

IPhO 1998

Problemas teóricos y soluciones · Reikiavik, Islandia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1998/

Problema 1: Rodadura de un prisma hexagonal

Considere un prisma hexagonal regular, largo, macizo y rígido, como un tipo común de lápiz (Figura 1.1). La masa del prisma es M y está distribuida uniformemente. La longitud de cada lado del hexágono de la sección transversal es a . El momento de inercia I del prisma hexagonal respecto a su eje central es

$$I = \frac{5}{12}Ma^2 \quad (1.1)$$

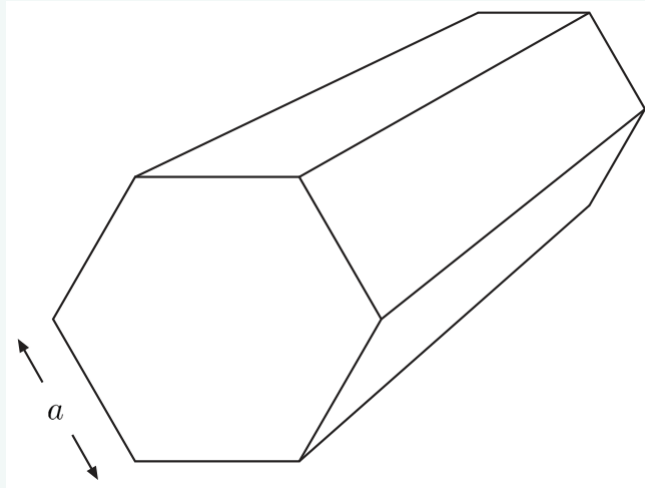


Figura 1.1: Un prisma macizo cuya sección transversal es un hexágono regular.

El momento de inercia I' respecto a una arista del prisma es

$$I' = \frac{17}{12}Ma^2 \quad (1.2)$$

a) (3.5 puntos) El prisma se encuentra inicialmente en reposo, con su eje horizontal, sobre un plano inclinado que forma un ángulo pequeño θ con la horizontal (Figura 1.2). Suponga que las caras del prisma son ligeramente cóncavas, de modo que el prisma solo toca el plano por sus aristas. Puede despreciarse el efecto de esta concavidad sobre el momento de inercia. A continuación, se saca el prisma de su posición de reposo y este comienza a rodar de forma irregular cuesta abajo por el plano. Suponga que el rozamiento impide cualquier deslizamiento y que el prisma no pierde el contacto con el plano. La velocidad angular justo antes de que una determinada arista golpee el plano es ω_i , mientras que ω_f es la velocidad angular inmediatamente después del impacto.

Demuestre que podemos escribir

$$\omega_f = s\omega_i \quad (1.3)$$

y escriba el valor del coeficiente s en la hoja de respuestas.

Autores: Leó Kristjánsson y Thorsteinn Vilhjálmsson

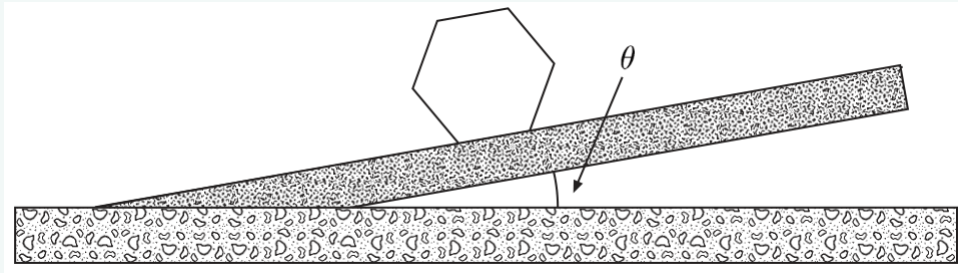


Figura 1.2: Un prisma hexagonal apoyado sobre un plano inclinado.

b) (1 punto) Las energías cinéticas del prisma justo antes y después del impacto son, de forma análoga, K_i y K_f .

Demuestre que podemos escribir

$$K_f = rK_i \quad (1.4)$$

y escriba el valor del coeficiente r en la hoja de respuestas.

c) (1.5 puntos) Para que se produzca el siguiente impacto, K_i debe superar un valor mínimo $K_{i,min}$, que puede escribirse de la forma

$$K_{i,min} = \delta Mga \quad (1.5)$$

donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad.

Halle el coeficiente δ en función del ángulo de inclinación θ y del coeficiente r . Escriba su respuesta en la hoja de respuestas. (Utilice el símbolo algebraico r , no su valor.)

d) (2 puntos) Si se cumple la condición del apartado (c), la energía cinética K_i se aproximará a un valor fijo $K_{i,0}$ a medida que el prisma rueda cuesta abajo por el plano inclinado.

Dado que el límite existe, demuestre que $K_{i,0}$ puede escribirse como:

$$K_{i,0} = \kappa Mga \quad (1.6)$$

y escriba el coeficiente κ en función de θ y r en la hoja de respuestas.

e) (2 puntos) Calcule, con una precisión de 0.1° , el ángulo mínimo de inclinación θ_0 para el que la rodadura irregular, una vez iniciada, continuará indefinidamente. Escriba su respuesta numérica en la hoja de respuestas.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- a) $s = \frac{11}{17} \approx 0.6471$.
- b) $r = \frac{121}{289} \approx 0.4187$.
- c) $\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}$.

- d) $\kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}$.
- e) $\theta_0 = 6.5724 \dots^\circ \approx \boxed{6.6^\circ}$.

Los coeficientes s, r, δ, κ son adimensionales.

Solución

Consideramos cada impacto como instantáneo y despreciamos el impulso de la gravedad durante él. Entre impactos, el prisma gira alrededor de su arista de contacto fija; la fuerza de contacto no realiza trabajo, por lo que se conserva la energía mecánica. Mantenemos las funciones trigonométricas exactas en todo el desarrollo.

a) Cambio de velocidad angular en el impacto

En una sección transversal, sean A la arista de contacto anterior, B la siguiente arista que golpeará el plano y C el centro de masas. Para un hexágono regular,

$$AC = BC = AB = a, \quad \angle ACB = 60^\circ.$$

Inmediatamente antes del impacto, el prisma gira alrededor de A , por lo que

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_i \times \overrightarrow{AC}.$$

En el impacto, la arista anterior deja de estar en contacto y la nueva arista se convierte en el eje de giro. La fuerza impulsiva de contacto actúa pasando por B , por lo que se conserva el momento angular respecto a la recta fija sobre la que impacta B .

Antes del impacto, el momento angular respecto a B comprende la rotación alrededor del centro de masas y el momento angular orbital del centro de masas:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{B,i} &= I\boldsymbol{\omega}_i + \overrightarrow{BC} \times M\mathbf{v}_C \\ &= \left(I + M\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \boldsymbol{\omega}_i \\ &= \left(I + \frac{1}{2}Ma^2 \right) \boldsymbol{\omega}_i. \end{aligned}$$

Después del impacto, el prisma gira alrededor de B , lo que da

$$\mathbf{L}_{B,f} = I'\boldsymbol{\omega}_f.$$

En consecuencia,

$$\left(\frac{5}{12} + \frac{1}{2} \right) Ma^2 \omega_i = \frac{17}{12} Ma^2 \omega_f,$$

y, por tanto,

$$\boxed{\omega_f = \frac{11}{17}\omega_i}, \quad \boxed{s = \frac{11}{17}}.$$

b) Cambio de energía cinética en el impacto

Inmediatamente antes y después del impacto, el movimiento es una rotación pura alrededor de una arista fija. Ambas aristas tienen el mismo momento de inercia I' , por lo que

$$K_i = \frac{1}{2} I' \omega_i^2, \quad K_f = \frac{1}{2} I' \omega_f^2.$$

Se deduce que

$$\frac{K_f}{K_i} = \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 = s^2.$$

Así pues,

$$\boxed{K_f = \frac{121}{289} K_i}, \quad \boxed{r = \frac{121}{289}}.$$

c) Energía mínima necesaria para el siguiente impacto

Después del impacto en B , el centro de masas debe ascender hasta situarse verticalmente sobre B y luego descender hacia el siguiente impacto.

