonra hareket, sabit duran bir ayrıt etrafındaki saf dönme hareketidir. Her iki ayrıtı göre eylemsizlik momenti de aynı I' değerine sahip olduğundan

$$K_i = \frac{1}{2}I'\omega_i^2, \quad K_f = \frac{1}{2}I'\omega_f^2.$$

Buradan

$$\frac{K_f}{K_i} = \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 = s^2.$$

Böylece

$$\boxed{K_f = \frac{121}{289} K_i}, \quad \boxed{r = \frac{121}{289}}.$$

c) Bir sonraki çarpışma için gereken minimum enerji

B 'deki çarpışmadan sonra kütle merkezi, B 'nin düşey olarak tam üstüne gelene kadar yükselmeli, ardından bir sonraki çarpışmaya doğru alçalmalıdır.

Çarpışma anında C , düzlemin üzerinde düzleme dik doğrultuda $\sqrt{3}a/2$ uzaklıkta ve B 'ye göre eğim boyunca yukarı yönde $a/2$ uzaklıktadır. Dolayısıyla B 'ye göre düşey yüksekliği

$$h_{\text{start}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cos \theta + \frac{a}{2} \sin \theta = a \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right).$$

Ele alınan küçük eğimler için, $0 \leq \theta < \pi/6$, kütle merkezi daha sonra şu maksimum yüksekliğe ulaşır:

$$h_{\text{top}} = a.$$

Yerçekimi potansiyel enerjisi engeli şöyledir:

$$\Delta U = Mga \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right].$$

Çarpışmadan hemen sonra mevcut kinetik enerji rK_i 'dir. En yüksek noktayı aşır bir sonraki ayrıta ulaşmak için şu koşul sağlanmalıdır:

$$rK_i > \Delta U.$$

Dolayısıyla çarpışma öncesi enerjinin eşik değeri

$$K_{i,\min} = \frac{Mga}{r} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right],$$

olduğundan

$$\boxed{\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}}.$$

Eşitsizlik kesindir: enerji tam olarak eşik değerindeyken prizma, kararsız denge konumunu aşmadan bu konuma yaklaşır.

d) Çarpışma öncesi kinetik enerjinin limit değeri

Ardışık çarpışmalardaki geometrik durumlar, düzlem boyunca aşağı yönde bir kenar uzunluğu a kadar ötelenme dışında aynıdır. Dolayısıyla çarpışmalar arasında kütle merkezinin düşey yüksekliği $a \sin \theta$ kadar azalır.

n . çarpışmadan hemen önceki kinetik enerji E_n olsun. Çarpışma bu enerjiyi rE_n 'ye düşürür ve bir sonraki çarpışmadan önce yerçekimi $Mga \sin \theta$ kadar enerji sağlar. Bu nedenle, ardışık olarak tamamlanan adımlar için

$$E_{n+1} = rE_n + Mga \sin \theta.$$

Verilen $E_n \rightarrow K_{i,0}$ limitini alırsak,

$$K_{i,0} = rK_{i,0} + Mga \sin \theta.$$

Böylece

$$\boxed{K_{i,0} = \frac{Mga \sin \theta}{1 - r}}, \quad \boxed{\kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}}.$$

Nitekim yineleme bağıntısı

$$E_n = K_{i,0} + r^n(E_0 - K_{i,0}),$$

sonucunu verir; prizmanın her bir enerji engelini aşmaya devam etmesi koşuluyla, $0 < r < 1$ olduğundan bu ifade yakınsar.

e) Süresiz yuvarlanma için minimum eğim

$K_{i,0} < K_{i,\min}$ ise sonlu herhangi bir başlangıç enerjisi, sonunda prizmanın bir sonraki engeli aşamayacağı kadar azalır. $K_{i,0} \geq K_{i,\min}$ ise ve başlangıç enerjisi $E_0 > K_{i,\min}$ koşulunu sağlıyorsa yineleme bağıntısı, daha sonraki her sonlu adımda E_n 'nin eşik değerinin üzerinde kalmasını sağlar.

Bu nedenle kritik açı şu eşitlikle belirlenir:

$$K_{i,0} = K_{i,\min},$$

ya da

$$\frac{\sin \theta_0}{1 - r} = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta_0)}{r}.$$

$r = 121/289$ yerine konulduğunda,

$$121 \sin \theta_0 = 168 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta_0 \right) \right].$$

Kosinüs açılımı yapıldığında

$$205 \sin \theta_0 + 84\sqrt{3} \cos \theta_0 = 168.$$

$t = \tan(\theta_0/2)$ kullanılırsa bu eşitlik şu hâle gelir:

$$(168 + 84\sqrt{3})t^2 - 410t + (168 - 84\sqrt{3}) = 0.$$

Fiziksel olarak anlamlı $0 < \theta_0 < 30^\circ$ aralığındaki kök

$$t = \frac{3(2 - \sqrt{3})}{14}.$$

Dolayısıyla,

$$\theta_0 = 2 \arctan \left[\frac{3(2 - \sqrt{3})}{14} \right] = 6.5723657 \dots^\circ,$$

ve istenen duyarlılıkla,

$$\boxed{\theta_0 = 6.6^\circ}.$$

Kritik eğimde, eşik değerinden kesin olarak büyük bir başlangıç enerjisi, sonraki her adımın gerçekleşmesini sağlar; ancak prizma her bir kararsız denge konumunun yakınında giderek daha uzun süre geçirir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Buz örtüsünün altındaki su

Buz örtüsü, altındaki zemine oturan ve yatay doğrultuda onlarca ya da yüzlerce km boyunca uzanan kalın bir buz tabakasıdır (kalınlığı birkaç km'ye kadar çıkabilir). Bu soruda, ılıman bir buz örtüsünün, yani erime noktasındaki bir buz örtüsünün altında buzun erimesini ve suyun davranışını ele alıyoruz. Bu koşullarda buzun viskoz bir akışkan gibi basınç değişimlerine yol açtığını, ancak esas olarak düşey hareketle, kırılğan bir biçimde şekil değiştirdiğini varsayabiliriz. Bu soruda kullanılmak üzere aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

Suyun yoğunluğu:	$\rho_w = 1.000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Buzun yoğunluğu:	$\rho_i = 0.917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Buzun özgül ısı:	$c_i = 2.1 \cdot 10^3 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$
Buzun özgül erime ısı:	$L_i = 3.4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$
Kayaç ve magmanın yoğunluğu:	$\rho_r = 2.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Kayaç ve magmanın özgül ısı:	$c_r = 700 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$
Kayaç ve magmanın özgül erime ısı:	$L_r = 4.2 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$
Yeryüzünden dışarıya doğru ortalama ısı akısı:	$J_Q = 0.06 \text{ W/m}^2$
Buzun erime noktası:	$T_0 = 0^\circ\text{C}$, sabit

a) (0.5 puan) Yer'in içinden gelen ısı akısının ortalama değerde olduğu bir yerde bulunan kalın bir buz örtüsünü ele alın. Tablodaki verileri kullanarak her yıl eriyen buz tabakasının d kalınlığını hesaplayın ve cevabınızı cevap kâğıdında ayrılan kutuya yazın.

b) (3.5 puan) Şimdi bir buz örtüsünün üst yüzeyini ele alın. Buz örtüsünün altındaki zeminin eğim açısı α 'dır. Örtünün üst yüzeyi, Şekil 2.1'de gösterildiği gibi β açısıyla eğimlidir. Buzun $x = 0$ noktasındaki düşey kalınlığı h_0 'dır. Dolayısıyla buz örtüsünün alt ve üst yüzeyleri şu denklemlerle betimlenebilir:

