

IPhO 1998

Theorieaufgaben und Lösungen · Reykjavík, Island · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ippo/1998/

Aufgabe 1: Rollen eines hexagonalen Prismas

Betrachten Sie ein langes, massives, starres Prisma mit regelmäßigem sechseckigem Querschnitt, wie es etwa ein gewöhnlicher Bleistift aufweist (Abbildung 1.1). Die Masse des Prismas beträgt M und ist gleichmäßig verteilt. Die Seitenlänge des sechseckigen Querschnitts beträgt a . Das Trägheitsmoment I des hexagonalen Prismas bezüglich seiner Mittelachse ist

$$I = \frac{5}{12}Ma^2 \quad (1.1)$$

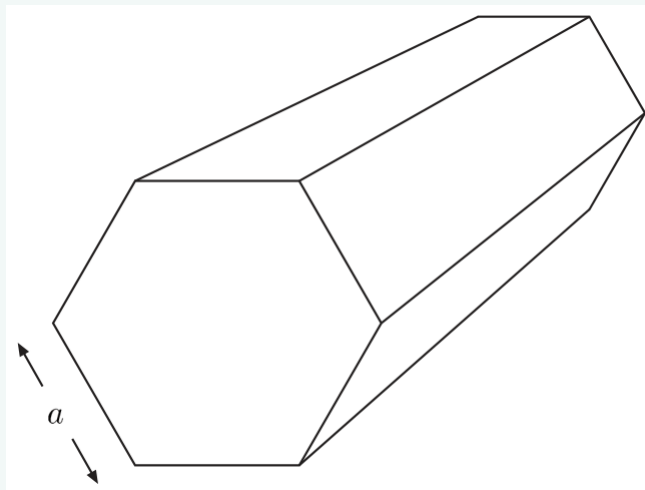


Abbildung 1.1: Ein massives Prisma mit dem Querschnitt eines regelmäßigen Sechsecks.

Das Trägheitsmoment I' bezüglich einer Kante des Prismas ist

$$I' = \frac{17}{12}Ma^2 \quad (1.2)$$

a) (3.5 Punkte) Das Prisma ruht zunächst mit horizontaler Achse auf einer schiefen Ebene, die mit der Horizontalen einen kleinen Winkel θ bildet (Abbildung 1.2). Nehmen Sie an, dass die Seitenflächen des Prismas leicht konkav sind, sodass das Prisma die Ebene nur an seinen Kanten berührt. Der Einfluss dieser Konkavität auf das Trägheitsmoment kann vernachlässigt werden. Das Prisma wird nun aus seiner Ruhelage ausgelenkt und beginnt, ungleichmäßig die Ebene hinabzurollen. Nehmen Sie an, dass die Reibung jegliches Gleiten verhindert und dass das Prisma den Kontakt mit der Ebene nicht verliert. Die Winkelgeschwindigkeit unmittelbar bevor eine bestimmte Kante auf die Ebene auftrifft, ist ω_i , während ω_f die Winkelgeschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß ist.

Zeigen Sie, dass sich die Beziehung

$$\omega_f = s\omega_i \quad (1.3)$$

schreiben lässt, und tragen Sie den Wert des Koeffizienten s auf dem Antwortbogen ein.

Autoren: Leó Kristjánsson und Thorsteinn Vilhjálmsson

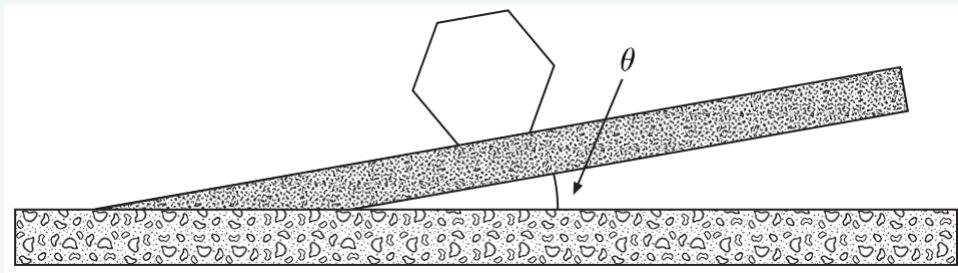


Abbildung 1.2: Ein hexagonales Prisma auf einer schiefen Ebene.

b) (1 Punkt) Entsprechend sind die kinetischen Energien des Prismas unmittelbar vor und nach dem Stoß K_i und K_f .

