

IPhO 1998

Теоретические задачи и решения · Рейкьявик, Исландия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/1998/

Задача 1: Качение шестиугольной призмы

Рассмотрим длинную сплошную жёсткую правильную шестиугольную призму, похожую на обычный карандаш (рисунок 1.1). Масса призмы равна M и распределена равномерно. Длина каждой стороны шестиугольника в поперечном сечении равна a . Момент инерции I шестиугольной призмы относительно её центральной оси равен

$$I = \frac{5}{12}Ma^2 \quad (1.1)$$

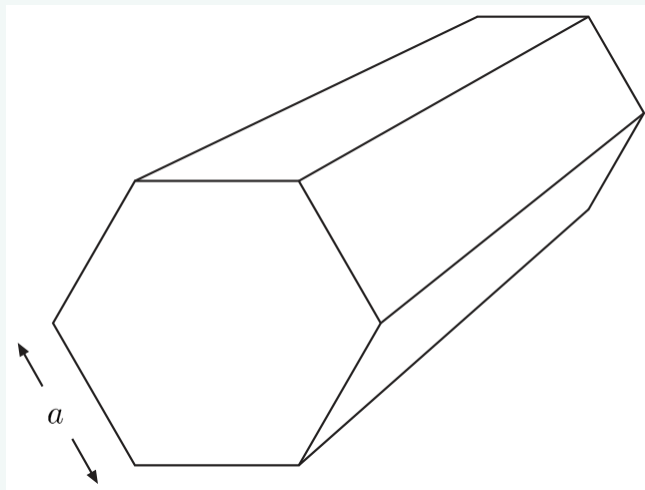


Рисунок 1.1: Сплошная призма с поперечным сечением в форме правильного шестиугольника.

Момент инерции I' относительно ребра призмы равен

$$I' = \frac{17}{12}Ma^2 \quad (1.2)$$

а) (3.5 балла) Первоначально призма покоится на наклонной плоскости, составляющей малый угол θ с горизонтом, причём ось призмы горизонтальна (рисунок 1.2). Предположим, что грани призмы слегка вогнуты, так что призма касается плоскости только своими рёбрами. Влиянием этой вогнутости на момент инерции можно пренебречь. Теперь призму выводят из состояния покоя, и она начинает неравномерно катиться вниз по плоскости. Предположим, что трение предотвращает любое скольжение и что призма не отрывается от плоскости. Угловая скорость непосредственно перед ударом очередного ребра о плоскость равна ω_i , а угловая скорость сразу после удара равна ω_f .

Покажите, что можно записать

$$\omega_f = s\omega_i \quad (1.3)$$

и запишите значение коэффициента s в бланк ответов.

Авторы: Лео Кристьянссон и Торстейнн Вильхьяльмссон

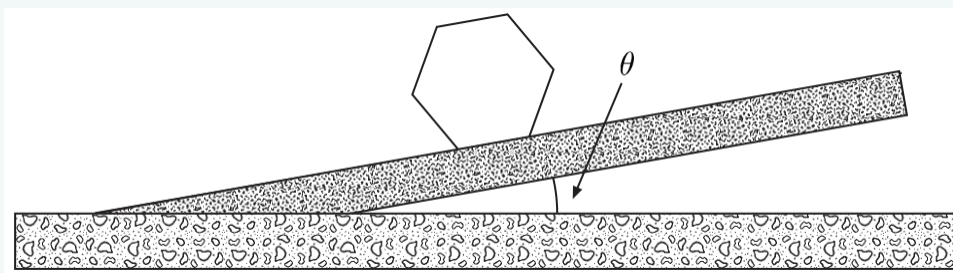


Рисунок 1.2: Шестиугольная призма, лежащая на наклонной плоскости.

b) (1 балл) Аналогично обозначим кинетическую энергию призмы непосредственно перед ударом и сразу после него через K_i и K_f .

Покажите, что можно записать

$$K_f = rK_i \quad (1.4)$$

и запишите значение коэффициента r в бланк ответов.

c) (1.5 балла) Чтобы произошёл следующий удар, энергия K_i должна превышать минимальное значение $K_{i,min}$, которое можно записать в виде

$$K_{i,min} = \delta Mga \quad (1.5)$$

где $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ — ускорение свободного падения.

Найдите коэффициент δ через угол наклона θ и коэффициент r . Запишите ответ в бланк ответов. (Используйте буквенное обозначение r , а не его численное значение.)

d) (2 балла) Если условие пункта (c) выполнено, то по мере качения призмы вниз по наклонной плоскости кинетическая энергия K_i будет приближаться к постоянному значению $K_{i,0}$.

Считая, что этот предел существует, покажите, что $K_{i,0}$ можно записать в виде:

$$K_{i,0} = \kappa Mga \quad (1.6)$$

и запишите в бланк ответов выражение для коэффициента κ через θ и r .

e) (2 балла) Вычислите с точностью до 0.1° минимальный угол наклона θ_0 , при котором неравномерное качение, однажды начавшись, будет продолжаться неограниченно долго. Запишите численный ответ в бланк ответов.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- a) $s = \frac{11}{17} \approx 0.6471$.
- b) $r = \frac{121}{289} \approx 0.4187$.
- c) $\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}$.

- d) $\kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}$.
- e) $\theta_0 = 6.5724 \dots^\circ \approx \boxed{6.6^\circ}$.

Коэффициенты s, r, δ, κ безразмерны.

Решение

Будем считать каждый удар мгновенным, пренебрегая импульсом силы тяжести за время удара. Между ударами призма вращается вокруг неподвижного ребра, соприкасающегося с плоскостью; сила реакции в месте контакта не совершает работы, поэтому механическая энергия сохраняется. Во всём решении будем использовать точные тригонометрические функции.

а) Изменение угловой скорости при ударе

В поперечном сечении обозначим через A прежнее опорное ребро, через B — следующее ребро, которое ударится о плоскость, а через C — центр масс. Для правильного шестиугольника

$$AC = BC = AB = a, \quad \angle ACB = 60^\circ.$$

Непосредственно перед ударом призма вращается вокруг A , поэтому

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_i \times \overrightarrow{AC}.$$

При ударе прежнее ребро отрывается от плоскости, а новое становится осью вращения. Ударная сила реакции проходит через B , поэтому момент импульса относительно неподвижной прямой, на которую приходится удар ребра B , сохраняется.

Перед ударом момент импульса относительно B складывается из момента импульса вращения вокруг центра масс и момента импульса, обусловленного движением центра масс:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{B,i} &= I\boldsymbol{\omega}_i + \overrightarrow{BC} \times M\mathbf{v}_C \\ &= \left(I + M\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \boldsymbol{\omega}_i \\ &= \left(I + \frac{1}{2}Ma^2 \right) \boldsymbol{\omega}_i. \end{aligned}$$

После удара призма вращается вокруг B , так что

$$\mathbf{L}_{B,f} = I'\boldsymbol{\omega}_f.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{5}{12} + \frac{1}{2} \right) Ma^2 \omega_i = \frac{17}{12} Ma^2 \omega_f,$$

и потому

$$\boxed{\omega_f = \frac{11}{17}\omega_i}, \quad \boxed{s = \frac{11}{17}}.$$

б) Изменение кинетической энергии при ударе

Непосредственно перед ударом и сразу после него движение представляет собой чистое вращение вокруг неподвижного ребра. Моменты инерции относительно обоих рёбер одинаковы и равны I' , поэтому

$$K_i = \frac{1}{2} I' \omega_i^2, \quad K_f = \frac{1}{2} I' \omega_f^2.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{K_f}{K_i} = \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 = s^2.$$

Таким образом,

$$\boxed{K_f = \frac{121}{289} K_i}, \quad \boxed{r = \frac{121}{289}}.$$

с) Минимальная энергия, необходимая для следующего удара

После удара ребром B центр масс должен подняться до положения вертикально над B , а затем опуститься до следующего удара.