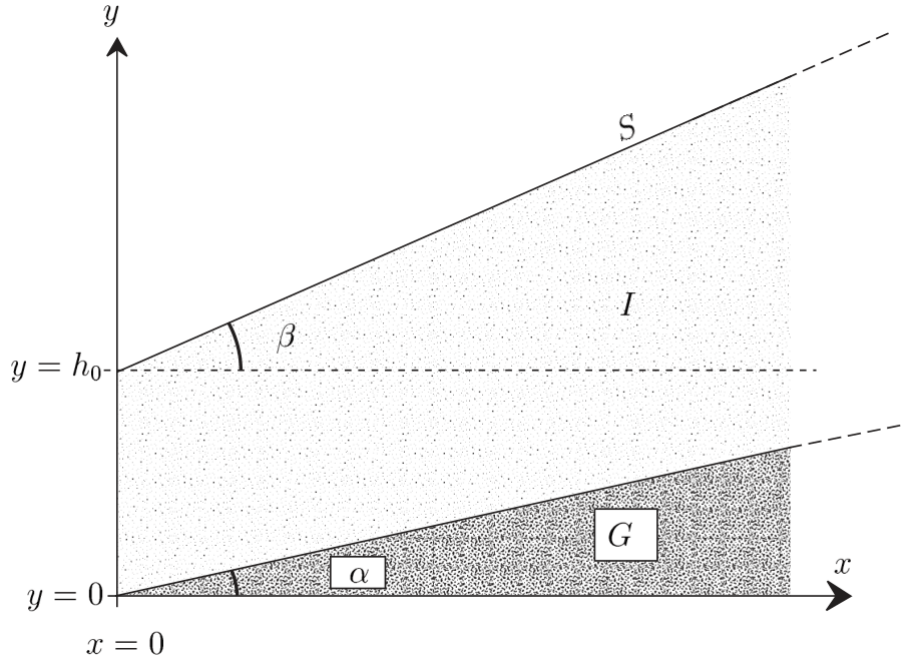
$$y_1 = x \tan \alpha, \quad y_2 = h_0 + x \tan \beta \quad (2.1)$$

Buz örtüsünün tabanındaki p basıncını yatay x koordinatının fonksiyonu olarak veren bir ifade türetin ve cevap kâğıdına yazın.

Buz örtüsü ile zemin arasındaki bir tabakada bulunan suyun hiçbir yönde akmaması için β ile α arasında bulunması gereken koşulu matematiksel olarak ifade edin. Bu koşulun $\tan \beta = s \tan \alpha$ biçiminde olduğunu gösterin. s katsayısını bulun ve sonucu sembolik biçimde cevap kâğıdına yazın.

Şekil 2.2'deki $y_1 = 0.8 x$ doğrusu, bir buz örtüsünün altındaki yer yüzeyini göstermektedir. $x = 0$ noktasındaki düşey h_0 kalınlığı 2 km'dir. Tabandaki suyun dengede olduğunu varsayın. Grafik cevap kâğıdına y_1 doğrusunu çizin ve buzun üst yüzeyini gösteren bir y_2 doğrusu ekleyin. Şekil üzerinde hangi doğrunun neyi gösterdiğini belirtin.

⁶Yazarlar: Gudni Axelsson ve Thorsteinn Vilhjálmsson



Şekil 2.1: Eğimli düzlemsel bir zemine oturan, düzlemsel yüzeyli bir buz örtüsünün kesiti. S : yüzey, G : zemin, I : buz örtüsü.

c) (1 puan) Yatay bir zemin üzerinde bulunan ve başlangıçta sabit $D = 2.0$ km kalınlığında olan büyük bir buz tabakasının içinde, buzun erimesiyle oldukça ani bir biçimde yüksekliği $H = 1.0$ km ve yarıçapı $r = 1.0$ km olan konik bir su kütlesi oluşur (Şekil 2.3). Geriye kalan buzun bu duruma yalnızca düşey hareketle uyum sağladığını varsayıyoruz.

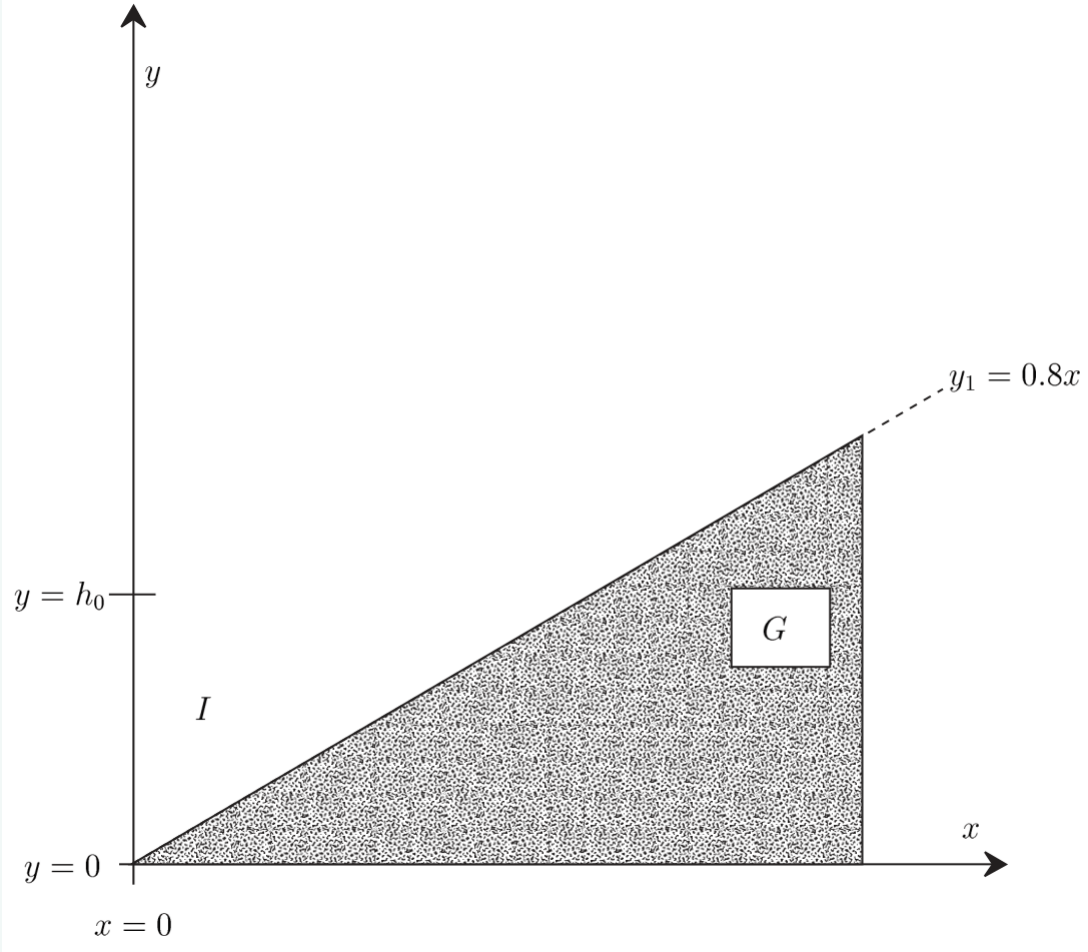
Su konisi oluştuğundan ve hidrostatik dengeye ulaşıldıktan sonra buz örtüsünün yüzeyinin şeklini, boş bir cevap kâğıdında analitik olarak ve grafik cevap kâğıdında çizimle gösterin.

d) (5 puan) Uluslararası bir bilim insanı grubu, yıllık araştırma gezisinde Antarktika'daki ılıman bir buz örtüsünü inceler. Bölge normalde geniş bir platodur; ancak bu kez, derinliği h 100 m ve yarıçapı r 500 m olan, tepesi aşağıya bakan bir koni biçiminde derin, krater benzeri bir çöküntü bulurlar (Şekil 2.4). Bölgedeki buzun kalınlığı 2000 m'dir.