En el instante del impacto, C se encuentra a una distancia perpendicular $\sqrt{3}a/2$ por encima del plano y a una distancia $a/2$ cuesta arriba de B . Por tanto, su altura vertical respecto a B es

$$h_{\text{start}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cos \theta + \frac{a}{2} \sin \theta = a \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right).$$

Para las pequeñas inclinaciones consideradas, $0 \leq \theta < \pi/6$, el centro de masas alcanza posteriormente la altura máxima

$$h_{\text{top}} = a.$$

La barrera de energía potencial gravitatoria es

$$\Delta U = Mga \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right].$$

La energía cinética disponible justo después del impacto es rK_i . Para superar el punto más alto y alcanzar la siguiente arista, debe satisfacer

$$rK_i > \Delta U.$$

Por tanto, la energía umbral anterior al impacto es

$$K_{i,\min} = \frac{Mga}{r} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right],$$

de modo que

$$\boxed{\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}}.$$

La desigualdad es estricta: si la energía es exactamente igual al umbral, el prisma se aproxima a la posición de equilibrio inestable sin sobrepasarla.

d) Energía cinética límite anterior al impacto

Las configuraciones de impactos sucesivos son idénticas salvo por una traslación de una longitud de lado a cuesta abajo por el plano. Así, el centro de masas pierde una altura vertical $a \sin \theta$ entre impactos.

Sea E_n la energía cinética inmediatamente antes del impacto n . El impacto la reduce a rE_n , y la gravedad aporta $Mga \sin \theta$ antes del siguiente impacto. Por tanto, para pasos sucesivos completados,

$$E_{n+1} = rE_n + Mga \sin \theta.$$

Tomando el límite indicado $E_n \rightarrow K_{i,0}$,

$$K_{i,0} = rK_{i,0} + Mga \sin \theta.$$

Así pues,

$$\boxed{K_{i,0} = \frac{Mga \sin \theta}{1 - r}}, \quad \boxed{\kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}}.$$

En efecto, la relación de recurrencia da

$$E_n = K_{i,0} + r^n(E_0 - K_{i,0}),$$

que converge porque $0 < r < 1$, siempre que el prisma siga superando cada barrera de energía.

e) Inclinación mínima para una rodadura indefinida

Si $K_{i,0} < K_{i,\min}$, cualquier energía inicial finita termina disminuyendo lo suficiente como para que el prisma no pueda superar la siguiente barrera. Si $K_{i,0} \geq K_{i,\min}$ y la energía inicial satisface $E_0 > K_{i,\min}$, la relación de recurrencia mantiene cada término posterior E_n de índice finito por encima del umbral.

Por tanto, el ángulo crítico queda determinado por

$$K_{i,0} = K_{i,\min},$$

o bien

$$\frac{\sin \theta_0}{1 - r} = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta_0)}{r}.$$

Sustituyendo $r = 121/289$,

$$121 \sin \theta_0 = 168 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta_0 \right) \right].$$

Al desarrollar el coseno se obtiene

$$205 \sin \theta_0 + 84\sqrt{3} \cos \theta_0 = 168.$$

Utilizando $t = \tan(\theta_0/2)$, esta ecuación se convierte en

$$(168 + 84\sqrt{3})t^2 - 410t + (168 - 84\sqrt{3}) = 0.$$

La raíz en el intervalo físico $0 < \theta_0 < 30^\circ$ es

$$t = \frac{3(2 - \sqrt{3})}{14}.$$

En consecuencia,

$$\theta_0 = 2 \arctan \left[\frac{3(2 - \sqrt{3})}{14} \right] = 6.5723657 \dots^\circ,$$

y, con la precisión solicitada,

$$\boxed{\theta_0 = 6.6^\circ}.$$

Con la inclinación crítica, una energía inicial estrictamente superior al umbral permite completar cada paso posterior, aunque el prisma permanece cada vez más tiempo cerca de cada posición de equilibrio inestable.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Agua bajo un casquete de hielo

Un casquete de hielo es una gruesa capa de hielo (de hasta unos pocos km de espesor) que descansa sobre el terreno y se extiende horizontalmente a lo largo de decenas o cientos de km. En este problema consideramos la fusión del hielo y el comportamiento del agua bajo un casquete de hielo templado, es decir, un casquete de hielo que se encuentra en el punto de fusión. Podemos suponer que, en estas condiciones, el hielo provoca variaciones de presión como un fluido viscoso, pero se deforma de manera frágil, principalmente mediante movimientos verticales. Para resolver este problema se proporciona la siguiente información.

Densidad del agua:	$\rho_w = 1.000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Densidad del hielo:	$\rho_i = 0.917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Calor específico del hielo:	$c_i = 2.1 \cdot 10^3 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$
Calor latente específico del hielo:	$L_i = 3.4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$
Densidad de la roca y del magma:	$\rho_r = 2.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Calor específico de la roca y del magma:	$c_r = 700 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$
Calor latente específico de la roca y del magma:	$L_r = 4.2 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$
Flujo medio de calor hacia el exterior a través de la superficie terrestre:	$J_Q = 0.06 \text{ W/m}^2$
Punto de fusión del hielo:	$T_0 = 0^\circ\text{C}$, constante

a) (0.5 puntos) Considere un casquete de hielo grueso en un lugar donde el flujo de calor procedente del interior de la Tierra tiene el valor medio. Utilizando los datos de la tabla, calcule el espesor d de la capa de hielo que se funde cada año y escriba su respuesta en el recuadro correspondiente de la hoja de respuestas.

b) (3.5 puntos) Considere ahora la superficie superior de un casquete de hielo. El terreno situado bajo el casquete tiene un ángulo de inclinación α . La superficie superior del casquete está inclinada un ángulo β , como se muestra en la Figura 2.1. El espesor vertical del hielo en $x = 0$ es h_0 . Por tanto, las superficies inferior y superior del casquete de hielo pueden describirse mediante las ecuaciones

$$y_1 = x \tan \alpha, \quad y_2 = h_0 + x \tan \beta \quad (2.1)$$

Obtenga una expresión para la presión p en la base del casquete de hielo en función de la coordenada horizontal x y escríbala en la hoja de respuestas.

Formule matemáticamente una condición entre β y α para que el agua de una capa situada entre el casquete de hielo y el terreno no fluya en ninguna de las dos direcciones. Demuestre que la condición tiene la forma $\tan \beta = s \tan \alpha$. Halle el coeficiente s y escriba el resultado de forma simbólica en la hoja de respuestas.

La recta $y_1 = 0.8x$ de la Figura 2.2 representa la superficie terrestre bajo un casquete de hielo. El espesor vertical h_0 en $x = 0$ es de 2 km. Suponga que el agua de la base está en equilibrio. En una hoja de respuestas para gráficas, dibuje la recta y_1 y añada una recta y_2 que represente la superficie superior del hielo. Indique en la figura cuál es cada recta.