Zeigen Sie, dass sich die Beziehung

$$K_f = rK_i \quad (1.4)$$

schreiben lässt, und tragen Sie den Wert des Koeffizienten r auf dem Antwortbogen ein.

c) (1.5 Punkte) Damit der nächste Stoß stattfinden kann, muss K_i einen Mindestwert $K_{i,min}$ überschreiten, der sich in der Form

$$K_{i,min} = \delta Mga \quad (1.5)$$

schreiben lässt, wobei $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung ist.

Bestimmen Sie den Koeffizienten δ in Abhängigkeit vom Neigungswinkel θ und vom Koeffizienten r . Tragen Sie Ihre Antwort auf dem Antwortbogen ein. (Verwenden Sie das algebraische Symbol r , nicht seinen Zahlenwert.)

d) (2 Punkte) Wenn die Bedingung aus Teil (c) erfüllt ist, nähert sich die kinetische Energie K_i einem festen Wert $K_{i,0}$, während das Prisma die schiefe Ebene hinabrollt.

Zeigen Sie unter der Voraussetzung, dass der Grenzwert existiert, dass sich $K_{i,0}$ wie folgt schreiben lässt:

$$K_{i,0} = \kappa Mga \quad (1.6)$$

Tragen Sie den Koeffizienten κ in Abhängigkeit von θ und r auf dem Antwortbogen ein.

e) (2 Punkte) Berechnen Sie auf 0.1° genau den kleinsten Neigungswinkel θ_0 , bei dem das ungleichmäßige Rollen, nachdem es einmal begonnen hat, unbegrenzt anhält. Tragen Sie Ihr numerisches Ergebnis auf dem Antwortbogen ein.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- a) $s = \frac{11}{17} \approx 0.6471$.
- b) $r = \frac{121}{289} \approx 0.4187$.

- c) $\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}$.
- d) $\kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}$.
- e) $\theta_0 = 6.5724 \dots^\circ \approx \boxed{6.6^\circ}$.

Die Koeffizienten s, r, δ, κ sind dimensionslos.

Lösung

Wir behandeln jeden Stoß als augenblicklich und vernachlässigen dabei den Kraftstoß der Schwerkraft. Zwischen den Stößen dreht sich das Prisma um seine ruhende Auflagekante; die Kontaktkraft verrichtet keine Arbeit, sodass die mechanische Energie erhalten bleibt. Wir verwenden durchgehend die exakten trigonometrischen Funktionen.

a) Änderung der Winkelgeschwindigkeit beim Stoß

In einem Querschnitt bezeichne A die bisherige Auflagekante, B die nächste Kante, die auf die Ebene trifft, und C den Schwerpunkt. Für ein regelmäßiges Sechseck gilt

$$AC = BC = AB = a, \quad \angle ACB = 60^\circ.$$

Unmittelbar vor dem Stoß dreht sich das Prisma um A , sodass

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_i \times \overrightarrow{AC}.$$

Beim Stoß hebt die bisherige Kante ab, und die neue Kante wird zur Drehachse. Die stoßartige Kontaktkraft greift an B an, sodass der Drehimpuls bezüglich der ortsfesten Geraden, auf die B trifft, erhalten bleibt.