В момент удара точка C находится на расстоянии $\sqrt{3}a/2$ от плоскости по перпендикуляру к ней и смещена относительно B на расстояние $a/2$ вверх вдоль плоскости. Поэтому её высота по вертикали относительно B равна

$$h_{\text{start}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cos \theta + \frac{a}{2} \sin \theta = a \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right).$$

При рассматриваемых малых углах наклона, $0 \leq \theta < \pi/6$, центр масс затем достигает максимальной высоты

$$h_{\text{top}} = a.$$

Барьер потенциальной энергии в поле тяжести равен

$$\Delta U = Mga \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right].$$

Кинетическая энергия, которой призма располагает сразу после удара, равна rK_i . Чтобы пройти высшую точку и перекатиться на следующее ребро, необходимо выполнение условия

$$rK_i > \Delta U.$$

Следовательно, пороговая энергия перед ударом равна

$$K_{i,\min} = \frac{Mga}{r} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right],$$

так что

$$\boxed{\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}}.$$

Неравенство строгое: при энергии, точно равной пороговой, призма приближается к положению неустойчивого равновесия, но не проходит через него.

д) Предельная кинетическая энергия перед ударом

Положения призмы при последовательных ударах отличаются только сдвигом вниз по плоскости на длину одной стороны a . Поэтому между ударами центр масс опускается по вертикали на $a \sin \theta$.

Пусть E_n — кинетическая энергия непосредственно перед ударом n . Удар уменьшает её до rE_n , а до следующего удара сила тяжести совершает работу $Mga \sin \theta$. Поэтому для последовательных завершённых перекачиваний

$$E_{n+1} = rE_n + Mga \sin \theta.$$

Переходя к указанному в условии пределу $E_n \rightarrow K_{i,0}$, получаем

$$K_{i,0} = rK_{i,0} + Mga \sin \theta.$$

Таким образом,

$$\boxed{K_{i,0} = \frac{Mga \sin \theta}{1 - r}}, \quad \boxed{\kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}}.$$

Действительно, рекуррентное соотношение даёт

$$E_n = K_{i,0} + r^n(E_0 - K_{i,0}),$$

и эта последовательность сходится, поскольку $0 < r < 1$, при условии, что призма продолжает преодолевать каждый энергетический барьер.

е) Минимальный угол наклона для неограниченно долгого качения

Если $K_{i,0} < K_{i,\min}$, то при любой конечной начальной энергии энергия в конце концов уменьшается настолько, что призма не может преодолеть следующий барьер. Если $K_{i,0} \geq K_{i,\min}$ и начальная энергия удовлетворяет условию $E_0 > K_{i,\min}$, то согласно рекуррентному соотношению каждое последующее значение E_n после конечного числа ударов остаётся выше порога.

Следовательно, критический угол определяется условием

$$K_{i,0} = K_{i,\min},$$

или

$$\frac{\sin \theta_0}{1 - r} = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta_0)}{r}.$$

Подставляя $r = 121/289$, получаем

$$121 \sin \theta_0 = 168 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta_0 \right) \right].$$

Раскрывая косинус разности, находим

$$205 \sin \theta_0 + 84\sqrt{3} \cos \theta_0 = 168.$$

После замены $t = \tan(\theta_0/2)$ это уравнение принимает вид

$$(168 + 84\sqrt{3})t^2 - 410t + (168 - 84\sqrt{3}) = 0.$$

Корень, соответствующий физически допустимому интервалу $0 < \theta_0 < 30^\circ$, равен

$$t = \frac{3(2 - \sqrt{3})}{14}.$$

Следовательно,

$$\theta_0 = 2 \arctan \left[\frac{3(2 - \sqrt{3})}{14} \right] = 6.5723657 \dots^\circ,$$

и с требуемой точностью

$$\boxed{\theta_0 = 6.6^\circ}.$$

При критическом угле наклона начальная энергия, строго превышающая пороговую, позволяет совершить каждое последующее перекачивание, хотя вблизи каждого положения неустойчивого равновесия призма проводит всё больше времени.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Вода под ледниковым покровом

Ледниковый покров — это толстый слой льда (толщиной до нескольких километров), лежащий на земной поверхности и простирающийся по горизонтали на десятки или сотни километров. В этой задаче мы рассматриваем таяние льда и поведение воды под тёплым ледниковым покровом, то есть покровом, находящимся при температуре плавления. Можно считать, что в таких условиях лёд создаёт перепады давления подобно вязкой жидкости, но деформируется хрупким образом, преимущественно за счёт вертикальных перемещений. Для решения задачи даны следующие сведения.

Плотность воды:	$\rho_w = 1.000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Плотность льда:	$\rho_i = 0.917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Удельная теплоёмкость льда:	$c_i = 2.1 \cdot 10^3 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$
Удельная теплота плавления льда:	$L_i = 3.4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$
Плотность горной породы и магмы:	$\rho_r = 2.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Удельная теплоёмкость горной породы и магмы:	$c_r = 700 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$
Удельная теплота плавления горной породы и магмы:	$L_r = 4.2 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$
Средняя плотность теплового потока наружу через поверхность Земли:	$J_Q = 0.06 \text{ W/m}^2$
Температура плавления льда:	$T_0 = 0^\circ\text{C}$, постоянна

а) (0.5 балла) Рассмотрим толстый ледниковый покров в месте, где плотность теплового потока из недр Земли равна средней. Используя данные таблицы, вычислите толщину d слоя льда, тающего за год, и запишите ответ в отведённом для него поле на листе ответов.

б) (3.5 балла) Рассмотрим теперь верхнюю поверхность ледникового покрова. Земная поверхность под ледниковым покровом имеет угол наклона α . Верхняя поверхность покрова наклонена под углом β , как показано на рисунке 2.1. Толщина льда по вертикали при $x = 0$ равна h_0 . Таким образом, нижнюю и верхнюю поверхности ледникового покрова можно описать уравнениями

$$y_1 = x \tan \alpha, \quad y_2 = h_0 + x \tan \beta \quad (2.1)$$

Выведите выражение для давления p у основания ледникового покрова как функции горизонтальной координаты x и запишите его на листе ответов.

Сформулируйте математическое условие, связывающее β и α , при котором вода в слое между ледниковым покровом и земной поверхностью не будет течь ни в одном направлении. Покажите, что это условие имеет вид $\tan \beta = s \tan \alpha$. Найдите коэффициент s и запишите результат в символьном виде на листе ответов.

Прямая $y_1 = 0.8x$ на рисунке 2.2 показывает земную поверхность под ледниковым покровом. Толщина по вертикали h_0 при $x = 0$ равна 2 км. Предположим, что вода у основания находится в равновесии. На листе ответов для графиков проведите прямую y_1 и добавьте прямую y_2 , показывающую верхнюю поверхность льда. Обозначьте на рисунке, какая из прямых чему соответствует.