⁶Autores: Gudni Axelsson y Thorsteinn Vilhjálmsson

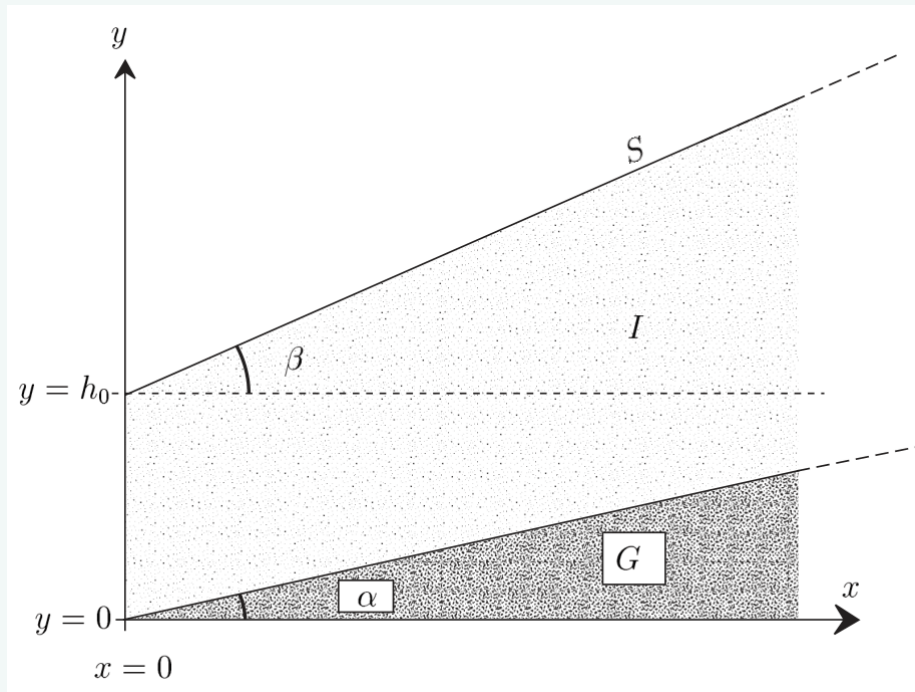


Figura 2.1: Sección transversal de un casquete de hielo de superficie plana que descansa sobre un terreno plano inclinado. S : superficie, G : terreno, I : casquete de hielo.

c) (1 punto) En el interior de una gran capa de hielo sobre un terreno horizontal, cuyo espesor original es constante e igual a $D = 2.0$ km, se forma de manera bastante repentina, por fusión del hielo, una masa de agua cónica de altura $H = 1.0$ km y radio $r = 1.0$ km (Figura 2.3). Suponemos que el hielo restante se adapta a este cambio únicamente mediante movimientos verticales.

Muestre analíticamente en una hoja de respuestas en blanco y gráficamente en una hoja de respuestas para gráficas la forma de la superficie del casquete de hielo después de que se haya formado el cono de agua y se haya alcanzado el equilibrio hidrostático.

d) (5 puntos) En su expedición anual, un grupo internacional de científicos explora un casquete de hielo templado en la Antártida. La zona es normalmente una amplia meseta, pero esta vez encuentran una profunda depresión similar a un cráter, con forma de cono invertido, de profundidad h de 100 m y radio r de 500 m (Figura 2.4). El espesor del hielo en la zona es de 2000 m.

Tras debatirlo, los científicos concluyen que lo más probable es que se haya producido una pequeña erupción volcánica bajo el casquete de hielo. Una pequeña cantidad de magma (roca fundida) penetró en la base del casquete, se solidificó y se enfrió, fundiendo cierto volumen de hielo. Los científicos intentan estimar de la siguiente manera el volumen de la intrusión y hacerse una idea de lo que ocurrió con el agua de fusión.

Suponga que el hielo solo se desplazó verticalmente. Suponga también que el magma estaba completamente fundido y a 1200°C al principio. Para simplificar, suponga además que la intrusión tenía forma de cono de base circular situado verticalmente bajo la depresión cónica de la superficie. El tiempo de ascenso del magma fue corto en comparación con el tiempo de intercambio de calor durante el proceso. Se supone que el flujo de calor fue principalmente vertical, de modo que el volumen de hielo fundido en cualquier instante está delimitado por una superficie cónica centrada sobre el centro de la intrusión de magma.

Con estas hipótesis, la fusión del hielo tiene lugar en dos etapas. Al principio, el agua no está en equilibrio de presiones en la superficie del magma y, por tanto, se evacua. Puede suponerse que el agua que se evacua tiene una temperatura de 0°C . Posteriormente,

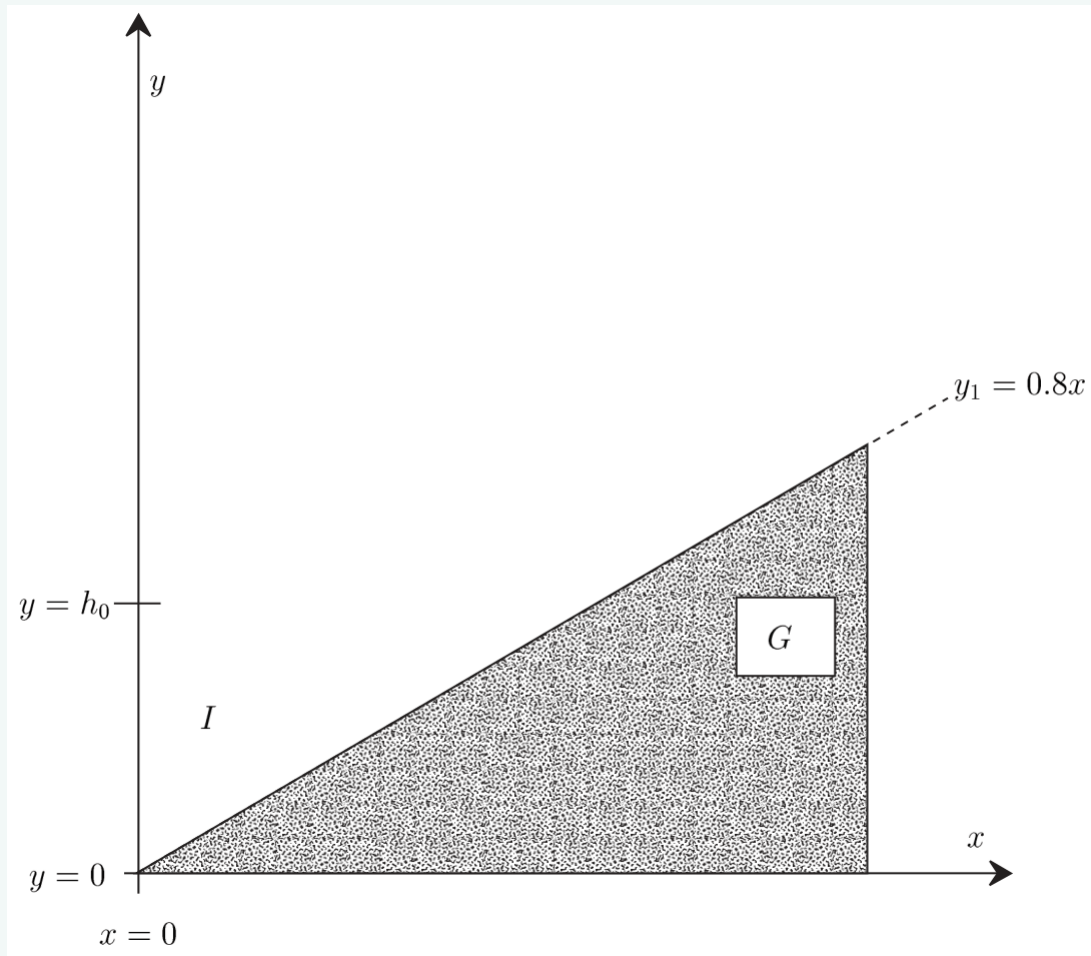


Figura 2.2: Sección transversal de un casquete de hielo templado que descansa sobre un terreno inclinado, con agua en equilibrio en su base. G : terreno, I : casquete de hielo.

se alcanza el equilibrio hidrostático y el agua se acumula sobre la intrusión en lugar de evacuarse.

Una vez alcanzado el equilibrio térmico, se pide determinar las siguientes magnitudes. Escriba las respuestas en la hoja de respuestas.

1. La altura H del vértice del cono de agua formado bajo el casquete de hielo, con respecto a la base original del casquete de hielo.
2. La altura h_1 de la intrusión.
3. La masa total m_{tot} del agua producida y la masa m' del agua que se evacua.

Represente a escala, en una hoja de respuestas para gráficas, las formas de la intrusión de roca y de la masa de agua restante. Utilice el sistema de coordenadas sugerido en la Figura 2.4.