Vor dem Stoß setzt sich der Drehimpuls bezüglich B aus dem Drehimpuls der Rotation um den Schwerpunkt und dem Bahndrehimpuls des Schwerpunkts zusammen:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{B,i} &= I\boldsymbol{\omega}_i + \overrightarrow{BC} \times M\mathbf{v}_C \\ &= \left(I + M\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \boldsymbol{\omega}_i \\ &= \left(I + \frac{1}{2}Ma^2 \right) \boldsymbol{\omega}_i. \end{aligned}$$

Nach dem Stoß dreht sich das Prisma um B , woraus folgt:

$$\mathbf{L}_{B,f} = I'\boldsymbol{\omega}_f.$$

Somit gilt

$$\left(\frac{5}{12} + \frac{1}{2} \right) Ma^2 \boldsymbol{\omega}_i = \frac{17}{12} Ma^2 \boldsymbol{\omega}_f,$$

und daher

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_f = \frac{11}{17} \boldsymbol{\omega}_i}, \quad \boxed{s = \frac{11}{17}}.$$

b) Änderung der kinetischen Energie beim Stoß

Unmittelbar vor und nach dem Stoß ist die Bewegung eine reine Rotation um eine ruhende Kante. Bezüglich beider Kanten ist das Trägheitsmoment gleich I' , sodass

$$K_i = \frac{1}{2} I' \omega_i^2, \quad K_f = \frac{1}{2} I' \omega_f^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{K_f}{K_i} = \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 = s^2.$$

Damit ergibt sich

$$\boxed{K_f = \frac{121}{289} K_i}, \quad \boxed{r = \frac{121}{289}}.$$

c) Für den nächsten Stoß erforderliche Mindestenergie

Nach dem Stoß an B muss der Schwerpunkt ansteigen, bis er sich senkrecht über B befindet, und anschließend bis zum nächsten Stoß absinken.

Im Augenblick des Stoßes liegt C im senkrechten Abstand $\sqrt{3}a/2$ über der Ebene und um die Strecke $a/2$ hangaufwärts von B versetzt. Seine vertikale Höhe relativ zu B beträgt daher

$$h_{\text{start}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cos \theta + \frac{a}{2} \sin \theta = a \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right).$$

Für die hier betrachteten kleinen Neigungswinkel $0 \leq \theta < \pi/6$ erreicht der Schwerpunkt anschließend die maximale Höhe

$$h_{\text{top}} = a.$$

Die zu überwindende Barriere der potenziellen Energie im Schwerfeld beträgt

$$\Delta U = Mga \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right].$$

Die unmittelbar nach dem Stoß verfügbare kinetische Energie beträgt rK_i . Damit der Schwerpunkt den höchsten Punkt überschreitet und das Prisma die nächste Kante erreicht, muss gelten:

$$rK_i > \Delta U.$$

Damit beträgt der Schwellenwert der Energie vor dem Stoß

$$K_{i,\min} = \frac{Mga}{r} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right],$$

also

$$\boxed{\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}}.$$

Die Ungleichung ist strikt: Bei einer Energie, die genau dem Schwellenwert entspricht, nähert sich das Prisma der instabilen Gleichgewichtslage, ohne sie zu überschreiten.

d) Grenzwert der kinetischen Energie vor dem Stoß

Aufeinanderfolgende Stoßkonfigurationen sind bis auf eine Verschiebung um eine Seitenlänge a die Ebene hinab identisch. Daher verliert der Schwerpunkt zwischen den Stößen die vertikale Höhe $a \sin \theta$.

Sei E_n die kinetische Energie unmittelbar vor dem Stoß n . Der Stoß verringert sie auf rE_n , und die Schwerkraft führt bis zum folgenden Stoß die Energie $Mga \sin \theta$ zu. Für aufeinanderfolgende vollständig ausgeführte Schritte gilt daher

$$E_{n+1} = rE_n + Mga \sin \theta.$$

Mit dem vorausgesetzten Grenzübergang $E_n \rightarrow K_{i,0}$ folgt

$$K_{i,0} = rK_{i,0} + Mga \sin \theta.$$

Somit gilt

$$\boxed{K_{i,0} = \frac{Mga \sin \theta}{1 - r}}, \quad \boxed{\kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}}.$$