⁶ Авторы: Гудни Аксельссон и Торстейнн Вильхьяльмссон

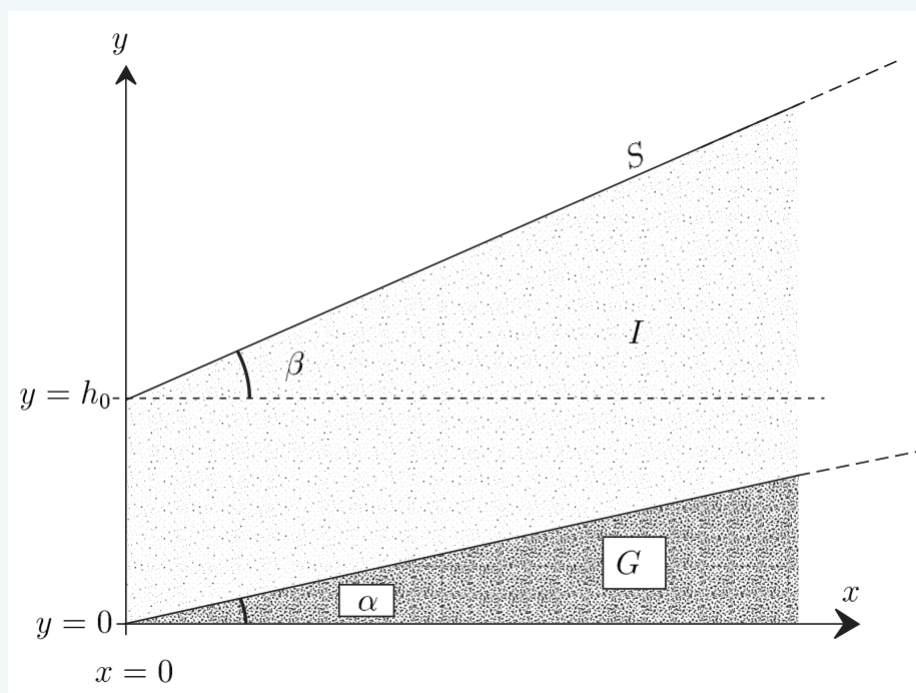


Рисунок 2.1: Поперечное сечение ледникового покрова с плоской поверхностью, лежащего на наклонной плоской земной поверхности. S : поверхность, G : грунт, I : ледниковый покров.

с) (1 балл) Внутри обширного ледникового щита, лежащего на горизонтальном грунте и первоначально имеющего постоянную толщину $D = 2.0$ км, вследствие таяния льда довольно быстро образуется конический объём воды высотой $H = 1.0$ км и радиусом $r = 1.0$ км (рисунок 2.3). Предположим, что оставшийся лёд приспосабливается к этому изменению только за счёт вертикальных перемещений.

Покажите аналитически на чистом листе ответов и графически на листе ответов для графиков форму поверхности ледникового покрова после образования водяного конуса и установления гидростатического равновесия.

d) (5 баллов) Во время ежегодной экспедиции международная группа учёных исследует тёплый ледниковый покров в Антарктиде. Обычно эта местность представляет собой обширное плато, но на этот раз учёные обнаруживают глубокую кратерообразную впадину

в форме конуса, обращённого вершиной вниз, глубиной h , равной 100 м, и радиусом r , равным 500 м (рисунок 2.4). Толщина льда в этой местности составляет 2000 м.

После обсуждения учёные приходят к выводу, что, скорее всего, под ледниковым покровом произошло небольшое вулканическое извержение. Небольшое количество магмы (расплавленной горной породы) внедрилось под основание ледникового покрова, затвердело и остыло, растопив некоторый объём льда. Учёные пытаются описанным ниже способом оценить объём внедрения и выяснить, что произошло с талой водой.

Предположим, что лёд перемещался только по вертикали. Также предположим, что вначале магма была полностью расплавлена и имела температуру 1200°C . Для простоты предположим далее, что внедрение имело форму конуса с круглым основанием, расположенного непосредственно под конической впадиной на поверхности. Время подъёма магмы было мало по сравнению со временем теплообмена в этом процессе. Предполагается, что тепловой поток был преимущественно вертикальным, так что объём растаявшего льда в любой момент ограничен конической поверхностью, центр которой находится над центром магматического внедрения.

При этих предположениях таяние льда происходит в два этапа. Вначале вода у поверхности магмы не находится в равновесии по давлению и потому стекает. Можно считать, что температура стекающей воды равна 0°C . Затем,

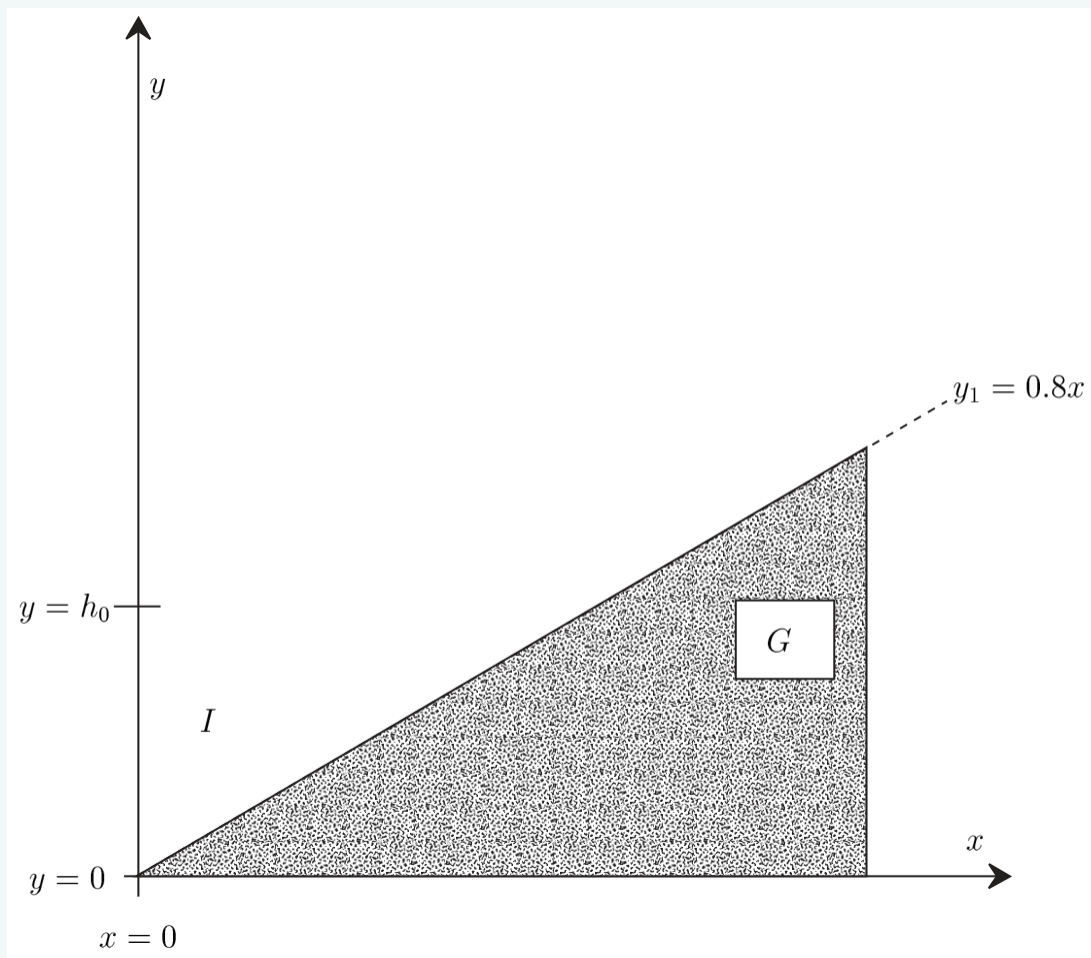


Рисунок 2.2: Поперечное сечение тёплого ледникового покрова, лежащего на наклонной земной поверхности, с водой у основания, находящейся в равновесии. G : грунт, I : ледниковый покров.

устанавливается гидростатическое равновесие, и вода накапливается над внедрением вместо того, чтобы стекать.

Для состояния, в котором установилось тепловое равновесие, требуется определить следующие величины. Запишите ответы на листе ответов.

1. Высоту H вершины водяного конуса, образовавшегося под ледниковым покровом, относительно первоначального основания ледникового покрова.
2. Высоту h_1 внедрения.
3. Общую массу m_{tot} образовавшейся воды и массу m' воды, которая стекает.

На листе ответов для графиков изобразите в масштабе форму внедрения горной породы и оставшегося объёма воды. Используйте систему координат, предложенную на рисунке 2.4.