Bilim insanları, yaptıkları tartışmanın ardından, büyük olasılıkla buz örtüsünün altında küçük bir volkanik püskürme olduğu sonucuna varırlar. Az miktarda magma (erimiş kayaç), buz örtüsünün tabanına sokulmuş, katılaşmış ve soğuyarak belirli bir hacimdeki buzı eritmiştir. Bilim insanları, sokulumun hacmini tahmin etmek ve eriyen buzdan oluşan suya ne olduğuna ilişkin fikir edinmek için aşağıdaki yolu izlerler.

Buzun yalnızca düşey yönde hareket ettiğini varsayın. Ayrıca magmanın başlangıçta tamamen erimiş durumda ve 1200°C sıcaklıkta olduğunu varsayın. Basitlik için, sokulumun yüzeydeki konik çöküntünün düşey olarak altında bulunan, dairesel tabanlı bir koni biçiminde olduğunu da varsayın. Magma'nın yükselme süresi, bu süreçteki ısı alışverişinin süresine göre kısadır. Isı akışının esas olarak düşey olduğu, dolayısıyla herhangi bir anda buzdan eriyen hacmin, merkezi magma sokulumunun merkezinin üzerinde bulunan konik bir yüzeye sınırlandığı varsayılmaktadır.

Bu varsayımlar altında buzun erimesi iki aşamada gerçekleşir. Başlangıçta su, magma'nın yüzeyinde basınç dengesinde değildir ve bu nedenle akarak uzaklaşır. Akarak uzaklaşan suyun sıcaklığının 0°C olduğu varsayılabilir. Daha sonra,



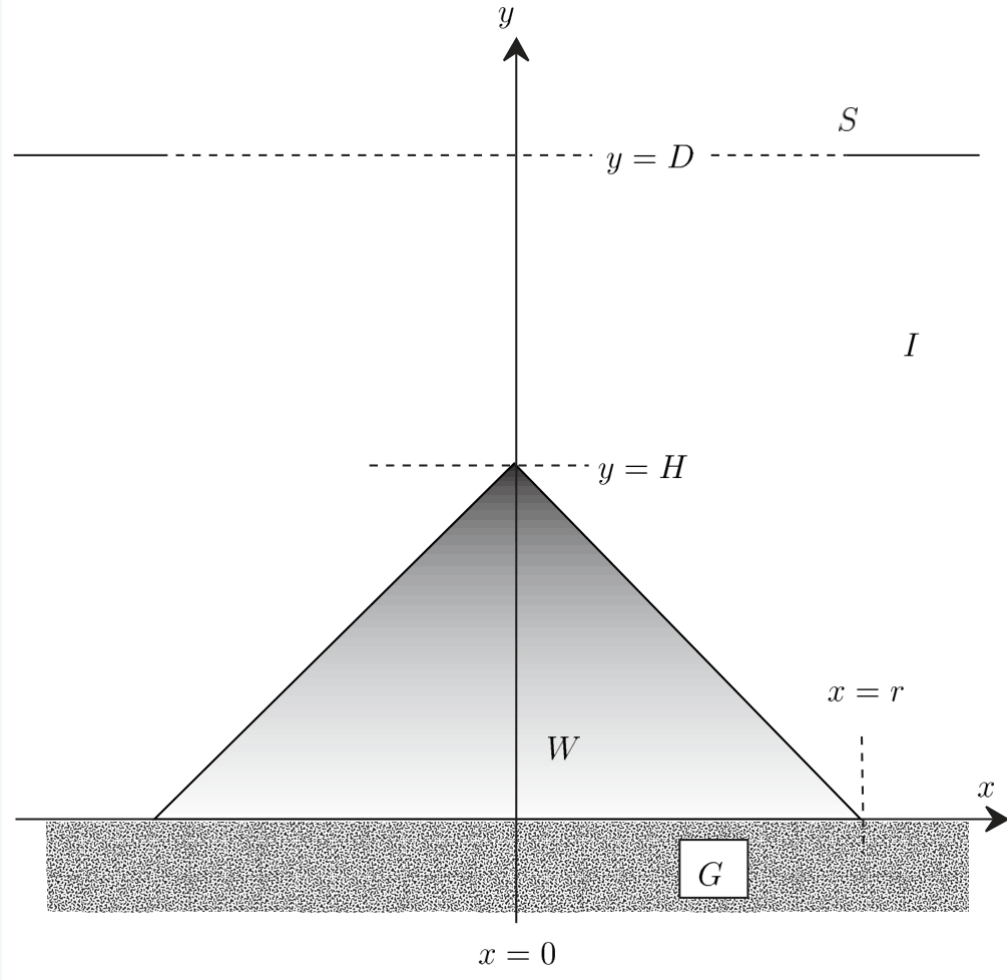
Şekil 2.2: Eğimli bir zemine oturan ve tabanındaki su dengede olan ılıman bir buz örtüsünün kesiti. G : zemin, I : buz örtüsü.

hidrostatik dengeye ulaşılır ve su akarak uzaklaşmak yerine sokulumun üzerinde birikir.

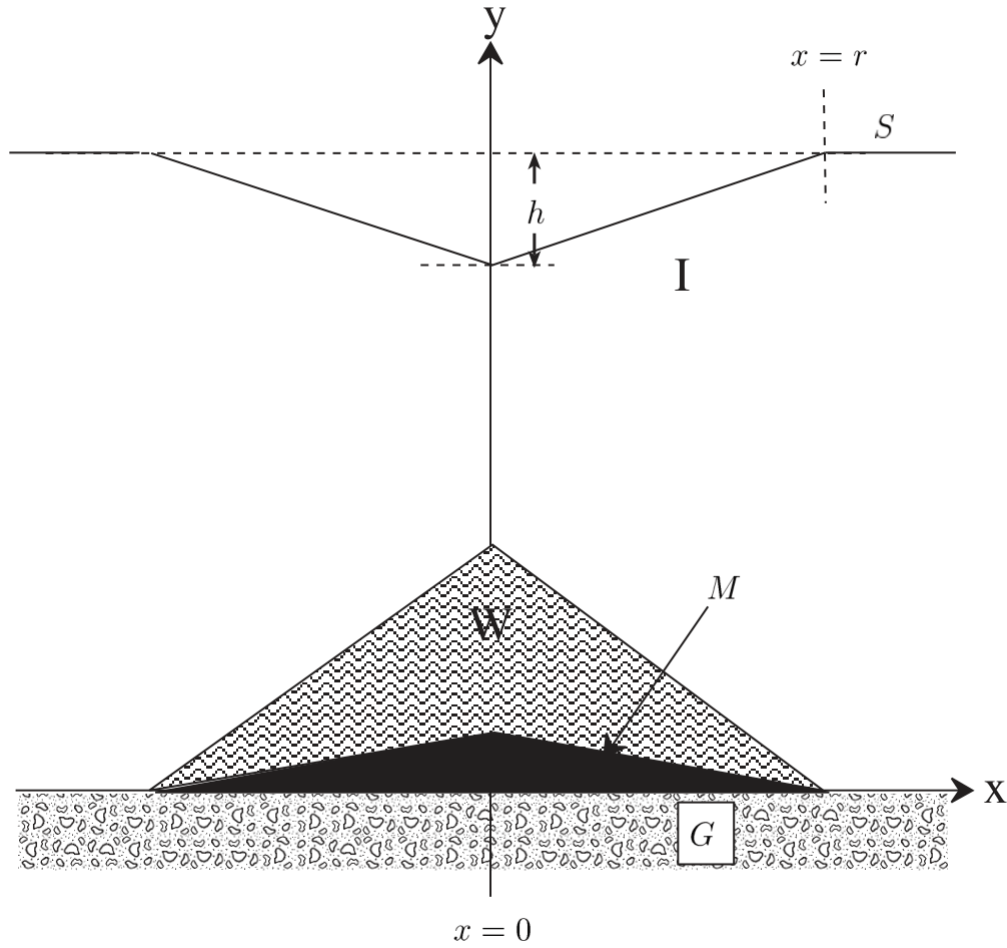
Isıl dengeye ulaşıldığında aşağıdaki nicelikleri belirlemeniz istenmektedir. Cevapları cevap kâğıdına yazın.