Tatsächlich ergibt die Rekursionsbeziehung

$$E_n = K_{i,0} + r^n(E_0 - K_{i,0}),$$

was wegen $0 < r < 1$ konvergiert, sofern das Prisma weiterhin jede Energiebarriere überwindet.

e) Kleinster Neigungswinkel für unbegrenzt anhaltendes Rollen

Falls $K_{i,0} < K_{i,\min}$, nimmt jede endliche Anfangsenergie schließlich so weit ab, dass das Prisma die nächste Barriere nicht mehr überwinden kann. Falls $K_{i,0} \geq K_{i,\min}$ und die Anfangsenergie die Bedingung $E_0 > K_{i,\min}$ erfüllt, bleibt gemäß der Rekursionsbeziehung jedes nachfolgende E_n bei endlicher Schrittzahl oberhalb des Schwellenwerts.

Der kritische Winkel ist daher bestimmt durch

$$K_{i,0} = K_{i,\min},$$

oder

$$\frac{\sin \theta_0}{1 - r} = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta_0)}{r}.$$

Einsetzen von $r = 121/289$ ergibt

$$121 \sin \theta_0 = 168 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta_0 \right) \right].$$

Mit dem Additionstheorem für den Kosinus folgt

$$205 \sin \theta_0 + 84\sqrt{3} \cos \theta_0 = 168.$$

Mit $t = \tan(\theta_0/2)$ wird daraus

$$(168 + 84\sqrt{3})t^2 - 410t + (168 - 84\sqrt{3}) = 0.$$

Die Lösung im physikalisch relevanten Intervall $0 < \theta_0 < 30^\circ$ ist

$$t = \frac{3(2 - \sqrt{3})}{14}.$$

Folglich gilt

$$\theta_0 = 2 \arctan \left[\frac{3(2 - \sqrt{3})}{14} \right] = 6.5723657 \dots^\circ,$$

und mit der geforderten Genauigkeit

$$\boxed{\theta_0 = 6.6^\circ}.$$

Beim kritischen Neigungswinkel ermöglicht eine Anfangsenergie, die strikt oberhalb des Schwellenwerts liegt, jeden nachfolgenden Schritt, obwohl das Prisma in der Nähe jeder instabilen Gleichgewichtslage zunehmend länger verweilt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Wasser unter einer Eiskappe

Eine Eiskappe ist eine mächtige Eisschicht (bis zu einigen km dick), die auf dem darunterliegenden Boden aufliegt und sich horizontal über einige zehn oder hundert km erstreckt. In dieser Aufgabe betrachten wir das Schmelzen von Eis und das Verhalten von Wasser unter einer temperierten Eiskappe, d. h. einer Eiskappe am Schmelzpunkt. Wir dürfen annehmen, dass das Eis unter diesen Bedingungen Druckänderungen wie eine viskose Flüssigkeit hervorruft, sich jedoch spröde verformt, hauptsächlich durch vertikale Bewegung. Für diese Aufgabe sind die folgenden Angaben gegeben.

Dichte von Wasser:	$\rho_w = 1.000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Dichte von Eis:	$\rho_i = 0.917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Spezifische Wärmekapazität von Eis:	$c_i = 2.1 \cdot 10^3 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$
Spezifische Schmelzwärme von Eis:	$L_i = 3.4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$
Dichte von Gestein und Magma:	$\rho_r = 2.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
Spezifische Wärmekapazität von Gestein und Magma:	$c_r = 700 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$
Spezifische Schmelzwärme von Gestein und Magma:	$L_r = 4.2 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$
Mittlere nach außen gerichtete Wärmestromdichte durch die Erdoberfläche:	$J_Q = 0.06 \text{ W/m}^2$
Schmelzpunkt von Eis:	$T_0 = 0^\circ\text{C}$, konstant

a) (0.5 Punkte) Betrachten Sie eine mächtige Eiskappe an einem Ort mit durchschnittlichem Wärmestrom aus dem Erdinneren. Berechnen Sie anhand der Daten in der Tabelle die Dicke d der Eisschicht, die jedes Jahr schmilzt, und tragen Sie Ihre Antwort in das dafür vorgesehene Feld auf dem Antwortblatt ein.