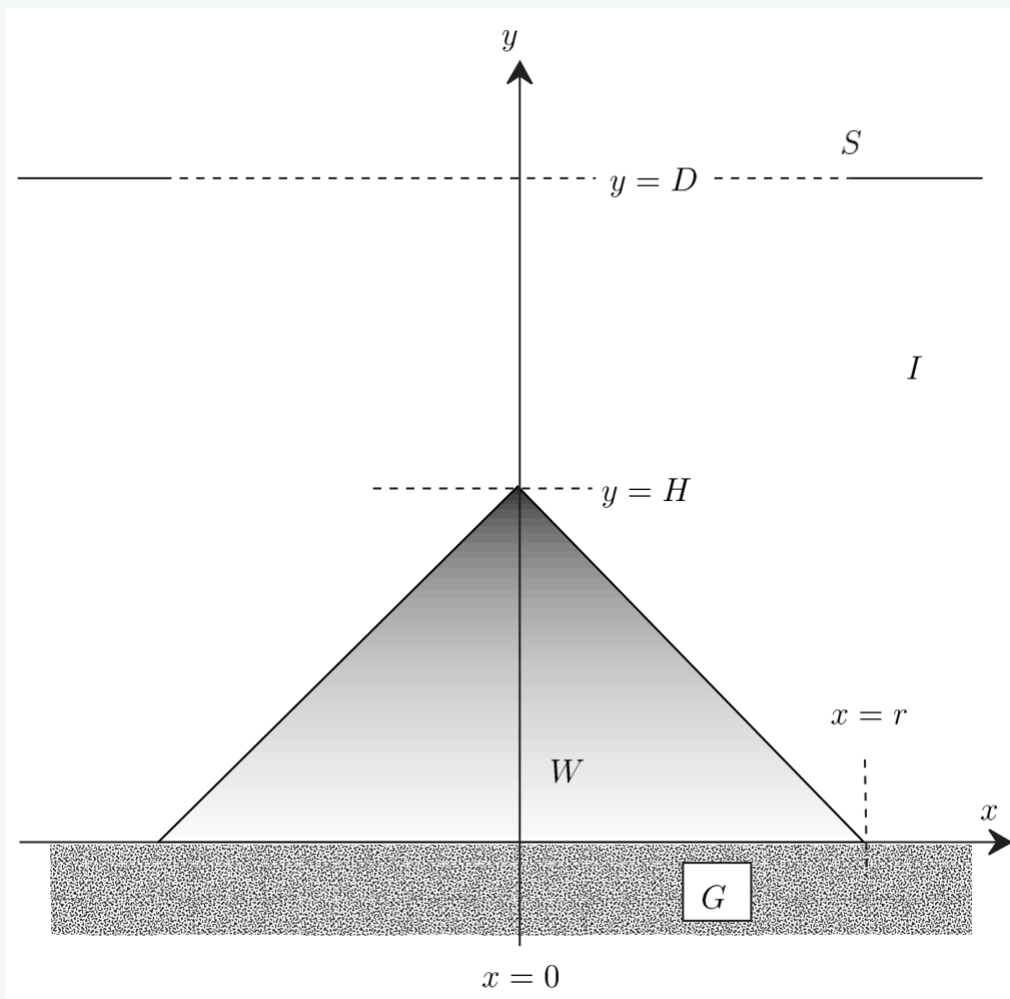


Рисунок 2.3: Вертикальное сечение водяного конуса внутри ледникового покрова плоскостью, проходящей через его ось. S : поверхность, W : вода, G : грунт, I : ледниковый покров.

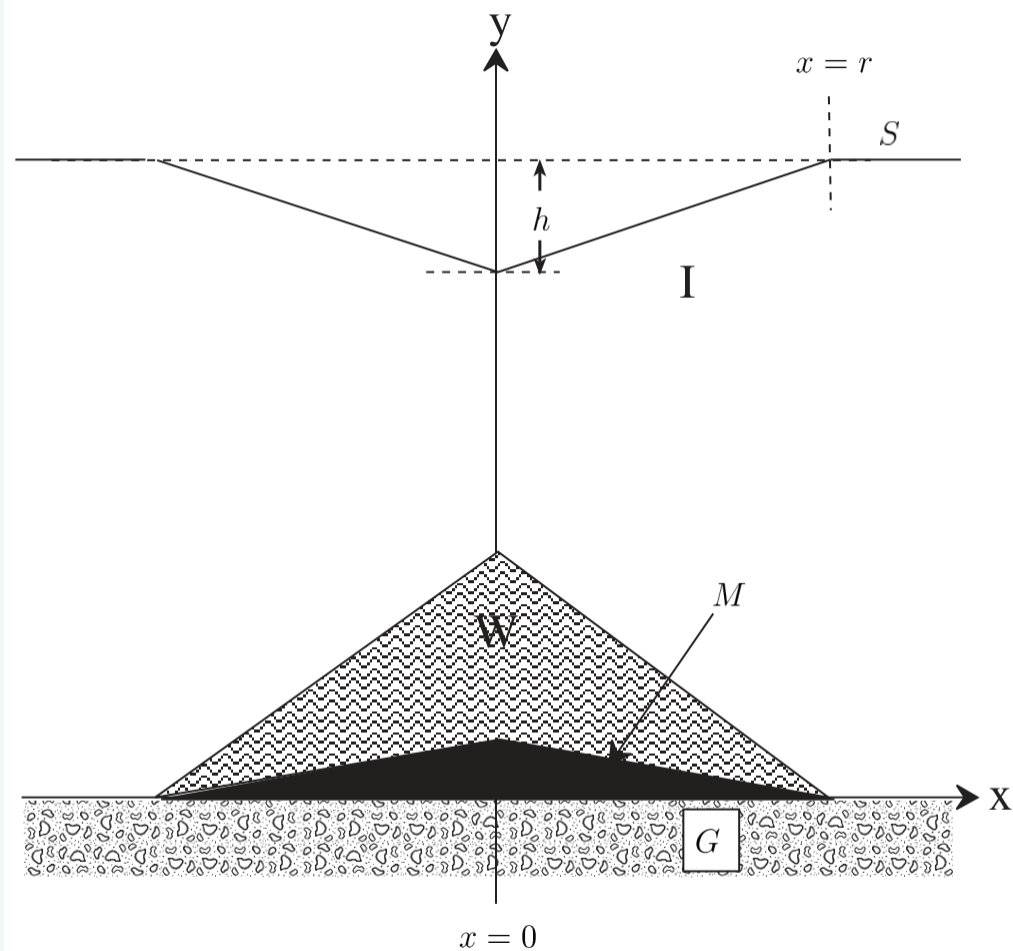


Рисунок 2.4: Вертикальное центральное сечение конической впадины в тёплом ледниковом покрове. S : поверхность, G : грунт, I : ледниковый покров, M : внедрение горной породы/магмы, W : вода. Обратите внимание: рисунок выполнен НЕ в масштабе.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **a)** Толщина слоя, тающего за год, равна

$$d \simeq 6.1 \times 10^{-3} \text{ m} = 6.1 \text{ mm.}$$

- **b)** При одинаковом повсюду атмосферном давлении p_a

$$p(x) - p_a = \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

Для отсутствия течения необходимо

$$\tan \beta = s \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \simeq -0.09051.$$

Для требуемого графика, если обе координаты выражены в километрах,

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.07241x.$$

Прямые пересекаются приблизительно в точке (2.293, 1.834) км.

- **с)** Пусть R — горизонтальное расстояние от оси конуса. Поверхность задаётся выражением

$$y_s(R) = \begin{cases} D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r}\right), & 0 \leq R \leq r, \\ D, & R \geq r. \end{cases}$$

Это коническая впадина радиусом 1.0 км и глубиной приблизительно 91 м. Высота её центральной точки над ложем составляет 1.9095 км.

- **д), 1.**

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} \simeq 1.10 \times 10^3 \text{ м.}$$

- **д), 2.**

$$h_1 \simeq 103 \text{ м.}$$

Объём внедрения составляет приблизительно $2.7 \times 10^7 \text{ м}^3$.