1. Buz örtüsünün altında oluşan su konisinin tepesinin, buz örtüsünün başlangıçtaki tabanına göre H yüksekliği.
2. Sokulumun h_1 yüksekliği.
3. Oluşan suyun toplam m_{tot} kütlesi ve akarak uzaklaşan suyun m' kütlesi.

Kayaç sokulumunun ve geriye kalan su kütlesinin şekillerini grafik cevap kâğıdına ölçekli olarak çizin. Şekil 2.4'te önerilen koordinat sistemini kullanın.



Şekil 2.3: Bir buz örtüsünün içindeki su konisinin orta düzleminden geçen düşey kesit. S : yüzey, W : su, G : zemin, I : buz örtüsü.



Şekil 2.4: Ilıman bir buz örtüsündeki konik çöküntünün merkezinden geçen düşey kesit. S : yüzey, G : zemin, I : buz örtüsü, M : kayaç/magma sokulumu, W : su. Şeklin ölçekli çizilmiş OLMADIĞINA dikkat edin.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a) Her yıl eriyen kalınlık

$$d \simeq 6.1 \times 10^{-3} \text{ m} = 6.1 \text{ mm.}$$

- b) Atmosfer basıncı p_a her yerde aynı olmak üzere,

$$p(x) - p_a = \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

Akış olmaması için

$$\tan \beta = s \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \simeq -0.09051.$$

koşulu gerekir. İstenen grafik için her iki koordinat da kilometre cinsinden olmak üzere,

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.07241x.$$

Doğrular yaklaşık olarak (2.293, 1.834) km noktasında kesişir.

- c) R , koni eksenine olan yatay uzaklık olsun. Yüzey

$$y_s(R) = \begin{cases} D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r}\right), & 0 \leq R \leq r, \\ D, & R \geq r. \end{cases}$$

biçimindedir. Bu, yarıçapı 1.0 km ve derinliği yaklaşık 91 m olan konik bir çöküntüdür. Merkezinin tabandan yüksekliği 1.9095 km'dir.

- d), 1.

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} \simeq 1.10 \times 10^3 \text{ m.}$$

- d), 2.

$$h_1 \simeq 103 \text{ m.}$$

Sokulumun hacmi yaklaşık $2.7 \times 10^7 \text{ m}^3$ 'tür.

- d), 3.

$$m_{tot} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ kg}, \quad m' \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ kg.}$$

Erime suyunun yaklaşık 9.3%'ü dışarı akar. Çizim için, $f(x) = 1 - |x|/(500 \text{ m})$ fonksiyonunu $|x| \leq 500 \text{ m}$ aralığında tanımlayın. Kayaç yüzeyi ve su-buz sınırı

$$y_M = (102.8 \text{ m})f(x), \quad y_W = (1104.8 \text{ m})f(x).$$

biçimindedir. Su, bu iki yüzey arasındaki bölgeyi doldurur.

Çözüm

a) Yıllık erime

Buz zaten erime noktasındadır; dolayısıyla sağlanan jeotermal ısı erime için harcanır. Yatay bir A alanı için bir yıl boyunca enerjinin korunumu

$$J_Q A t = \rho_i A d L_i.$$

eşitliğini verir. Böylece

$$d = \frac{J_Q t}{\rho_i L_i}.$$

Bir yılı $365 \times 24 \times 3600 = 3.1536 \times 10^7 \text{ s}$ alırsak,

$$d = \frac{0.06(3.1536 \times 10^7)}{(917)(3.4 \times 10^5)} = 6.069 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

Dolayısıyla her yıl yaklaşık 6.1 mm buz erir. Başlangıçta bir ısınma gerekmediğinden buzun özgül ısısına ihtiyaç yoktur.

b) Basınç ve su akışının olmaması koşulu

Buzun düşey kalınlığı

$$h_i(x) = y_2 - y_1 = h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha).$$

Verilen modele göre tabandaki basınç, atmosfer basıncı ile üstteki buzun birim yatay alan başına ağırlığının toplamına eşittir:

$$p(x) = p_a + \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

Basınç atmosfere göre ölçülüyorsa p_a terimi çıkarılır.

Durgun su için hidrostatik denge

$$p + \rho_w g y = \text{sabit.}$$

koşulunu gerektirir. İnce su tabakası boyunca $y = y_1(x)$ olduğundan, akış olmaması koşulu

$$\frac{dp}{dx} + \rho_w g \frac{dy_1}{dx} = 0.$$

biçimindedir. Basınç ve zemin eğimini yerine koyarsak,

$$\rho_i g (\tan \beta - \tan \alpha) + \rho_w g \tan \alpha = 0.$$

Bunun sonucunda,

$$\tan \beta = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i}.$$

Sayısal olarak,

$$s = \frac{917 - 1000}{917} = -0.0905125.$$

Eksi işareti, buz yüzeyinin zeminin yükseldiği yönde aşağı doğru eğimli olması gerektiğini gösterir.

$y_1 = 0.8x$ ve $h_0 = 2$ km için,

$$\tan \beta = (-0.0905125)(0.8) = -0.0724100,$$

buradan x ve y kilometre cinsinden olmak üzere,

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.0724100x.$$

Zemini orijinden geçen, yükselen bir doğru olarak; buz yüzeyini ise $(0, 2)$ noktasından geçen, hafifçe alçalan bir doğru olarak çizim. Çizim için kullanılabilecek koordinatlar şunlardır:

x (km)	Zemin y_1 (km)	Buz yüzeyi y_2 (km)
0	0	2.000
1.000	0.800	1.928
2.000	1.600	1.855
2.2925	1.834	1.834

$x \geq 0$ için buz, kesişme noktalarına kadar bu doğrular arasında yer alır.

c) Konik bir su kütesinin üzerindeki yüzey

$z(R)$, buz-su sınırının yatay tabandan yüksekliğini gösterebilir:

$$z(R) = H \left(1 - \frac{R}{r} \right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

Kenarda su kalınlığı sıfıra yaklaşır ve buz başlangıçtaki D kalınlığını korur. Dolayısıyla taban seviyesindeki su basıncı

$$p_b = p_a + \rho_i g D.$$

Hidrostatik denge, z yüksekliğindeki basıncı verir:

$$p_w(z) = p_a + \rho_i g D - \rho_w g z.$$

Bu noktanın üzerindeki buz sütununun kalınlığı $y_s - z$ 'dir ve dolayısıyla uyguladığı basınç

$$p_i = p_a + \rho_i g (y_s - z).$$

Buz-su sınırındaki basınçları eşitlersek,

$$\rho_i (y_s - z) = \rho_i D - \rho_w z.$$

Böylece

$$y_s = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} z.$$

Konik sınırın ifadesini yerine koyunca

$$y_s(R) = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r} \right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

elde edilir. Taban alanının dışında $y_s = D$ 'dir. Çöküntünün derinliği

$$\delta = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H = \frac{83}{917} (1000 \text{ m}) = 90.51 \text{ m}.$$

Dolayısıyla yüzey, çevresindeki yatay yüzeyle kesintisiz birleşen, yarıçapı 1.0 km olan ters bir konidir. En alçak noktası

$$y_s(0) = 2000 - 90.51 = 1909.49 \text{ m}.$$

Merkezden geçen düşey bir kesit için $R = |x|$ alın. Koordinatlar kilometre cinsinden olmak üzere,

$$(-1.000, 2.000), \quad (0, 1.90949), \quad (1.000, 2.000)$$

noktalarını doğru parçalarıyla birleştirin ve her iki yanda $y = 2.000$ km seviyesinde yatay olarak devam edin. Bu profili düşey eksen etrafında döndürmek, yüzey çöküntüsünü verir.

d) Volkanik sokulum

$$f(R) = 1 - \frac{R}{r}, \quad 0 \leq R \leq r,$$

olsun; burada $r = 500$ m'dir. Son yüzey, su-buz sınırı ve kayaç yüzeyi şu biçimlerde:

$$y_s = D - h f(R), \quad y_W = H f(R), \quad y_M = h_1 f(R).$$

Burada $D = 2000$ m ve $h = 100$ m'dir.