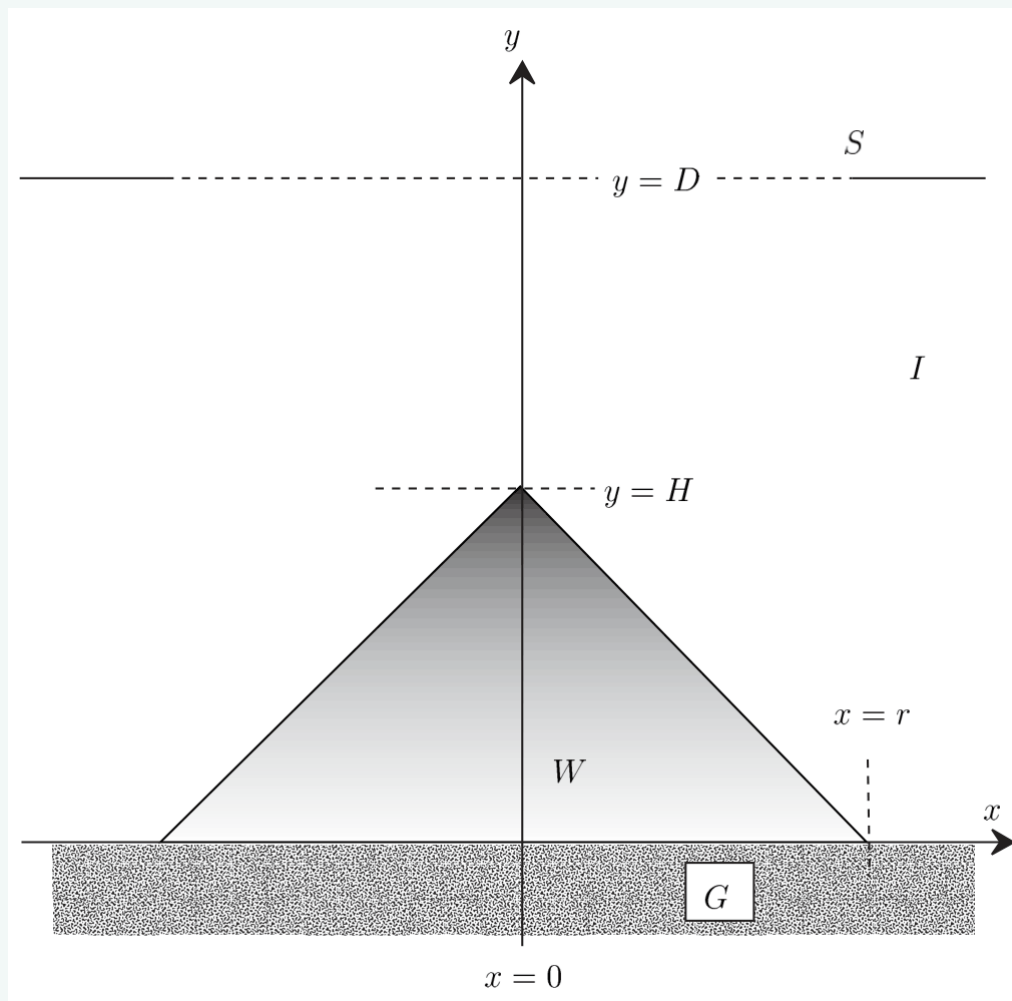


Figura 2.3: Sección vertical por el plano medio de un cono de agua en el interior de un casquete de hielo. S : superficie, W : agua, G : terreno, I : casquete de hielo.

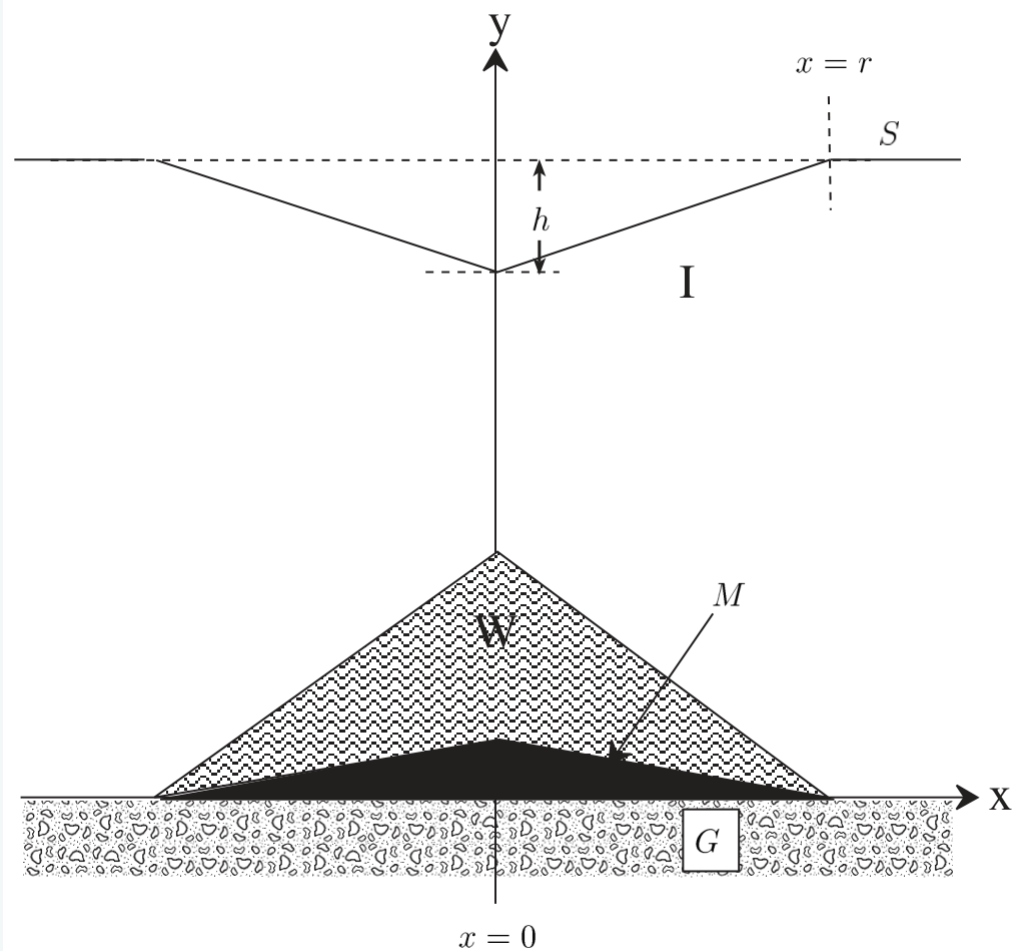


Figura 2.4: Sección transversal vertical y central de una depresión cónica en un casquete de hielo templado. S : superficie, G : terreno, I : casquete de hielo, M : intrusión de roca/magma, W : agua. Observe que la figura NO está dibujada a escala.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **a)** El espesor que se funde cada año es

$$d \simeq 6.1 \times 10^{-3} \text{ m} = 6.1 \text{ mm.}$$

- **b)** Con una presión atmosférica uniforme p_a ,

$$p(x) - p_a = \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

La ausencia de flujo requiere

$$\tan \beta = s \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \simeq -0.09051.$$

Para la gráfica solicitada, con ambas coordenadas en kilómetros,

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.07241x.$$

Las rectas se cortan aproximadamente en (2.293, 1.834) km.

- c) Sea R la distancia horizontal al eje del cono. La superficie es

$$y_s(R) = \begin{cases} D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r}\right), & 0 \leq R \leq r, \\ D, & R \geq r. \end{cases}$$

Es una depresión cónica de radio 1.0 km y profundidad aproximada de 91 m. Su altura en el centro es de 1.9095 km sobre el lecho.

- d), 1.

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} \simeq 1.10 \times 10^3 \text{ m.}$$

- d), 2.

$$h_1 \simeq 103 \text{ m.}$$

El volumen de la intrusión es aproximadamente $2.7 \times 10^7 \text{ m}^3$.