- **д), 3.**

$$m_{tot} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ кг}, \quad m' \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ кг.}$$

Утекает около 9.3% талой воды. Для построения графика введём $f(x) = 1 - |x|/(500 \text{ м})$ при $|x| \leq 500 \text{ м}$. Поверхность горной породы и граница между водой и льдом задаются выражениями

$$y_M = (102.8 \text{ м})f(x), \quad y_W = (1104.8 \text{ м})f(x).$$

Вода занимает область между этими двумя поверхностями.

Решение

а) Ежегодное таяние

Лёд уже находится при температуре плавления, поэтому поступающая геотермальная теплота расходуется на плавление. Для горизонтального участка площадью A закон сохранения энергии за один год даёт

$$J_Q A t = \rho_i A d L_i.$$

Таким образом,

$$d = \frac{J_Q t}{\rho_i L_i}.$$

Принимая продолжительность одного года равной $365 \times 24 \times 3600 = 3.1536 \times 10^7 \text{ с}$, получаем

$$d = \frac{0.06(3.1536 \times 10^7)}{(917)(3.4 \times 10^5)} = 6.069 \times 10^{-3} \text{ м.}$$

Следовательно, за год тает слой льда толщиной приблизительно 6.1 мм. Удельная теплоёмкость льда не нужна, поскольку предварительный нагрев не требуется.

б) Давление и условие отсутствия течения воды

Толщина льда по вертикали равна

$$h_i(x) = y_2 - y_1 = h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha).$$

В рамках заданной модели давление у основания равно сумме атмосферного давления и веса вышележащего льда, приходящегося на единицу горизонтальной площади:

$$p(x) = p_a + \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

Если давление отсчитывается относительно атмосферного, слагаемое p_a опускается.

Для покоящейся воды условие гидростатического равновесия имеет вид

$$p + \rho_w g y = \text{постоянная}.$$

Вдоль тонкого слоя воды $y = y_1(x)$, поэтому условие отсутствия течения имеет вид

$$\frac{dp}{dx} + \rho_w g \frac{dy_1}{dx} = 0.$$

Подставляя выражение для давления и наклон земной поверхности, получаем

$$\rho_i g (\tan \beta - \tan \alpha) + \rho_w g \tan \alpha = 0.$$

Следовательно,

$$\tan \beta = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i}.$$

Численно

$$s = \frac{917 - 1000}{917} = -0.0905125.$$

Отрицательный знак означает, что поверхность льда должна понижаться в том направлении, в котором земная поверхность повышается.

При $y_1 = 0.8x$ и $h_0 = 2$ км

$$\tan \beta = (-0.0905125)(0.8) = -0.0724100,$$

откуда, если x и y выражены в километрах,

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.0724100x.$$

Изобразите земную поверхность возрастающей прямой, проходящей через начало координат, а поверхность льда — полого убывающей прямой, проходящей через $(0, 2)$. Для построения удобно использовать следующие координаты:

x (км)	Земная поверхность y_1 (км)	Поверхность льда y_2 (км)
0	0	2.000
1.000	0.800	1.928
2.000	1.600	1.855
2.2925	1.834	1.834

При $x \geq 0$ лёд находится между этими прямыми вплоть до точки их пересечения.

с) Поверхность над коническим объёмом воды

Обозначим через $z(R)$ высоту границы между льдом и водой над горизонтальным ложем:

$$z(R) = H \left(1 - \frac{R}{r} \right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

На краю толщина слоя воды стремится к нулю, а лёд сохраняет первоначальную толщину D .

Поэтому давление воды на уровне ложа равно

$$p_b = p_a + \rho_i g D.$$

Из условия гидростатического равновесия получаем давление на высоте z :

$$p_w(z) = p_a + \rho_i g D - \rho_w g z.$$

Столб льда над этой точкой имеет толщину $y_s - z$ и потому создаёт давление

$$p_i = p_a + \rho_i g (y_s - z).$$

Приравнявая давления на границе между льдом и водой, получаем

$$\rho_i (y_s - z) = \rho_i D - \rho_w z.$$

Таким образом,

$$y_s = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} z.$$

Подстановка выражения для конической границы даёт

$$y_s(R) = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r} \right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

За пределами основания конуса $y_s = D$. Глубина впадины равна

$$\delta = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H = \frac{83}{917} (1000 \text{ m}) = 90.51 \text{ m}.$$

Следовательно, поверхность представляет собой перевёрнутый конус радиусом 1.0 км, непрерывно сопряжённый с окружающей горизонтальной поверхностью. Его нижняя точка находится на высоте

$$y_s(0) = 2000 - 90.51 = 1909.49 \text{ m}.$$

Для центрального вертикального сечения положим $R = |x|$. Выражая координаты в километрах, соединим точки

$$(-1.000, 2.000), \quad (0, 1.90949), \quad (1.000, 2.000)$$

прямолинейными отрезками и продолжим график горизонтально на уровне $y = 2.000$ км в обе стороны. Вращение этого профиля вокруг вертикальной оси даёт впадину на поверхности.

d) Вулканическое внедрение

Пусть

$$f(R) = 1 - \frac{R}{r}, \quad 0 \leq R \leq r,$$

где $r = 500$ м. Конечная поверхность льда, граница между водой и льдом и поверхность горной породы имеют вид

$$y_s = D - hf(R), \quad y_w = Hf(R), \quad y_M = h_1 f(R).$$

Здесь $D = 2000$ м и $h = 100$ м.

1. Высота вершины водяного конуса

Снова применимо гидростатическое соотношение, выведенное в пункте с:

$$D - y_s = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} y_w.$$

В центре

$$h = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H.$$

Отсюда

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} = \frac{917(100)}{83} = 1104.82 \text{ м.}$$

Эта высота отсчитывается от первоначального ложа. Фактическая глубина воды в центре будет равна $H - h_1$.

2. Высота внедрения

Сначала определим, сколько льда растаяло. Конечная толщина льда в вертикальном столбе равна

$$y_s - y_w = D - (h + H)f(R).$$

Поскольку лёд перемещается только по вертикали, в каждом столбе тает слой льда толщиной

$$(h + H)f(R).$$

Первоначальное поднятие магмой не меняет количества льда в столбе. Поэтому полный объём растаявшего льда равен

$$V_{\text{melt}} = \int_0^r (h + H) \left(1 - \frac{R}{r}\right) 2\pi R dR = \frac{\pi r^2}{3} (h + H).$$

Обозначим

$$C = \frac{\pi r^2}{3}.$$

Тогда

$$m_{\text{tot}} = \rho_i C(h + H), \quad V_M = Ch_1, \quad m_M = \rho_r Ch_1.$$

В конечном состоянии теплового равновесия горная порода и смесь льда с водой имеют температуру 0°C . Каждый килограмм магмы выделяет

$$q_M = L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0) = 4.2 \times 10^5 + 700(1200) = 1.26 \times 10^6 \text{ J/kg}.$$

Это включает как затвердевание, так и охлаждение. Пренебрегая потерями теплоты и малыми изменениями механической энергии, из закона сохранения энергии получаем

$$\rho_r Ch_1 q_M = \rho_i C(h + H)L_i.$$

Следовательно,

$$h_1 = \frac{\rho_i (h + H)L_i}{\rho_r [L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

Из гидростатического соотношения также следует

$$\rho_i(h + H) = \rho_w H,$$

поэтому эквивалентное выражение имеет вид

$$h_1 = \frac{\rho_w H L_i}{\rho_r [L_r + c_r (1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

Численно

$$h_1 = \frac{1000(1104.819)(3.4 \times 10^5)}{2900(1.26 \times 10^6)} = 102.80 \text{ m} \simeq 103 \text{ m}.$$