1. Su konisinin tepesinin yüksekliği

c kısmında türetilen hidrostatik bağıntı burada da geçerlidir:

$$D - y_s = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} y_W.$$

Merkezde,

$$h = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H.$$

Böylece

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} = \frac{917(100)}{83} = 1104.82 \text{ m.}$$

Bu yükseklik başlangıçtaki tabandan ölçülür. Merkezdeki gerçek su derinliği $H - h_1$ olacaktır.

2. Sokulumun yüksekliği

Önce ne kadar buzun eridiğini belirleyelim. Düşey bir sütundaki son buz kalınlığı

$$y_s - y_w = D - (h + H)f(R).$$

Buz yalnızca düşey yönde hareket ettiğinden, her sütunun kaybettiği buz kalınlığı

$$(h + H)f(R).$$

Magmanın başlangıçta buzu yukarı kaldırması, bir sütundaki buz miktarını değiştirmez. Dolayısıyla eriyen toplam buz hacmi

$$V_{\text{melt}} = \int_0^r (h + H) \left(1 - \frac{R}{r}\right) 2\pi R dR = \frac{\pi r^2}{3} (h + H).$$

Şöyle yazalım:

$$C = \frac{\pi r^2}{3}.$$

O hâlde

$$m_{\text{tot}} = \rho_i C(h + H), \quad V_M = Ch_1, \quad m_M = \rho_r Ch_1.$$

Son ısııl denge durumunda kayaç ve buz-su karışımı 0°C sıcaklıktadır. Magmanın her kilogramı

$$q_M = L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0) = 4.2 \times 10^5 + 700(1200) = 1.26 \times 10^6 \text{ J/kg}.$$

ısı açığa çıkarır. Bu, hem katılaşmayı hem de soğumayı içerir. Isı kayıpları ve mekanik enerjideki küçük değişimler ihmal edildiğinde, enerjinin korunumu

$$\rho_r Ch_1 q_M = \rho_i C(h + H)L_i.$$

eşitliğini verir. Dolayısıyla

$$h_1 = \frac{\rho_i (h + H)L_i}{\rho_r [L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

Hidrostatik bağıntı ayrıca

$$\rho_i (h + H) = \rho_w H,$$

eşitliğini de verdiğiinden, eşdeğer olarak,

$$h_1 = \frac{\rho_w H L_i}{\rho_r [L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

Sayısal olarak,

$$h_1 = \frac{1000(1104.819)(3.4 \times 10^5)}{2900(1.26 \times 10^6)} = 102.80 \text{ m} \simeq 103 \text{ m}.$$

Buna göre sokulumun hacmi

$$V_M = \frac{\pi(500)^2}{3} (102.802) = 2.691 \times 10^7 \text{ m}^3.$$

3. Oluşan toplam su ve dışarı akan su

Eriyen buz hacminden,

$$m_{tot} = \rho_i C(h + H) = \rho_w CH.$$

Böylece

$$m_{tot} = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3} (1104.819) = 2.8924 \times 10^{11} \text{ kg} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

Geriye kalan su, su–buz konisi ile kayaç konisi arasındaki boşluğu doldurur. Hacmi

$$V_{\text{remaining}} = C(H - h_1),$$

ve kütlesi

$$m_{\text{remaining}} = \rho_w C(H - h_1) = 2.6233 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

Dolayısıyla kütlenin korunumu

$$\begin{aligned} m' &= m_{tot} - m_{\text{remaining}} \\ &= \rho_w CH - \rho_w C(H - h_1) \\ &= \rho_w Ch_1. \end{aligned}$$

sonucunu verir. Böylece

$$m' = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3} (102.802) = 2.6914 \times 10^{10} \text{ kg} \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ kg}.$$

Dışarı akan suyun hacmi, sokulumun hacmine eşittir:

$$\frac{m'}{\rho_w} = V_M.$$

Bu, iki aşamayı da açıklar. Başlangıçta magma, buzun kalınlığını azaltmadan buzı yukarı kaldırır; dolayısıyla yükselmiş kayaç yüzeyindeki suyun hidrolik basıncı fazladır ve su akarak uzaklaşır. Bu boşalma aşamasının sonunda buz–su sınırı yaklaşık olarak $h_1 f(R)$ kayaç yüzeyidir. Bu durumda hidrostatik denge, buz kalınlığının

$$D - \frac{\rho_w}{\rho_i} h_1 f(R).$$

olmasını gerektirir. Bu aşamaya kadar eriyen buzun kütlesi $\rho_w Ch_1$ 'dir; bu, yukarıda bulunan dışarı akan kütleye tam olarak eşittir. Bundan sonraki erime, içerde kalan su kütlesini oluşturur.

Çizimin açıklaması

Merkezden geçen düşey bir kesit için $R = |x|$ kullanın. $|x| \leq 500$ m aralığında,

$$\begin{aligned} y_M(x) &= 102.802 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m}, \\ y_W(x) &= 1104.819 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m}, \\ y_s(x) &= 2000 - 100 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m}, \end{aligned}$$

burada x sayısal olarak metre cinsinden ifade edilmektedir.

Aşağıdaki koordinatları kullanın ve komşu noktaları doğru parçalarıyla birleştirin:

x (m)	Kayaç yüzeyi y_M (m)	Su-buz sınırı y_W (m)	Buz yüzeyi y_s (m)
-500	0	0	2000
-250	51.4	552.4	1950
0	102.8	1104.8	1900
250	51.4	552.4	1950
500	0	0	2000

Başlangıçtaki tabanı $y = 0$ boyunca çizin, taban ile y_M arasındaki sokulumu ve y_M ile y_W arasındaki suyu tarayarak gösterin. Buz, y_W ile y_s arasında yer alır. Taban alanının dışında taban $y = 0$ seviyesinde, buz yüzeyi ise $y = 2000$ m seviyesinde kalır.

Her iki eksen de eşit uzunluk ölçekleri kullanıldığında, sokulumun yüksekliği yalnızca yaklaşık 103 m iken su sınırı yaklaşık 1105 m'ye ulaşır. Merkezdeki su derinliği

$$H - h_1 \simeq 1002 \text{ m},$$

ve doğrudan üzerindeki kalan buzun kalınlığı yaklaşık 795 m'dir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Işıktan daha hızlı mı?

Bu soruda, gökadamızdaki bileşik bir kaynağın radyo dalgası yayımı üzerine 1994 yılında yapılan ölçümleri analiz edip yorumlayacağız.

Alıcı, dalga boyları birkaç santimetre olan radyo dalgalarını kapsayan geniş bir banda ayarlanmıştır. Şekil 3.1, farklı zamanlarda kaydedilmiş bir dizi görüntüyü göstermektedir. Eş düzey eğrileri, bir coğrafi haritadaki eş yükselti eğrilerine çok benzer biçimde, sabit ışınım şiddetini göstermektedir. Şekildeki iki maksimum, görüntülerde çarpı işaretleriyle gösterilen ortak bir merkezden uzaklaşan iki cisim olarak yorumlanmaktadır. (Uzayda sabit olduğu varsayılan merkez de güçlü bir ışınım kaynağıdır, ancak esas olarak başka dalga boylarında ışınım yaymaktadır). Farklı tarihlerdeki ölçümler günün aynı saatinde yapılmıştır.