b) (3.5 Punkte) Betrachten Sie nun die obere Oberfläche einer Eiskappe. Der Boden unter der Eiskappe hat einen Neigungswinkel α . Die obere Oberfläche der Eiskappe ist um den Winkel β geneigt, wie in Abbildung 2.1 dargestellt. Die vertikale Eisdicke bei $x = 0$ beträgt h_0 . Somit lassen sich die untere und die obere Oberfläche der Eiskappe durch die folgenden Gleichungen beschreiben:

$$y_1 = x \tan \alpha, \quad y_2 = h_0 + x \tan \beta \quad (2.1)$$

Leiten Sie einen Ausdruck für den Druck p an der Unterseite der Eiskappe als Funktion der horizontalen Koordinate x her und tragen Sie ihn auf dem Antwortblatt ein.

Formulieren Sie mathematisch eine Bedingung zwischen β und α , damit Wasser in einer Schicht zwischen der Eiskappe und dem Boden in keine der beiden Richtungen fließt. Zeigen Sie, dass die Bedingung die Form $\tan \beta = s \tan \alpha$ hat. Bestimmen Sie den Koeffizienten s und tragen Sie das Ergebnis in symbolischer Form auf dem Antwortblatt ein.

Die Gerade $y_1 = 0.8x$ in Abbildung 2.2 zeigt die Erdoberfläche unter einer Eiskappe. Die vertikale Dicke h_0 bei $x = 0$ beträgt 2 km. Nehmen Sie an, dass sich das Wasser am Boden im Gleichgewicht befindet. Zeichnen Sie auf einem Diagramm-Antwortblatt die Gerade y_1 und ergänzen Sie eine Gerade y_2 , die die obere Oberfläche des Eises darstellt. Kennzeichnen Sie in der Abbildung, welche Gerade welche ist.

⁶Autoren: Gudni Axelsson und Thorsteinn Vilhjálmsson

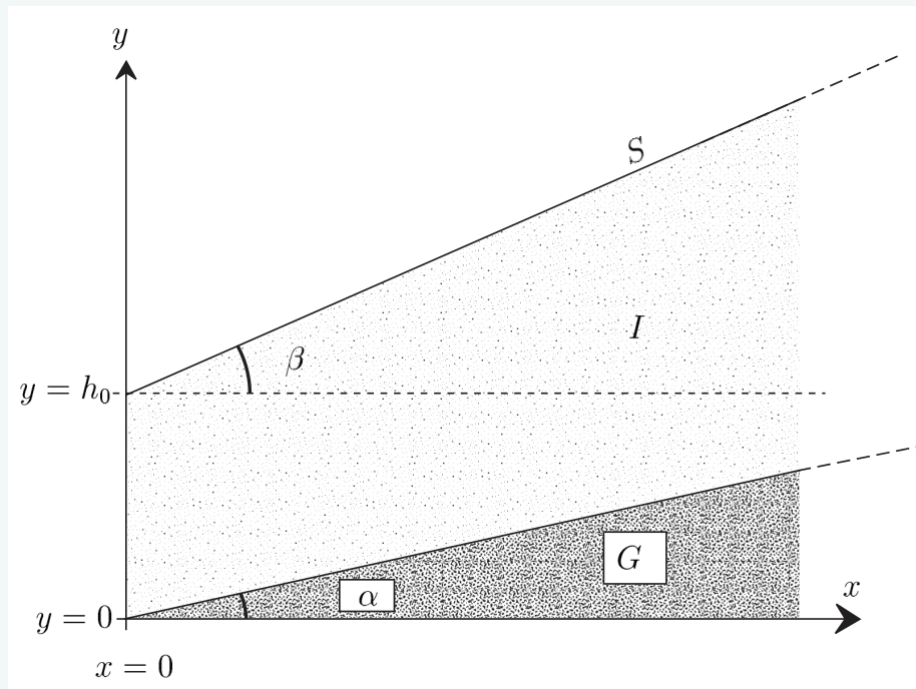


Abbildung 2.1: Querschnitt einer Eiskappe mit ebener Oberfläche, die auf einem geneigten ebenen Boden aufliegt. S : Oberfläche, G : Boden, I : Eiskappe.