- d), 3.

$$m_{tot} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ kg}, \quad m' \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ kg.}$$

Escapa aproximadamente el 9.3% del agua de fusión. Para la gráfica, defina $f(x) = 1 - |x|/(500 \text{ m})$ para $|x| \leq 500 \text{ m}$. La superficie de la roca y la interfaz agua-hielo son

$$y_M = (102.8 \text{ m})f(x), \quad y_W = (1104.8 \text{ m})f(x).$$

El agua ocupa la región comprendida entre estas dos superficies.

Solución

a) Fusión anual

El hielo ya se encuentra en su punto de fusión, por lo que el calor geotérmico suministrado se emplea como calor latente. Para un área horizontal A , la conservación de la energía durante un año da

$$J_Q A t = \rho_i A d L_i.$$

Por tanto,

$$d = \frac{J_Q t}{\rho_i L_i}.$$

Tomando un año como $365 \times 24 \times 3600 = 3.1536 \times 10^7 \text{ s}$,

$$d = \frac{0.06(3.1536 \times 10^7)}{(917)(3.4 \times 10^5)} = 6.069 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

Por tanto, cada año se funden aproximadamente 6.1 mm de hielo. No se necesita el calor específico del hielo porque no es necesario calentarlo previamente.

b) Presión y condición para que no haya flujo de agua

El espesor vertical del hielo es

$$h_i(x) = y_2 - y_1 = h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha).$$

Según el modelo indicado, la presión en la base es igual a la presión atmosférica más el peso del hielo situado encima por unidad de área horizontal:

$$p(x) = p_a + \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

Si la presión se mide con respecto a la atmosférica, se omite el término p_a .

Para el agua en reposo, el equilibrio hidrostático requiere

$$p + \rho_w g y = \text{constante}.$$

A lo largo de la delgada capa de agua, $y = y_1(x)$, por lo que la condición de ausencia de flujo es

$$\frac{dp}{dx} + \rho_w g \frac{dy_1}{dx} = 0.$$

Sustituyendo la presión y la pendiente del terreno,

$$\rho_i g (\tan \beta - \tan \alpha) + \rho_w g \tan \alpha = 0.$$

En consecuencia,

$$\tan \beta = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i}.$$

Numéricamente,

$$s = \frac{917 - 1000}{917} = -0.0905125.$$

El signo negativo significa que la superficie del hielo debe descender en la dirección en la que asciende el terreno.

Para $y_1 = 0.8x$ y $h_0 = 2$ km,

$$\tan \beta = (-0.0905125)(0.8) = -0.0724100,$$

lo que da, con x e y en kilómetros,

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.0724100x.$$

Dibuje el terreno como una recta ascendente que pasa por el origen y la superficie del hielo como una recta ligeramente descendente que pasa por $(0, 2)$. Algunas coordenadas útiles para la representación son:

x (km)	Terreno y_1 (km)	Superficie del hielo y_2 (km)
0	0	2.000
1.000	0.800	1.928
2.000	1.600	1.855
2.2925	1.834	1.834

Para $x \geq 0$, el hielo se encuentra entre estas rectas hasta su intersección.

c) Superficie sobre una masa de agua cónica

Sea $z(R)$ la altura de la interfaz hielo-agua sobre el lecho horizontal:

$$z(R) = H \left(1 - \frac{R}{r} \right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

En el borde, el espesor del agua tiende a cero y el hielo conserva su espesor original D . Por tanto, la presión del agua al nivel del lecho es

$$p_b = p_a + \rho_i g D.$$

El equilibrio hidrostático da la presión a la altura z :

$$p_w(z) = p_a + \rho_i g D - \rho_w g z.$$

La columna de hielo situada sobre ese punto tiene un espesor $y_s - z$ y, por tanto, ejerce una presión

$$p_i = p_a + \rho_i g (y_s - z).$$

Igualando las presiones en la interfaz hielo-agua,

$$\rho_i (y_s - z) = \rho_i D - \rho_w z.$$

Por tanto,

$$y_s = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} z.$$

Al sustituir la interfaz cónica se obtiene

$$y_s(R) = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r} \right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

Fuera de la proyección horizontal del cono, $y_s = D$. La profundidad de la depresión es

$$\delta = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H = \frac{83}{917} (1000 \text{ m}) = 90.51 \text{ m}.$$

Por tanto, la superficie es un cono invertido de radio 1.0 km, que se une de forma continua con la superficie horizontal circundante. Su punto más bajo es

$$y_s(0) = 2000 - 90.51 = 1909.49 \text{ m}.$$

Para una sección vertical central, tome $R = |x|$. Con las coordenadas en kilómetros, una

$$(-1.000, 2.000), \quad (0, 1.90949), \quad (1.000, 2.000)$$

mediante segmentos rectos y continúe horizontalmente a $y = 2.000$ km a ambos lados. Al girar este perfil alrededor del eje vertical se obtiene la depresión de la superficie.

d) Intrusión volcánica

Sea

$$f(R) = 1 - \frac{R}{r}, \quad 0 \leq R \leq r,$$

donde $r = 500$ m. La superficie final, la interfaz agua-hielo y la superficie de la roca tienen las formas

$$y_s = D - hf(R), \quad y_W = Hf(R), \quad y_M = h_1 f(R).$$

Aquí $D = 2000$ m y $h = 100$ m.

1. Altura del vértice del cono de agua

La relación hidrostática obtenida en el apartado c se aplica de nuevo:

$$D - y_s = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} y_W.$$

En el centro,

$$h = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H.$$

Por tanto,

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} = \frac{917(100)}{83} = 1104.82 \text{ m.}$$

Esta altura se mide desde el lecho original. La profundidad real del agua en el centro será $H - h_1$.

2. Altura de la intrusión

Determine primero cuánto hielo se ha fundido. El espesor final del hielo en una columna vertical es

$$y_s - y_w = D - (h + H)f(R).$$

Como el hielo solo se mueve verticalmente, cada columna pierde un espesor de hielo

$$(h + H)f(R).$$

La elevación inicial causada por el magma no modifica la cantidad de hielo de una columna. Por tanto, el volumen total de hielo fundido es

$$V_{\text{melt}} = \int_0^r (h + H) \left(1 - \frac{R}{r}\right) 2\pi R dR = \frac{\pi r^2}{3} (h + H).$$

Escribamos

$$C = \frac{\pi r^2}{3}.$$

Entonces

$$m_{\text{tot}} = \rho_i C(h + H), \quad V_M = Ch_1, \quad m_M = \rho_r Ch_1.$$

En el equilibrio térmico final, la roca y la mezcla de hielo y agua están a 0°C . Cada kilogramo de magma libera

$$q_M = L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0) = 4.2 \times 10^5 + 700(1200) = 1.26 \times 10^6 \text{ J/kg}.$$

Esto incluye tanto la solidificación como el enfriamiento. Despreciando las pérdidas de calor y las pequeñas variaciones de energía mecánica, la conservación de la energía da

$$\rho_r Ch_1 q_M = \rho_i C(h + H)L_i.$$

Por tanto,

$$h_1 = \frac{\rho_i (h + H)L_i}{\rho_r [L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

La relación hidrostática también implica

$$\rho_i (h + H) = \rho_w H,$$

por lo que, de forma equivalente,

$$h_1 = \frac{\rho_w H L_i}{\rho_r [L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

Numéricamente,

$$h_1 = \frac{1000(1104.819)(3.4 \times 10^5)}{2900(1.26 \times 10^6)} = 102.80 \text{ m} \simeq 103 \text{ m.}$$

En consecuencia, el volumen de la intrusión es

$$V_M = \frac{\pi(500)^2}{3}(102.802) = 2.691 \times 10^7 \text{ m}^3.$$

3. Producción total de agua y agua que escapa

A partir del volumen de hielo fundido,

$$m_{tot} = \rho_i C(h + H) = \rho_w CH.$$

Por tanto,

$$m_{tot} = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3}(1104.819) = 2.8924 \times 10^{11} \text{ kg} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