Şeklin ölçeği, bir yay saniyesini (as) gösteren bir doğru parçasıyla verilmiştir. (1 as = bir derecenin 1/3600'ü). Şeklin merkezinde çarpı işaretleriyle gösterilen gök cisminin uzaklığının $R = 12.5$ kpc olduğu tahmin edilmektedir. Bir kiloparsek (kpc), $3.09 \cdot 10^{19}$ m değerine eşittir. Işık hızı $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s olarak verilmiştir. Çözümde hata hesaplamaları yapılması gerekmemektedir.

a) (2 puan) Dışarı fırlatılan iki radyo kaynağının ortak merkeze göre açısal konumlarını $\theta_1(t)$ ve $\theta_2(t)$ ile gösteriyoruz; burada 1 ve 2 alt indisleri sırasıyla soldaki ve sağdaki kaynağı, t ise gözlem zamanını belirtmektedir. Dünya'dan görülen açısal hızlar ω_1 ve ω_2 olsun. İki kaynağın bunlara karşılık gelen görünür enine doğrusal hızları $v'_{1,\perp}$ ve $v'_{2,\perp}$ ile gösterilmektedir.

Şekil 3.1'i kullanarak bir grafik çizin ve ω_1 ile ω_2 değerlerini gün başına miliyay saniyesi (mas/d) cinsinden bulunuz. Ayrıca $v'_{1,\perp}$ ve $v'_{2,\perp}$ değerlerini belirleyiniz ve tüm cevaplarınızı cevap kâğıdına yazınız. (Bazı sonuçlar sizi şaşırtabilir).

b) (3 puan) (a) kısmında ortaya çıkan şaşırtıcı durumu açıklığa kavuşturmak için, uzaktaki bir O gözlemcisine doğru olan yönle ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) açısı yapacak şekilde $\vec{v}$ hızıyla hareket eden bir ışık kaynağı düşününüz (Şekil 3.2). Sürat, c ışık hızı olmak üzere $v = \beta c$ şeklinde yazılabilir. Gözlemcinin ölçtüğü kaynak uzaklığı R 'dir. Gözlemcinin gördüğü açısal hız ω , görüş doğrultusuna dik görünür doğrusal hız ise $v'_\perp$ 'dir.

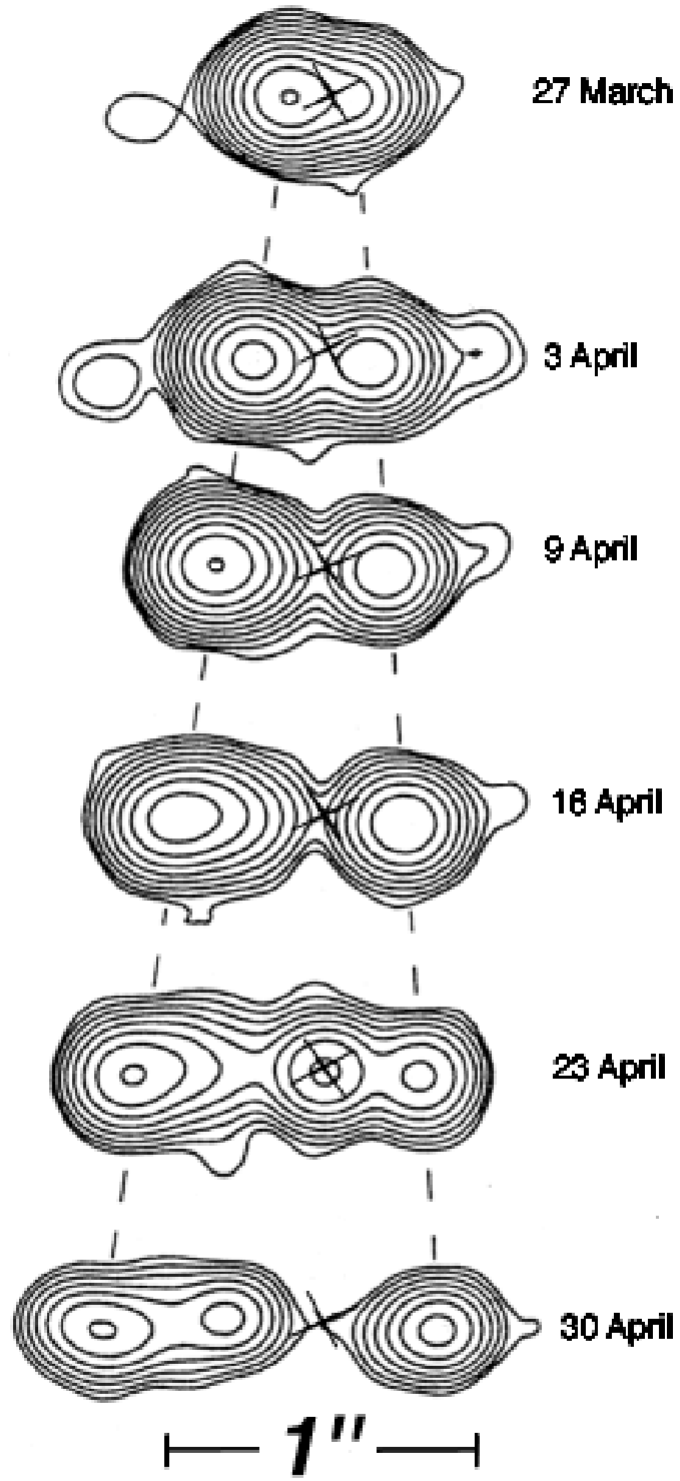
ω ve $v'_\perp$ için β , R ve ϕ cinsinden ifadeler bulunuz ve cevabınızı cevap kâğıdına yazınız.

c) (1 puan) Girişte ve (a) kısmında betimlenen, dışarı fırlatılmış iki cismin zıt yönlerde eşit $v = \beta c$ süratleriyle hareket ettiğini varsayıyoruz. Bu durumda (b) kısmının sonuçları, ω_1 ve ω_2 açısal hızları ile R uzaklığından β ve ϕ 'nin hesaplanmasını mümkün kılar. Burada ϕ , (a) kısmında 1 alt indisiyle gösterilen soldaki cisim için (b) kısmında tanımlanan açıdır.

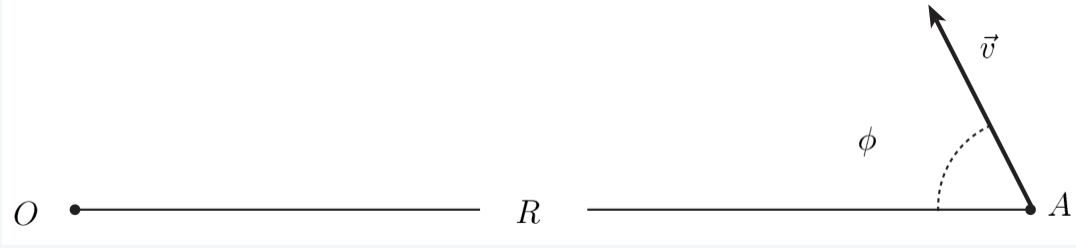
β ve ϕ için bilinen nicelikler cinsinden formüller türetiniz ve (a) kısmındaki verilerden sayısal değerlerini belirleyiniz. Cevaplarınızı cevap kâğıdında ayrılan alanlara yazınız.

d) (2 puan) (b) kısmındaki tek cisimli durumda, görünür dik hızın $v'_\perp$ ışık hızı c 'den büyük olması için gereken koşulu bulunuz.