Следовательно, объём внедрения равен

$$V_M = \frac{\pi(500)^2}{3} (102.802) = 2.691 \times 10^7 \text{ m}^3.$$

3. Общее количество образовавшейся воды и количество утёкшей воды

Из объёма растаявшего льда получаем

$$m_{tot} = \rho_i C(h + H) = \rho_w CH.$$

Таким образом,

$$m_{tot} = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3} (1104.819) = 2.8924 \times 10^{11} \text{ kg} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

Оставшаяся вода занимает пространство между конусом границы воды и льда и конусом горной породы. Её объём равен

$$V_{\text{remaining}} = C(H - h_1),$$

а её масса равна

$$m_{\text{remaining}} = \rho_w C(H - h_1) = 2.6233 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

Поэтому закон сохранения массы даёт

$$\begin{aligned} m' &= m_{tot} - m_{\text{remaining}} \\ &= \rho_w CH - \rho_w C(H - h_1) \\ &= \rho_w Ch_1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$m' = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3} (102.802) = 2.6914 \times 10^{10} \text{ kg} \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ kg}.$$

Объём утёкшей воды равен объёму внедрения:

$$\frac{m'}{\rho_w} = V_M.$$

Это также объясняет наличие двух этапов. Вначале магма поднимает лёд, не уменьшая его толщины, поэтому вода на приподнятой поверхности горной породы испытывает избыточное гидравлическое давление и стекает. В конце этого этапа стекания граница между льдом и водой приблизительно совпадает с поверхностью горной породы $h_1 f(R)$. Тогда гидростатическое равновесие требует, чтобы толщина льда была равна

$$D - \frac{\rho_w}{\rho_i} h_1 f(R).$$

Масса льда, растаявшего к этому моменту, равна $\rho_w C h_1$, то есть в точности найденной выше массе утёкшей воды. Дальнейшее таяние образует сохраняющийся подо льдом объём воды.

Описание графика

Для центрального вертикального сечения используем $R = |x|$. В пределах $|x| \leq 500$ м

$$\begin{aligned} y_M(x) &= 102.802 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ м}, \\ y_W(x) &= 1104.819 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ м}, \\ y_s(x) &= 2000 - 100 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ м}, \end{aligned}$$

где численное значение x выражено в метрах.

Используйте следующие координаты и соедините соседние точки прямыми линиями:

x (м)	Поверхность горной породы y_M (м)	Граница между водой и льдом y_W (м)	Поверхность льда y_s (м)
−500	0	0	2000
−250	51.4	552.4	1950
0	102.8	1104.8	1900
250	51.4	552.4	1950
500	0	0	2000

Проведите первоначальное ложе вдоль $y = 0$, заштрихуйте внедрение между ложем и y_M , а также воду между y_M и y_W . Лёд находится между y_W и y_s . За пределами основания конуса ложе остаётся на уровне $y = 0$, а поверхность льда — на уровне $y = 2000$ м.

При одинаковом масштабе длины по обеим осям высота внедрения составляет всего около 103 м, тогда как граница воды достигает высоты около 1105 м. Глубина воды в центре равна

$$H - h_1 \simeq 1002 \text{ м},$$

а толщина оставшегося льда непосредственно над ней составляет около 795 м.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Быстрее света?

В этой задаче мы анализируем и интерпретируем измерения радиоизлучения составного источника в нашей Галактике, выполненные в 1994 году.

Приёмник был настроен на широкую полосу радиоволн с длинами волн в несколько сантиметров. На рисунке 3.1 показана серия изображений, полученных в разные моменты времени. Контурные линии соединяют точки с одинаковой интенсивностью излучения подобно тому, как горизонтали на географической карте соединяют точки с одинаковой

высотой. Два максимума на рисунке интерпретируются как два объекта, удаляющихся от общего центра, отмеченного на изображениях крестиками. (Центр, который считается неподвижным в пространстве, также является мощным источником излучения, но преимущественно на других длинах волн.) Измерения в разные даты проводились в одно и то же время суток.

Масштаб рисунка задан отрезком, соответствующим одной угловой секунде (as). ($1 as = 1/3600$ градуса). Расстояние до небесного тела в центре рисунка, отмеченного крестиками, оценивается как $R = 12.5$ крс. Один килопарсек (крс) равен $3.09 \cdot 10^{19}$ м. Скорость света равна $c = 3.00 \cdot 10^8$ м/с. Вычислять погрешности в решении не требуется.

а) (2 балла) Обозначим угловые положения двух выброшенных радиоизлучающих объектов относительно общего центра через $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$, где индексы 1 и 2 относятся соответственно к левому и правому объектам, а t — время наблюдения. Их угловые скорости, наблюдаемые с Земли, равны ω_1 и ω_2 . Соответствующие кажущиеся поперечные линейные скорости двух источников обозначим через $v'_{1,\perp}$ и $v'_{2,\perp}$.

Используя рисунок 3.1, постройте график и найдите численные значения ω_1 и ω_2 в миллисекундах дуги в сутки (mas/d). Определите также численные значения $v'_{1,\perp}$ и $v'_{2,\perp}$ и запишите все ответы в бланк ответов. (Некоторые результаты могут вас озадачить.)

б) (3 балла) Чтобы разрешить загадку, возникшую в пункте (а), рассмотрим источник света, движущийся со скоростью $\vec{v}$ под углом ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) к направлению на удалённого наблюдателя O (рисунок 3.2). Модуль скорости можно записать в виде $v = \beta c$, где c — скорость света. Измеренное наблюдателем расстояние до источника равно R . Наблюдаемая угловая скорость источника равна ω , а кажущаяся линейная скорость, перпендикулярная лучу зрения, равна $v'_{\perp}$.

Найдите ω и $v'_{\perp}$ через β , R и ϕ и запишите ответ в бланк ответов.

с) (1 балл) Предположим, что два выброшенных объекта, описанных во введении и в пункте (а), движутся в противоположных направлениях с одинаковыми по модулю скоростями $v = \beta c$. Тогда результаты пункта (б) позволяют вычислить β и ϕ по угловым скоростям ω_1 и ω_2 и расстоянию R . Здесь ϕ — угол, определённый в пункте (б), для левого объекта, которому в пункте (а) соответствует индекс 1.

Выведите формулы для β и ϕ через известные величины и определите их численные значения по данным пункта (а). Запишите ответы в отведённые для них поля бланка ответов.

д) (2 балла) Для случая одного тела из пункта (б) найдите условие, при котором кажущаяся поперечная скорость $v'_{\perp}$ превышает скорость света c .