El agua restante ocupa el espacio entre el cono de la interfaz agua-hielo y el cono de roca. Su volumen es

$$V_{\text{remaining}} = C(H - h_1),$$

y su masa es

$$m_{\text{remaining}} = \rho_w C(H - h_1) = 2.6233 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

Por tanto, la conservación de la masa da

$$\begin{aligned} m' &= m_{tot} - m_{\text{remaining}} \\ &= \rho_w CH - \rho_w C(H - h_1) \\ &= \rho_w Ch_1. \end{aligned}$$

Así pues,

$$m' = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3}(102.802) = 2.6914 \times 10^{10} \text{ kg} \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ kg}.$$

El volumen de agua que escapa es igual al volumen de la intrusión:

$$\frac{m'}{\rho_w} = V_M.$$

Esto también explica las dos etapas. Inicialmente, el magma eleva el hielo sin reducir su espesor, por lo que el agua sobre la superficie elevada de la roca tiene un exceso de presión hidráulica y se evacua. Al final de esta etapa de drenaje, la interfaz hielo-agua coincide aproximadamente con la superficie de la roca $h_1 f(R)$. El equilibrio hidrostático requiere entonces un espesor de hielo

$$D - \frac{\rho_w}{\rho_i} h_1 f(R).$$

El hielo fundido hasta ese momento tiene una masa $\rho_w Ch_1$, exactamente la masa evacuada calculada anteriormente. La fusión posterior produce la masa de agua retenida.

Descripción de la gráfica

Para una sección vertical central, utilice $R = |x|$. Dentro de $|x| \leq 500 \text{ m}$,

$$y_M(x) = 102.802 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m},$$

$$y_W(x) = 1104.819 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m},$$

$$y_s(x) = 2000 - 100 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m},$$

donde x se expresa numéricamente en metros.

Utilice las siguientes coordenadas y una los puntos adyacentes mediante líneas rectas:

x (m)	Superficie de la roca y_M (m)	Interfaz agua-hielo y_W (m)	Superficie del hielo y_s (m)
-500	0	0	2000
-250	51.4	552.4	1950
0	102.8	1104.8	1900
250	51.4	552.4	1950
500	0	0	2000

Dibuje el lecho original a lo largo de $y = 0$, sombree la intrusión entre el lecho e y_M , y sombree el agua entre y_M e y_W . El hielo se encuentra entre y_W e y_s . Fuera de la proyección horizontal del cono, el lecho permanece en $y = 0$ y la superficie del hielo en $y = 2000$ m.

Utilizando la misma escala de longitud en ambos ejes, la intrusión tiene solo unos 103 m de altura, mientras que la interfaz del agua alcanza unos 1105 m. La profundidad del agua en el centro es

$$H - h_1 \simeq 1002 \text{ m},$$

y el hielo restante directamente encima tiene un espesor de unos 795 m.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: ¿Más rápido que la luz?

En este problema analizamos e interpretamos mediciones realizadas en 1994 de la emisión de ondas de radio de una fuente compuesta situada en nuestra galaxia.

El receptor estaba sintonizado a una banda ancha de ondas de radio con longitudes de onda de varios centímetros. La figura 3.1 muestra una serie de imágenes registradas en distintos momentos. Las curvas de nivel indican una intensidad de radiación constante, de manera muy similar a las curvas de nivel de altitud de un mapa geográfico. En la figura, los dos máximos se interpretan como dos objetos que se alejan de un centro común señalado mediante cruces en las imágenes. (El centro, que se supone fijo en el espacio, también es un potente emisor de radiación, aunque principalmente en otras longitudes de onda). Las mediciones de las distintas fechas se realizaron a la misma hora del día.

La escala de la figura viene dada por un segmento que representa un segundo de arco (as). (1 as = 1/3600 de grado). Se estima que la distancia al cuerpo celeste situado en el centro de la figura, indicado mediante cruces, es $R = 12.5$ kpc. Un kilopársec (kpc) equivale a $3.09 \cdot 10^{19}$ m. La velocidad de la luz es $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s. No se requieren cálculos de errores en la solución.

a) (2 puntos) Denotamos las posiciones angulares de los dos emisores de radio expulsados, respecto al centro común, mediante $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, donde los subíndices 1 y 2 se refieren al de la izquierda y al de la derecha, respectivamente, y t es el instante de observación. Las velocidades angulares, vistas desde la Tierra, son ω_1 y ω_2 . Las correspondientes velocidades lineales transversales aparentes de las dos fuentes se denotan mediante $v'_{1,\perp}$ y $v'_{2,\perp}$.

Utilizando la figura 3.1, elabore una gráfica para hallar los valores numéricos de ω_1 y ω_2 en milisegundos de arco por día (mas/d). Determine también los valores numéricos de $v'_{1,\perp}$ y $v'_{2,\perp}$, y escriba todas las respuestas en la hoja de respuestas. (Algunos de los resultados pueden resultarle desconcertantes).

b) (3 puntos) Para resolver la paradoja que surge en el apartado (a), considere una fuente de luz que se mueve con velocidad $\vec{v}$ formando un ángulo ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) con la dirección hacia un observador lejano O (figura 3.2). El módulo de la velocidad puede escribirse como $v = \beta c$, donde c es la velocidad de la luz. La distancia a la fuente, medida por el observador, es R . La velocidad angular de la fuente, vista por el observador, es ω , y la velocidad lineal aparente perpendicular a la línea de visión es $v'_\perp$.

Halle ω y $v'_\perp$ en función de β , R y ϕ , y escriba su respuesta en la hoja de respuestas.

c) (1 punto) Suponemos que los dos objetos expulsados, descritos en la introducción y en el apartado (a), se mueven en sentidos opuestos con velocidades de igual módulo $v = \beta c$. Entonces, los resultados del apartado (b) permiten calcular β y ϕ a partir de las velocidades angulares ω_1 y ω_2 y de la distancia R . Aquí, ϕ es el ángulo definido en el apartado (b) para el objeto de la izquierda, que corresponde al subíndice 1 del apartado (a).

Deduzca fórmulas para β y ϕ en función de las magnitudes conocidas y determine sus valores numéricos a partir de los datos del apartado (a). Escriba sus respuestas en los espacios correspondientes de la hoja de respuestas.

d) (2 puntos) En la situación de un solo cuerpo del apartado (b), halle la condición para que la velocidad perpendicular aparente $v'_\perp$ sea mayor que la velocidad de la luz c .