⁷ Yazarlar: Einar Gudmundsson, Knútur Árnason ve Thorsteinn Vilhjálmsson



Şekil 3.1: Gökadamızdaki bir kaynaktan gelen radyo yayımı.



Şekil 3.2: Gözlemci O noktasında, ışık kaynağının başlangıç konumu ise A noktasındadır. Hız vektörü $\vec{v}$ 'dir.

Koşulu $\beta > f(\phi)$ biçiminde yazınız ve cevap kâğıdında f fonksiyonu için analitik bir ifade veriniz.

Grafik cevap kâğıdına (β, ϕ) düzleminin fiziksel olarak anlamlı bölgesini çiziniz. Bu bölgenin hangi kısmında $v'_{\perp} > c$ koşulunun sağlandığını tarayarak gösteriniz.

e) (1 puan) Yine (b) kısmındaki tek cisimli durumda, verilen bir β için görünür dik hız $v'_{\perp}$ 'nin maksimum değeri $(v'_{\perp})_{\max}$ için bir ifade bulunuz ve bunu cevap kâğıdında ayrılan alana yazınız. $\beta \rightarrow 1$ iken bu hızın sınırsız arttığına dikkat ediniz.

f) (1 puan) Girişte verilen R tahmini pek güvenilir değildir. Bu nedenle bilim insanları, R 'yi belirlemek için daha iyi ve daha doğrudan bir yöntem üzerinde düşünmeye başlamışlardır. Bu konudaki fikirlerden biri şöyledir. Dışarı fırlatılan iki cisimden gelen ışınımın, cisimlerin durgun referans sistemlerinde aynı bilinen özgün λ_0 dalga boyuna karşılık gelen, Doppler kaymasına uğramış λ_1 ve λ_2 dalga boylarını tanımlayıp ölçebildiğimizi varsayınız.

Görelî Doppler kayması denklemlerinden, $\lambda = \lambda_0(1 - \beta \cos \phi)(1 - \beta^2)^{-1/2}$, yola çıkarak ve daha önce olduğu gibi her iki cismin de aynı v süratine sahip olduğunu varsayarak, bilinmeyen $\beta = v/c$ 'nin λ_0 , λ_1 , ve λ_2 cinsinden

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}. \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebileceğini gösteriniz.

α katsayısının sayısal değerini cevap kâğıdında ayrılan alana yazınız.

Bu sonucun, önerilen dalga boyu ölçümlerinin uygulamada uzaklık için yeni bir tahmin sağlayacağı anlamına geldiğini görebilirsiniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a) Grafikten elde edilen temsili değerler

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

şeklindedir. Dolayısıyla,

$$v'_{1,\perp} \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c, \quad v'_{2,\perp} \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

• b)

$$\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}, \quad v'_{\perp} = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

• c) Açısal hızlar birim zaman başına radyan cinsinden ifade edilmek üzere,

$$X = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad Y = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

tanımlarını yapalım. O hâlde

$$\beta = \sqrt{X^2 + Y^2} \simeq 0.92, \quad \phi = \arccos\left(\frac{X}{\beta}\right) \simeq 70^\circ.$$

Soldaki cisim yaklaşmaktadır.

• d) Işık hızının aşıldığı bölge

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.$$

şeklindedir. Dolayısıyla ilgili açı aralığında $f(\phi) = 1/(\sin \phi + \cos \phi)$ olur. Böyle bir hareket için $\beta > 1/\sqrt{2}$ gereklidir.

• e)

$$(v'_{\perp})_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

• f)

$$\alpha = 4, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}.$$

Çözüm

a) Açısal hareketler ve görünür enine hızlar

27 Mart tarihini $t = 0$ olarak alalım. İşaretli ölçeğin tüm uzunluğunu $1'' = 1000$ mas kabul ederek, her bileşenin kendi görüntüsündeki çarpı işaretinden açısal uzaklığını ölçelim. Kesikli izlerle belirtilen, dışarı doğru hareket eden iki bileşeni izleyelim. Merkezin her iki tarafında da açısal uzaklıkları pozitif alıyoruz.

Verilen şekilden okunan yaklaşık değerler şöyledir:

Tarih	t (gün)	θ_1 (yay saniyesi)	θ_2 (yay saniyesi)
27 Mart	0	0.12	0.07
3 Nisan	7	0.22	0.14
9 Nisan	13	0.35	0.20
16 Nisan	20	0.46	0.26
23 Nisan	27	0.61	0.31
30 Nisan	34	0.70	0.38

Yatay eksene t 'yi, düşey eksene açısal uzaklığı yerleştirelim. Her nokta kümesi yaklaşık olarak bir doğru üzerinde yer alır; soldaki bileşenin eğimi daha büyüktür. Temsili doğrular şöyledir:

$$\frac{\theta_1}{\text{arcsec}} \simeq 0.11 + 0.0175 \frac{t}{\text{d}}, \quad \frac{\theta_2}{\text{arcsec}} \simeq 0.08 + 0.0090 \frac{t}{\text{d}}.$$

Dolayısıyla düşey ekseni kestikleri değerler yaklaşık olarak $0.11''$ ve $0.08''$ 'dir; eğimleri ise

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

değerlerini verir.

Açılar son derece küçük olduğundan, θ açısal yer değiştirmesine karşılık gelen enine yer değiştirme $R\theta$ 'dır. Dolayısıyla,

$$v'_{i,\perp} = R\omega_i,$$

burada ω_i saniye başına radyan cinsinden ifade edilmelidir. Gerekli dönüşümler şunlardır:

$$R = 12.5(3.09 \times 10^{19}) = 3.8625 \times 10^{20} \text{ m},$$

$$1 \text{ mas} = \frac{\pi}{180 \times 3600 \times 1000} \text{ rad} = 4.8481 \times 10^{-9} \text{ rad},$$

ve dolayısıyla

$$1 \text{ mas/d} = 5.6113 \times 10^{-14} \text{ rad/s}.$$

Belirtilen uzaklıkta 1 mas/d ,

$$R(5.6113 \times 10^{-14}) = 2.1674 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

değerine karşılık gelir.

Böylece

$$v'_{1,\perp} \simeq 17.5(2.1674 \times 10^7) \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c,$$

$$v'_{2,\perp} \simeq 9.0(2.1674 \times 10^7) \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

İlk değer c 'yi aşmaktadır. Bu hızlar, sinyallerin Dünya'ya **varışları** arasındaki zaman aralığı kullanılarak elde edilir; bu aralık, sinyallerin yayımlanmaları arasındaki aralıktan farklıdır.

b) Işığın yol alma süresinin etkisi

Gözlemcinin ve merkezdeki kaynağın durgun olduğu eylemsiz referans sisteminde çalışalım. Bu sistemde iki sinyal Δt_e zaman aralığıyla yayımlansın.

Bu aralıkta kaynak enine yönde

$$\Delta x_{\perp} = v \sin \phi \Delta t_e.$$

kadar yol alır.

Gözlemciye doğru yer değiştirmesi ise

$$\Delta x_{\parallel} = v \cos \phi \Delta t_e.$$

kadardır.

Uzaktaki bir gözlemci için ikinci sinyalin yolu yaklaşık $\Delta x_{\parallel}$ kadar daha kısadır. Bu nedenle varış zamanları arasındaki aralık

$$\Delta t_{\text{obs}} = \Delta t_e - \frac{\Delta x_{\parallel}}{c} = (1 - \beta \cos \phi) \Delta t_e.$$

olur.

Aynı ifade uzaklaşan bir kaynak için de geçerlidir: bu durumda $\cos \phi < 0$ olduğundan ikinci sinyal daha uzun bir yol alır.