c) (1 Punkt) Innerhalb einer großen Eisschicht auf horizontalem Boden mit ursprünglich konstanter Dicke $D = 2.0$ km entsteht durch Schmelzen des Eises relativ plötzlich ein kegelförmiger Wasserkörper mit der Höhe $H = 1.0$ km und dem Radius $r = 1.0$ km (Abbildung 2.3). Wir nehmen an, dass sich das verbleibende Eis ausschließlich durch vertikale Bewegung daran anpasst.

Zeigen Sie analytisch auf einem leeren Antwortblatt und zeichnerisch auf einem Diagramm-Antwortblatt die Form der Oberfläche der Eiskappe, nachdem sich der Wasserkegel gebildet hat und das hydrostatische Gleichgewicht erreicht ist.

d) (5 Punkte) Auf ihrer jährlichen Expedition erkundet eine internationale Gruppe von Wissenschaftlern eine temperierte Eiskappe in der Antarktis. Das Gebiet ist normalerweise ein weites Plateau, doch diesmal finden sie eine tiefe kraterartige Senke in Form eines mit der Spitze nach unten gerichteten Kegels mit einer Tiefe h von 100 m und einem Radius r von 500 m (Abbildung 2.4). Die Eisdicke in diesem Gebiet beträgt 2000 m.

Nach einer Diskussion kommen die Wissenschaftler zu dem Schluss, dass es höchstwahrscheinlich einen kleineren Vulkanausbruch unter der Eiskappe gegeben hat. Eine kleine Menge Magma (geschmolzenes Gestein) drang an der Unterseite der Eiskappe ein,

erstarrte und kühlte ab, wobei ein bestimmtes Eisvolumen schmolz. Die Wissenschaftler versuchen im Folgenden, das Volumen der Intrusion abzuschätzen und sich ein Bild davon zu machen, was aus dem Schmelzwasser geworden ist.

Nehmen Sie an, dass sich das Eis nur vertikal bewegte. Nehmen Sie außerdem an, dass das Magma zu Beginn vollständig geschmolzen war und eine Temperatur von 1200°C hatte. Nehmen Sie zur Vereinfachung ferner an, dass die Intrusion die Form eines Kegels mit kreisförmiger Grundfläche senkrecht unter der kegelförmigen Senke an der Oberfläche hatte. Die Aufstiegszeit des Magmas war kurz im Vergleich zur Dauer des Wärmeaustauschs während dieses Vorgangs. Es wird angenommen, dass der Wärmestrom hauptsächlich vertikal gerichtet war, sodass das aus dem Eis geschmolzene Volumen zu jedem Zeitpunkt durch eine Kegelfläche begrenzt ist, deren Mittelpunkt über dem Mittelpunkt der Magmaintrusion liegt.

Unter diesen Annahmen erfolgt das Schmelzen des Eises in zwei Schritten. Zunächst befindet sich das Wasser an der Oberfläche des Magmas nicht im Druckgleichgewicht und fließt daher ab. Für das abfließende Wasser kann eine Temperatur von 0°C angenommen werden. Anschließend