⁷ Autores: Einar Gudmundsson, Knútur Árnason y Thorsteinn Vilhjálmsson

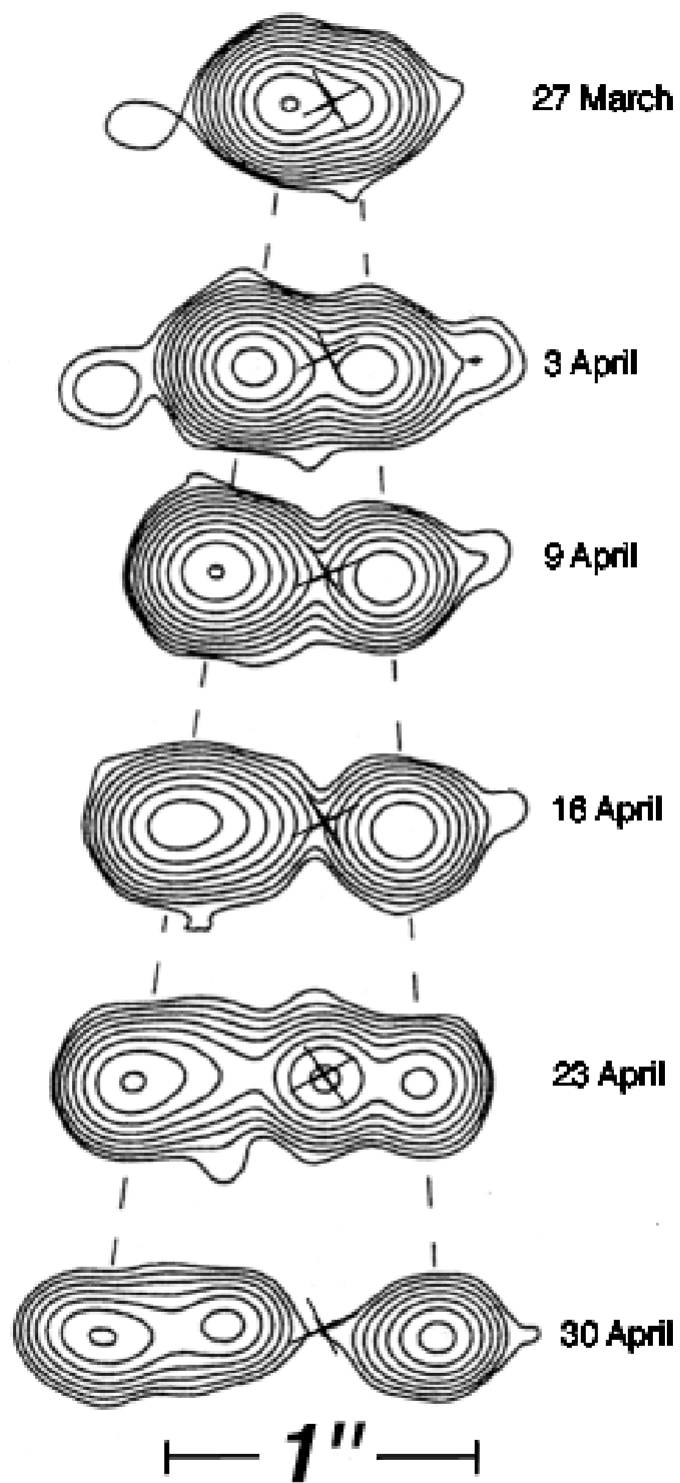


Figura 3.1: Emisión de radio de una fuente de nuestra galaxia.

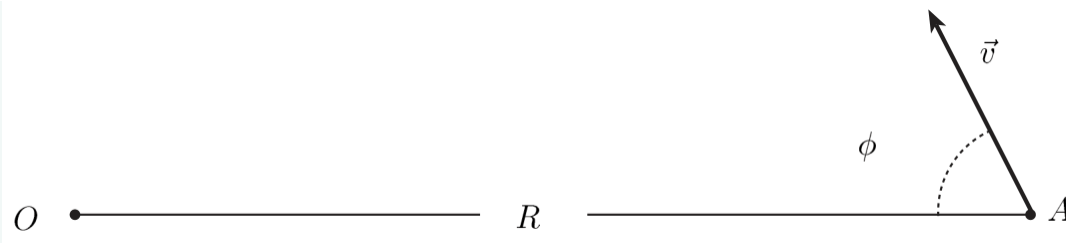


Figura 3.2: El observador está en O y la posición inicial de la fuente de luz es A . El vector velocidad es $\vec{v}$.

Escriba la condición en la forma $\beta > f(\phi)$ y proporcione una expresión analítica de la función f en la hoja de respuestas.

Dibuje en la hoja de respuestas para gráficas la región físicamente pertinente del plano (β, ϕ) . Indique mediante sombreado en qué parte de esta región se cumple la condición $v'_{\perp} > c$.

e) (1 punto) Siguiendo con la situación de un solo cuerpo del apartado (b), halle una expresión para el valor máximo $(v'_{\perp})_{\max}$ de la velocidad perpendicular aparente $v'_{\perp}$ para un β dado y escríbala en el espacio correspondiente de la hoja de respuestas. Observe que esta velocidad aumenta sin límite cuando $\beta \rightarrow 1$.

f) (1 punto) La estimación de R dada en la introducción no es muy fiable. Por ello, los científicos han empezado a plantearse un método mejor y más directo para determinar R . Una de las ideas es la siguiente. Suponga que podemos identificar y medir las longitudes de onda λ_1 y λ_2 , desplazadas por el efecto Doppler, de la radiación de los dos objetos expulsados, correspondientes a una misma longitud de onda original conocida λ_0 en los sistemas de referencia en reposo de los objetos.

Partiendo de las ecuaciones del desplazamiento Doppler relativista,

$\lambda = \lambda_0(1 - \beta \cos \phi)(1 - \beta^2)^{-1/2}$, y suponiendo, como antes, que ambos objetos tienen velocidades de igual módulo v , demuestre que la incógnita $\beta = v/c$ puede expresarse en función de λ_0 , λ_1 , y λ_2 como

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}. \quad (3.1)$$

Escriba el valor numérico del coeficiente α en el espacio correspondiente de la hoja de respuestas.

Observe que esto significa que las mediciones de longitudes de onda propuestas proporcionarán, en la práctica, una nueva estimación de la distancia.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **a)** Unos valores gráficos representativos son

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

Por consiguiente,

$$v'_{1,\perp} \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c, \quad v'_{2,\perp} \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

- **b)**

$$\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}, \quad v'_\perp = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

- **c)** Con las velocidades angulares expresadas en radianes por unidad de tiempo, definimos

$$X = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad Y = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

Entonces

$$\beta = \sqrt{X^2 + Y^2} \simeq 0.92, \quad \phi = \arccos\left(\frac{X}{\beta}\right) \simeq 70^\circ.$$

El objeto de la izquierda se está acercando.

- **d)** La región superlumínica es

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.$$

Por tanto, $f(\phi) = 1/(\sin \phi + \cos \phi)$ en el intervalo angular pertinente. Este movimiento requiere $\beta > 1/\sqrt{2}$.

- **e)**

$$(v'_\perp)_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

- **f)**

$$\alpha = 4, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}.$$

Solución

a) Movimientos angulares y velocidades transversales aparentes

Tomamos $t = 0$ el 27 de marzo. Medimos la distancia angular de cada componente a la cruz de su propia imagen, utilizando la longitud completa de la escala marcada como $1'' = 1000 \text{ mas}$. Seguimos los dos componentes que se alejan del centro, indicados por las trayectorias discontinuas. Utilizamos distancias angulares positivas a ambos lados del centro.

Las lecturas aproximadas de la figura proporcionada son:

Fecha	t (días)	θ_1 (segundos de arco)	θ_2 (segundos de arco)
27 de marzo	0	0.12	0.07
3 de abril	7	0.22	0.14
9 de abril	13	0.35	0.20
16 de abril	20	0.46	0.26
23 de abril	27	0.61	0.31
30 de abril	34	0.70	0.38

Representamos t en el eje horizontal y la distancia angular en el vertical. Cada conjunto de puntos se sitúa aproximadamente sobre una recta; el componente de la izquierda tiene la mayor pendiente. Unas rectas representativas son

$$\frac{\theta_1}{\text{arcsec}} \simeq 0.11 + 0.0175 \frac{t}{\text{d}}, \quad \frac{\theta_2}{\text{arcsec}} \simeq 0.08 + 0.0090 \frac{t}{\text{d}}.$$

Así, sus ordenadas en el origen son aproximadamente $0.11''$ y $0.08''$, y sus pendientes dan

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

Los ángulos son extremadamente pequeños, por lo que el desplazamiento transversal correspondiente a un desplazamiento angular θ es $R\theta$. Por consiguiente,

$$v'_{i,\perp} = R\omega_i,$$

donde ω_i debe expresarse en radianes por segundo. Las conversiones necesarias son

$$R = 12.5(3.09 \times 10^{19}) = 3.8625 \times 10^{20} \text{ m},$$

$$1 \text{ mas} = \frac{\pi}{180 \times 3600 \times 1000} \text{ rad} = 4.8481 \times 10^{-9} \text{ rad},$$

y, por tanto,

$$1 \text{ mas/d} = 5.6113 \times 10^{-14} \text{ rad/s}.$$

A la distancia indicada, 1 mas/d corresponde a

$$R(5.6113 \times 10^{-14}) = 2.1674 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

Por tanto,

$$v'_{1,\perp} \simeq 17.5(2.1674 \times 10^7) \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c,$$

$$v'_{2,\perp} \simeq 9.0(2.1674 \times 10^7) \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

El primer valor supera c . Estas velocidades se calculan utilizando el intervalo de tiempo entre las **llegadas** de las señales a la Tierra; ese intervalo difiere del intervalo entre sus emisiones.

b) Efecto del tiempo de propagación de la luz

Trabajamos en el sistema de referencia inercial en el que el observador y la fuente central están en reposo. Sean dos señales emitidas con un intervalo de tiempo Δt_e entre ellas en este sistema.