Küçük açı yaklaşımında açısal yer değiştirme

$$\Delta\theta \simeq \frac{\Delta x_{\perp}}{R}.$$

şeklindedir.

Böylece

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t_{\text{obs}}} = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}$$

ve

$$v'_{\perp} = R\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

Burada kaynağın yer değiştirmesi R 'ye kıyasla ihmal edilebilir olduğundan, gözlemler boyunca R ve ϕ sabit kabul edilebilir.

Yaklaşan bir kaynak için ardışık sinyaller, yayımlanmaları arasındaki aralıktan daha kısa aralıklarla ulaşır. Enine yer değiştirmeyi bu kısalmış aralığa bölmek, kaynağın gerçek sürati $v = \beta c < c$ olarak kalmasına rağmen $v'_{\perp} > c$ sonucunu verebilir.

c) Gerçek süratin ve yönün belirlenmesi

İki hareket yönü, gözlemciye doğru olan yönle ϕ ve $\pi - \phi$ açılarını yapar. Enine hız büyüklükleri eşitken radyal bileşenleri zıt işaretlidir. Dolayısıyla,

$$\frac{R\omega_1}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}, \quad \frac{R\omega_2}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 + \beta \cos \phi}.$$

Şu tanımları yapalım:

$$X = \beta \cos \phi, \quad Y = \beta \sin \phi.$$

O hâlde

$$\omega_1(1 - X) = \omega_2(1 + X) = \frac{cY}{R}.$$

İlk iki ifadeyi eşitleyince

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

elde edilir.

Bunu açısal hız denklemlerinden herhangi birinde yerine koyunca

$$Y = \beta \sin \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

elde edilir.

Dolayısıyla,

$$\beta = \frac{\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (2R\omega_1\omega_2/c)^2}}{\omega_1 + \omega_2}$$

ve $0 \leq \phi \leq \pi$ aralığının tamamında geçerli bir ifade

$$\phi = \arccos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta(\omega_1 + \omega_2)} \right].$$

şeklindedir.

Bu gözlemlerde $\omega_1 > \omega_2$ olduğundan ϕ dar açıdır. Ayrıca şu ifadeyi de kullanabiliriz:

$$\tan \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 - \omega_2)}.$$

(a) kısmındaki temsili açısal hızları kullanarak,

$$X \simeq \frac{17.5 - 9.0}{17.5 + 9.0} \simeq 0.321,$$

$$Y \simeq 0.859.$$

Böylece

$$\beta \simeq \sqrt{0.321^2 + 0.859^2} \simeq 0.917, \quad \phi \simeq 69.5^\circ.$$

Grafiğin izin verdiği duyarlılıkla,

$$\beta \simeq 0.92, \quad \phi \simeq 70^\circ.$$

Gerçek sürat yaklaşık 2.8×10^8 m/s'dir. $\beta \cos \phi > 0$ olduğundan soldaki bileşen yaklaşmakta, sağdaki bileşen ise uzaklaşmaktadır.

d) Görünür hareketin ışık hızını aşma koşulu ve bölgesi

Maddesel bir kaynak için $0 \leq \beta < 1$ olur. Bu nedenle $1 - \beta \cos \phi > 0$ 'dır ve $v'_\perp > c$ koşulu

$$\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} > 1,$$

ya da

$$\beta(\sin \phi + \cos \phi) > 1.$$

biçimini alır.

$\phi \geq \pi/2$ için $v'_\perp/c$ 'nin paydası en az bir, payı ise en fazla $\beta < 1$ 'dir. Bu nedenle uzaklaşan ya da tam olarak enine hareket eden bir kaynak için ışık hızını aşan görünür hareket mümkün değildir. Enine hareketin sıfır olduğu $\phi = 0$ durumunda da bu mümkün değildir.

İlgili $0 < \phi < \pi/2$ aralığında,

$$\beta > f(\phi), \quad f(\phi) = \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi}.$$

Böylece fiziksel koşulun tamamı

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.$$

şeklindedir.

İstenen diyagramda fiziksel olarak anlamlı bölge

$$0 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

ile verilir.

ϕ 'yi yatay, β 'yi düşey eksene yerleştirerek $0 \leq \phi \leq \pi/2$ aralığında eşik eğrisini çizelim. Çizimde yararlı olacak noktalar şunlardır:

ϕ	$f(\phi)$
0	1
$\pi/6$	0.732
$\pi/4$	$1/\sqrt{2} \simeq 0.707$
$\pi/3$	0.732
$\pi/2$	1

Eğri $\phi = \pi/4$ 'e göre simetriktir. 1'den minimum değeri olan $1/\sqrt{2}$ 'ye iner, ardından 1'e yükselir. Bu eğrinin kesinlikle üstünde ve $\beta = 1$ 'in kesinlikle altında kalan bölgeyi tarayalım. Eşik eğrisinin üzerinde $v'_\perp = c$ olduğundan eğrinin kendisi taramaya dâhil edilmez. $\phi \geq \pi/2$ bölgesinde hiçbir yer taranmaz.

Şu eşitsizlikten dolayı,

$$\sin \phi + \cos \phi = \sqrt{2} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2},$$

böyle bir bölge yalnızca

$$\boxed{\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

olduğunda vardır.

Eş değer olarak, sabit herhangi bir $\beta > 1/\sqrt{2}$ için bu bölgenin açısal kapsamı

$$\left|\phi - \frac{\pi}{4}\right| < \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\beta}\right).$$

ile verilir.

e) Maksimum görünür enine hız

Sabit $0 < \beta < 1$ için (b) kısmındaki sonucun türevini alalım:

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{v'_\perp}{c} \right) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} \right) = \frac{\beta(\cos \phi - \beta)}{(1 - \beta \cos \phi)^2}.$$

Türev,

$$\cos \phi = \beta.$$

olduğu noktada pozitiften negatife geçer.

Görünür enine hız hem $\phi = 0$ hem de $\phi = \pi$ için sıfır olduğundan, bu durağan nokta mutlak maksimumdur. Bu açıda,

$$\sin \phi = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad 1 - \beta \cos \phi = 1 - \beta^2.$$

Dolayısıyla,

$$(v'_{\perp})_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

$\beta \rightarrow 1^-$ iken payda sıfıra yaklaşır ve maksimum görünür hız sınırsız artar. $\beta = 0$ için görünür hız her açıda sıfırdır.

f) Doppler kaymalarından β 'nin belirlenmesi

Şu tanımı yapalım:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Birinci cisim için verilen Doppler formülü şöyledir:

$$\lambda_1 = \lambda_0 \gamma (1 - \beta \cos \phi).$$

Zıt yönde hareket eden cisim için $\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$ olduğundan,

$$\lambda_2 = \lambda_0 \gamma (1 + \beta \cos \phi).$$

Bu ifadeleri toplamak yön bağımlılığını ortadan kaldırır:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0 \gamma = \frac{2\lambda_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Böylece

$$1 - \beta^2 = \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2},$$

ve süratin negatif olmadığını kullanarak,

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}, \quad \alpha = 4.$$

Bu sonuç, uzaklığın nasıl elde edilebileceğini de açıklar. Açısal hareketler

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2},$$

değerini belirlerken, dalga boyları β 'yı belirler. Dolayısıyla $\beta \sin \phi = \sqrt{\beta^2 - X^2}$ olur ve (c) kısmında türetilen bağıntı

$$R = \frac{c(\omega_1 + \omega_2)}{2\omega_1\omega_2} \sqrt{\beta^2 - X^2}.$$

sonucunu verir.

Böylece açısal ölçümler ile dalga boyu ölçümleri birlikte kullanılarak, başlangıçtaki tahmini benimsemeye gerek kalmadan R belirlenir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.