⁷ Авторы: Эйнар Гудмундссон, Кнутур Арнасон и Торстейнн Вильхьяльмссон

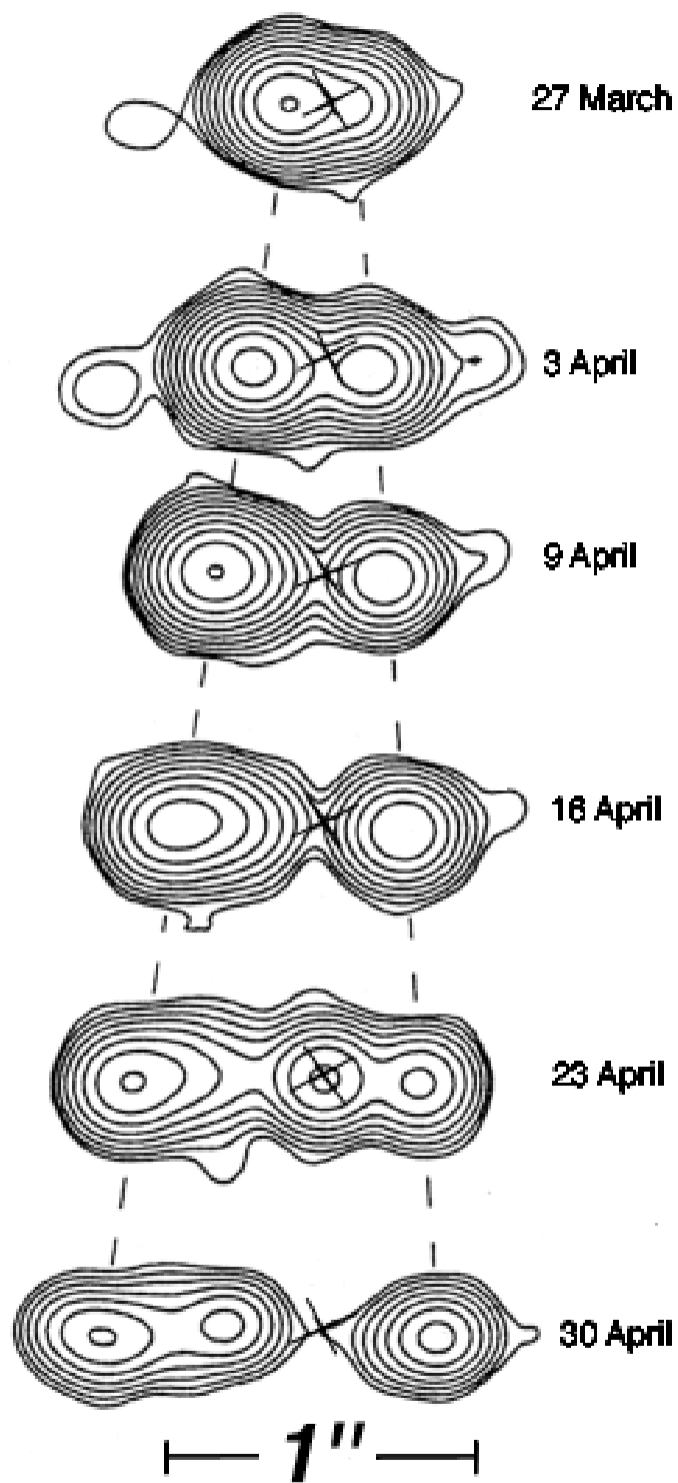


Рисунок 3.1: Радиоизлучение источника в нашей Галактике.

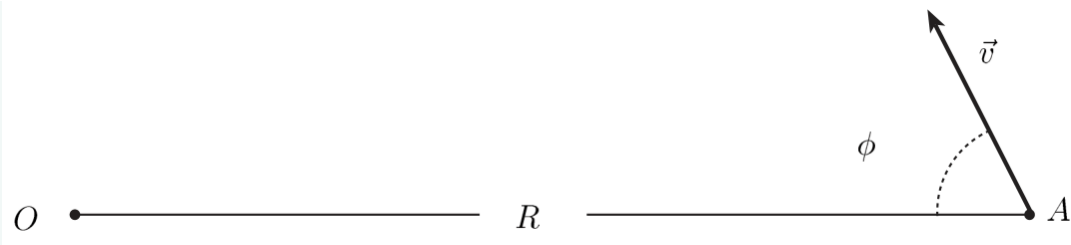


Рисунок 3.2: Наблюдатель находится в точке O , а начальное положение источника света — в точке A . Вектор скорости — $\vec{v}$.

Запишите условие в виде $\beta > f(\phi)$ и приведите аналитическое выражение для функции f в бланке ответов.

Изобразите на бланке для графиков физически допустимую область плоскости (β, ϕ) . Заштрихуйте ту часть этой области, в которой выполняется условие $v'_{\perp} > c$.

е) (1 балл) По-прежнему рассматривая случай одного тела из пункта (b), найдите выражение для максимального значения $(v'_{\perp})_{\max}$ кажущейся поперечной скорости $v'_{\perp}$ при заданном β и запишите его в отведённое поле бланка ответов. Обратите внимание, что эта скорость неограниченно возрастает при $\beta \rightarrow 1$.

ф) (1 балл) Приведённая во введении оценка R не очень надёжна. Поэтому учёные стали задумываться о более точном и прямом способе определения R . Одна из идей состоит в следующем. Предположим, что мы можем идентифицировать и измерить смещённые вследствие эффекта Доплера длины волн λ_1 и λ_2 излучения двух выброшенных объектов, соответствующие одной и той же известной исходной длине волны λ_0 в системах отсчёта покоя объектов.

Исходя из формулы релятивистского доплеровского сдвига

$\lambda = \lambda_0(1 - \beta \cos \phi)(1 - \beta^2)^{-1/2}$ и предполагая, как и прежде, что оба объекта имеют одинаковую по модулю скорость v , покажите, что неизвестную величину $\beta = v/c$ можно выразить через λ_0 , λ_1 , и λ_2 следующим образом:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}. \quad (3.1)$$

Запишите численное значение коэффициента α в отведённое поле бланка ответов.

Заметим, что это означает, что предложенные измерения длин волн на практике позволят получить новую оценку расстояния.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **a)** Характерные значения, получаемые графически:

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

Следовательно,

$$v'_{1,\perp} \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c, \quad v'_{2,\perp} \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

- **b)**

$$\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}, \quad v'_{\perp} = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

- **c)** Выражая угловые скорости в радианах за единицу времени, введём обозначения

$$X = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad Y = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

Тогда

$$\beta = \sqrt{X^2 + Y^2} \simeq 0.92, \quad \phi = \arccos\left(\frac{X}{\beta}\right) \simeq 70^\circ.$$

Левый объект приближается.

- **d)** Область кажущегося сверхсветового движения:

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.$$

Таким образом, $f(\phi) = 1/(\sin \phi + \cos \phi)$ в соответствующем интервале углов. Для такого движения необходимо $\beta > 1/\sqrt{2}$.

- **e)**

$$(v'_{\perp})_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

- **f)**

$$\alpha = 4, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}.$$

Решение

а) Угловое движение и кажущиеся поперечные скорости

Примем 27 марта за $t = 0$. Измерим угловое расстояние каждой компоненты от крестика на соответствующем изображении, принимая полную длину отмеченного масштабного отрезка за $1'' = 1000 \text{ mas}$. Проследим за двумя удаляющимися от центра компонентами, траектории которых обозначены штриховыми линиями. По обе стороны от центра будем считать угловые расстояния положительными.

Приближённые значения, считанные с данного рисунка:

Дата	t (сутки)	θ_1 (угловые секунды)	θ_2 (угловые секунды)
27 марта	0	0.12	0.07
3 апреля	7	0.22	0.14
9 апреля	13	0.35	0.20
16 апреля	20	0.46	0.26
23 апреля	27	0.61	0.31
30 апреля	34	0.70	0.38

Отложим t по горизонтальной оси, а угловое расстояние — по вертикальной. Точки каждого набора лежат приблизительно на прямой; у левой компоненты наклон больше. Подходящие прямые имеют вид

$$\frac{\theta_1}{\text{arcsec}} \simeq 0.11 + 0.0175 \frac{t}{\text{d}}, \quad \frac{\theta_2}{\text{arcsec}} \simeq 0.08 + 0.0090 \frac{t}{\text{d}}.$$

Таким образом, их ординаты при нулевом времени приблизительно равны $0.11''$ и $0.08''$, а угловые коэффициенты дают

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

Углы чрезвычайно малы, поэтому поперечное перемещение, соответствующее угловому смещению θ , равно $R\theta$. Следовательно,

$$v'_{i,\perp} = R\omega_i,$$

где ω_i необходимо выразить в радианах в секунду. Нужные преобразования единиц:

$$R = 12.5(3.09 \times 10^{19}) = 3.8625 \times 10^{20} \text{ m},$$

$$1 \text{ mas} = \frac{\pi}{180 \times 3600 \times 1000} \text{ rad} = 4.8481 \times 10^{-9} \text{ rad},$$

и, следовательно,

$$1 \text{ mas/d} = 5.6113 \times 10^{-14} \text{ rad/s}.$$

На указанном расстоянии 1 mas/d соответствует

$$R(5.6113 \times 10^{-14}) = 2.1674 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

Отсюда

$$v'_{1,\perp} \simeq 17.5(2.1674 \times 10^7) \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c,$$

$$v'_{2,\perp} \simeq 9.0(2.1674 \times 10^7) \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

Первое значение превышает c . Эти скорости вычислены с использованием интервала времени между **приходами** сигналов на Землю; этот интервал отличается от интервала между их испусканиями.