Durante este intervalo, el emisor recorre una distancia transversal

$$\Delta x_{\perp} = v \sin \phi \Delta t_e.$$

Su desplazamiento hacia el observador es

$$\Delta x_{\parallel} = v \cos \phi \Delta t_e.$$

Para un observador lejano, el recorrido de la segunda señal es más corto en aproximadamente $\Delta x_{\parallel}$. Por tanto, el intervalo entre los instantes de llegada es

$$\Delta t_{\text{obs}} = \Delta t_e - \frac{\Delta x_{\parallel}}{c} = (1 - \beta \cos \phi) \Delta t_e.$$

La misma expresión es válida para una fuente que se aleja: en ese caso, $\cos \phi < 0$, por lo que la segunda señal recorre una distancia mayor.

En la aproximación de ángulos pequeños, el desplazamiento angular es

$$\Delta \theta \simeq \frac{\Delta x_{\perp}}{R}.$$

Así,

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t_{\text{obs}}} = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}$$

y

$$v'_{\perp} = R\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

Aquí, el desplazamiento de la fuente es despreciable frente a R , lo que permite tratar R y ϕ como constantes durante las observaciones.

Para un emisor que se acerca, las señales sucesivas llegan con un intervalo menor que el que separa sus emisiones. Dividir el desplazamiento transversal por este intervalo reducido puede dar $v'_{\perp} > c$, aunque la velocidad real del emisor sigue siendo $v = \beta c < c$.

c) Obtención de la velocidad y la dirección reales

Las dos direcciones forman ángulos ϕ y $\pi - \phi$ con la dirección hacia el observador. Los módulos de sus velocidades transversales son iguales, mientras que sus componentes radiales tienen signos opuestos. Por tanto,

$$\frac{R\omega_1}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}, \quad \frac{R\omega_2}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 + \beta \cos \phi}.$$

Definimos

$$X = \beta \cos \phi, \quad Y = \beta \sin \phi.$$

Entonces

$$\omega_1(1 - X) = \omega_2(1 + X) = \frac{cY}{R}.$$

Al igualar las dos primeras expresiones se obtiene

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Al sustituir en cualquiera de las ecuaciones de las velocidades angulares se obtiene

$$Y = \beta \sin \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

Por consiguiente,

$$\beta = \frac{\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (2R\omega_1\omega_2/c)^2}}{\omega_1 + \omega_2}$$

y una expresión válida en todo el intervalo $0 \leq \phi \leq \pi$ es

$$\phi = \arccos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta(\omega_1 + \omega_2)} \right].$$

En estas observaciones, $\omega_1 > \omega_2$, por lo que ϕ es agudo. También podemos utilizar

$$\tan \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 - \omega_2)}.$$

Utilizando las velocidades angulares representativas de (a),

$$\begin{aligned} X &\simeq \frac{17.5 - 9.0}{17.5 + 9.0} \simeq 0.321, \\ Y &\simeq 0.859. \end{aligned}$$

Así,

$$\beta \simeq \sqrt{0.321^2 + 0.859^2} \simeq 0.917, \quad \phi \simeq 69.5^\circ.$$

Con la precisión que permite la gráfica,

$$\beta \simeq 0.92, \quad \phi \simeq 70^\circ.$$

La velocidad real es aproximadamente 2.8×10^8 m/s. Como $\beta \cos \phi > 0$, el componente de la izquierda se acerca y el de la derecha se aleja.

d) Condición y región del movimiento superlumínico aparente

Para un emisor material, $0 \leq \beta < 1$. Por tanto, $1 - \beta \cos \phi > 0$, y la condición $v'_\perp > c$ se convierte en

$$\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} > 1,$$

o bien

$$\beta(\sin \phi + \cos \phi) > 1.$$

Para $\phi \geq \pi/2$, el denominador de $v'_\perp/c$ es al menos uno, mientras que su numerador es como máximo $\beta < 1$. Por tanto, el movimiento superlumínico aparente es imposible para una fuente que se aleja o cuyo movimiento es exactamente transversal. También es imposible para $\phi = 0$, donde el movimiento transversal se anula.

En el intervalo pertinente $0 < \phi < \pi/2$,

$$\beta > f(\phi), \quad f(\phi) = \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi}.$$

La condición física completa es, por tanto,

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.$$

Para el diagrama solicitado, la región físicamente pertinente cumple

$$0 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Con ϕ en el eje horizontal y β en el vertical, dibujamos la curva umbral en $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Algunos puntos útiles son:

ϕ	$f(\phi)$
0	1
$\pi/6$	0.732
$\pi/4$	$1/\sqrt{2} \simeq 0.707$
$\pi/3$	0.732
$\pi/2$	1

La curva es simétrica respecto a $\phi = \pi/4$. Desciende desde 1 hasta su mínimo $1/\sqrt{2}$ y luego asciende hasta 1. Sombreamos la región situada estrictamente por encima de esta curva y estrictamente por debajo de $\beta = 1$. En la propia curva umbral se cumple $v'_\perp = c$, por lo que queda excluida del sombreado. No se sombrea ninguna región con $\phi \geq \pi/2$.

Como

$$\sin \phi + \cos \phi = \sqrt{2} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2},$$

esta región solo existe cuando

$$\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

De forma equivalente, para cualquier valor fijo $\beta > 1/\sqrt{2}$, su extensión angular es

$$\left|\phi - \frac{\pi}{4}\right| < \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\beta}\right).$$

e) Velocidad transversal aparente máxima

Para un valor fijo $0 < \beta < 1$, derivamos el resultado de (b):

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{v'_\perp}{c}\right) = \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}\right) = \frac{\beta(\cos \phi - \beta)}{(1 - \beta \cos \phi)^2}.$$

La derivada pasa de positiva a negativa donde

$$\cos \phi = \beta.$$

Como la velocidad transversal aparente se anula tanto en $\phi = 0$ como en $\phi = \pi$, este punto estacionario es el máximo global. En ese ángulo,

$$\sin \phi = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad 1 - \beta \cos \phi = 1 - \beta^2.$$

Por tanto,

$$(v'_\perp)_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

Cuando $\beta \rightarrow 1^-$, el denominador tiende a cero y la velocidad aparente máxima aumenta sin límite. Para $\beta = 0$, la velocidad aparente es cero en todos los ángulos.

f) Determinación de β a partir de los desplazamientos Doppler

Sea

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Para el primer objeto, la fórmula Doppler dada es

$$\lambda_1 = \lambda_0 \gamma (1 - \beta \cos \phi).$$

Para el objeto que se mueve en sentido opuesto, $\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$, lo que da

$$\lambda_2 = \lambda_0 \gamma (1 + \beta \cos \phi).$$

Al sumar estas expresiones se elimina la dirección:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0 \gamma = \frac{2\lambda_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Así,

$$1 - \beta^2 = \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2},$$

y, tomando el módulo no negativo de la velocidad,

$$\boxed{\beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}, \quad \alpha = 4.}$$

Esto también explica cómo podría obtenerse la distancia. Los movimientos angulares determinan

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2},$$

mientras que las longitudes de onda determinan β . Por tanto, $\beta \sin \phi = \sqrt{\beta^2 - X^2}$, y la relación deducida en (c) da

$$R = \frac{c(\omega_1 + \omega_2)}{2\omega_1\omega_2} \sqrt{\beta^2 - X^2}.$$

Así, las mediciones combinadas de posiciones angulares y longitudes de onda determinan R sin adoptar su estimación inicial.

La solución se comprobó con la solución oficial.