б) Влияние времени распространения света

Будем работать в инерциальной системе отсчёта, в которой наблюдатель и центральный источник неподвижны. Пусть в этой системе два сигнала испущены с интервалом времени Δt_e .

За этот интервал излучатель перемещается в поперечном направлении на расстояние

$$\Delta x_{\perp} = v \sin \phi \Delta t_e.$$

Его перемещение в направлении наблюдателя равно

$$\Delta x_{\parallel} = v \cos \phi \Delta t_e.$$

Для удалённого наблюдателя путь второго сигнала приблизительно на $\Delta x_{\parallel}$ короче. Поэтому интервал между моментами прихода сигналов равен

$$\Delta t_{\text{obs}} = \Delta t_e - \frac{\Delta x_{\parallel}}{c} = (1 - \beta \cos \phi) \Delta t_e.$$

Это же выражение применимо и к удаляющемуся источнику: в этом случае $\cos \phi < 0$, поэтому второй сигнал проходит больший путь.

В приближении малых углов угловое смещение равно

$$\Delta \theta \simeq \frac{\Delta x_{\perp}}{R}.$$

Таким образом,

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t_{\text{obs}}} = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}$$

и

$$v'_{\perp} = R\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

Здесь перемещение источника пренебрежимо мало по сравнению с R , что позволяет считать R и ϕ постоянными в течение наблюдений.

Для приближающегося излучателя последовательные сигналы приходят с меньшим интервалом, чем интервал между их испусканиями. Деление поперечного перемещения на этот сокращённый интервал может дать $v'_{\perp} > c$, хотя истинная скорость излучателя остаётся равной $v = \beta c < c$.

с) Определение истинной скорости и направления движения

Два направления движения образуют углы ϕ и $\pi - \phi$ с направлением на наблюдателя. Модули поперечных составляющих скоростей равны, а радиальные составляющие имеют противоположные знаки. Поэтому

$$\frac{R\omega_1}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}, \quad \frac{R\omega_2}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 + \beta \cos \phi}.$$

Положим

$$X = \beta \cos \phi, \quad Y = \beta \sin \phi.$$

Тогда

$$\omega_1(1 - X) = \omega_2(1 + X) = \frac{cY}{R}.$$

Приравнявая первые два выражения, получаем

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Подстановка в любое из уравнений для угловых скоростей даёт

$$Y = \beta \sin \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

Следовательно,

$$\beta = \frac{\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (2R\omega_1\omega_2/c)^2}}{\omega_1 + \omega_2}$$

а выражение, справедливое во всём интервале $0 \leq \phi \leq \pi$, имеет вид

$$\phi = \arccos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta(\omega_1 + \omega_2)} \right].$$

Для данных наблюдений $\omega_1 > \omega_2$, поэтому угол ϕ острый. Можно также использовать

$$\tan \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 - \omega_2)}.$$

Используя характерные значения угловых скоростей из (а), получаем

$$X \simeq \frac{17.5 - 9.0}{17.5 + 9.0} \simeq 0.321,$$

$$Y \simeq 0.859.$$

Таким образом,

$$\beta \simeq \sqrt{0.321^2 + 0.859^2} \simeq 0.917, \quad \phi \simeq 69.5^\circ.$$

С точностью, которую позволяет график,

$$\beta \simeq 0.92, \quad \phi \simeq 70^\circ.$$

Истинная скорость приблизительно равна 2.8×10^8 m/s. Поскольку $\beta \cos \phi > 0$, левая компонента приближается, а правая удаляется.

d) Условие и область кажущегося сверхсветового движения

Для материального излучателя $0 \leq \beta < 1$. Поэтому $1 - \beta \cos \phi > 0$, и условие $v'_\perp > c$ принимает вид

$$\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} > 1,$$

или

$$\beta(\sin \phi + \cos \phi) > 1.$$

При $\phi \geq \pi/2$ знаменатель выражения для $v'_\perp/c$ не меньше единицы, а числитель не превышает $\beta < 1$. Поэтому кажущееся сверхсветовое движение невозможно для источника, который удаляется или движется строго в поперечном направлении. Оно также невозможно при $\phi = 0$, когда поперечное движение отсутствует.

В соответствующем интервале $0 < \phi < \pi/2$

$$\beta > f(\phi), \quad f(\phi) = \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi}.$$

Таким образом, полное физическое условие имеет вид

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.$$

На требуемой диаграмме физически допустимая область задаётся условиями

$$0 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Отложив ϕ по горизонтальной оси, а β по вертикальной, построим пороговую кривую на интервале $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Для построения удобны следующие точки:

ϕ	$f(\phi)$
0	1
$\pi/6$	0.732
$\pi/4$	$1/\sqrt{2} \simeq 0.707$
$\pi/3$	0.732
$\pi/2$	1

Кривая симметрична относительно $\phi = \pi/4$. Она убывает от 1 до своего минимума $1/\sqrt{2}$, а затем возрастает до 1. Заштрихуем область строго выше этой кривой и строго ниже $\beta = 1$. На самой пороговой кривой $v'_\perp = c$, поэтому она не входит в заштрихованную область. При $\phi \geq \pi/2$ заштрихованных областей нет.

Поскольку

$$\sin \phi + \cos \phi = \sqrt{2} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2},$$

такая область существует лишь при

$$\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Эквивалентно, при любом фиксированном $\beta > 1/\sqrt{2}$ её угловые границы задаются условием

$$\left| \phi - \frac{\pi}{4} \right| < \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\beta}\right).$$

е) Максимальная кажущаяся поперечная скорость

При фиксированном $0 < \beta < 1$ продифференцируем результат пункта (b):

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{v'_\perp}{c} \right) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} \right) = \frac{\beta(\cos \phi - \beta)}{(1 - \beta \cos \phi)^2}.$$

Производная меняет знак с положительного на отрицательный при

$$\cos \phi = \beta.$$

Поскольку кажущаяся поперечная скорость обращается в нуль как при $\phi = 0$, так и при $\phi = \pi$, эта стационарная точка является точкой глобального максимума. При этом угле

$$\sin \phi = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad 1 - \beta \cos \phi = 1 - \beta^2.$$

Следовательно,

$$(v'_{\perp})_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

При $\beta \rightarrow 1^-$ знаменатель стремится к нулю, и максимальная кажущаяся скорость неограниченно возрастает. При $\beta = 0$ кажущаяся скорость равна нулю при любом угле.

f) Определение β по доплеровским сдвигам

Пусть

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Для первого объекта данная формула Доплера имеет вид

$$\lambda_1 = \lambda_0 \gamma (1 - \beta \cos \phi).$$

Для объекта, движущегося в противоположном направлении, $\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$, откуда

$$\lambda_2 = \lambda_0 \gamma (1 + \beta \cos \phi).$$

Сложение этих выражений исключает зависимость от направления:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0 \gamma = \frac{2\lambda_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Таким образом,

$$1 - \beta^2 = \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2},$$

и, выбирая неотрицательный модуль скорости, получаем

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}, \quad \alpha = 4.$$

Это также объясняет, как можно определить расстояние. Угловое движение позволяет найти

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2},$$

а длины волн позволяют определить β . Поэтому $\beta \sin \phi = \sqrt{\beta^2 - X^2}$, и соотношение, полученное в (с), даёт

$$R = \frac{c(\omega_1 + \omega_2)}{2\omega_1\omega_2} \sqrt{\beta^2 - X^2}.$$

Таким образом, совместные измерения углового движения и длин волн позволяют определить R , не используя его первоначальную оценку.

Решение проверено по официальному решению.