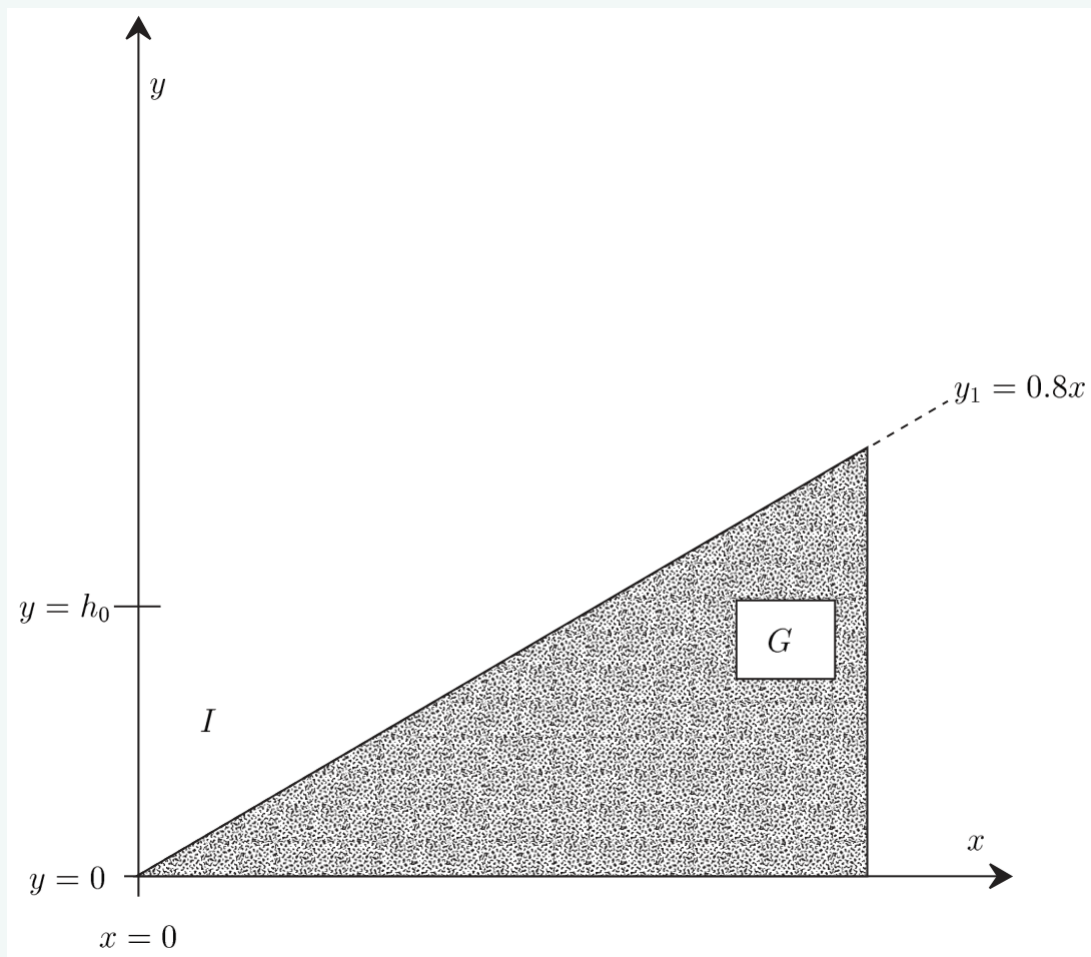


Abbildung 2.2: Querschnitt einer temperierten Eiskappe auf geneigtem Boden mit Wasser an der Unterseite im Gleichgewicht. G : Boden, I : Eiskappe.

wird das hydrostatische Gleichgewicht erreicht, und das Wasser sammelt sich über der Intrusion, anstatt abzufließen.

Bestimmen Sie die folgenden Größen für den Zustand, in dem das thermische Gleichgewicht erreicht ist. Tragen Sie die Antworten auf dem Antwortblatt ein.

1. Die Höhe H der Spitze des unter der Eiskappe entstandenen Wasserkegels, bezogen auf die ursprüngliche Unterseite der Eiskappe.
2. Die Höhe h_1 der Intrusion.
3. Die Gesamtmasse m_{tot} des entstandenen Wassers und die Masse m' des abfließenden Wassers.

Zeichnen Sie auf einem Diagramm-Antwortblatt maßstabsgetreu die Formen der Gesteinsintrusion und des verbleibenden Wasserkörpers. Verwenden Sie das in Abbildung 2.4 vorgeschlagene Koordinatensystem.

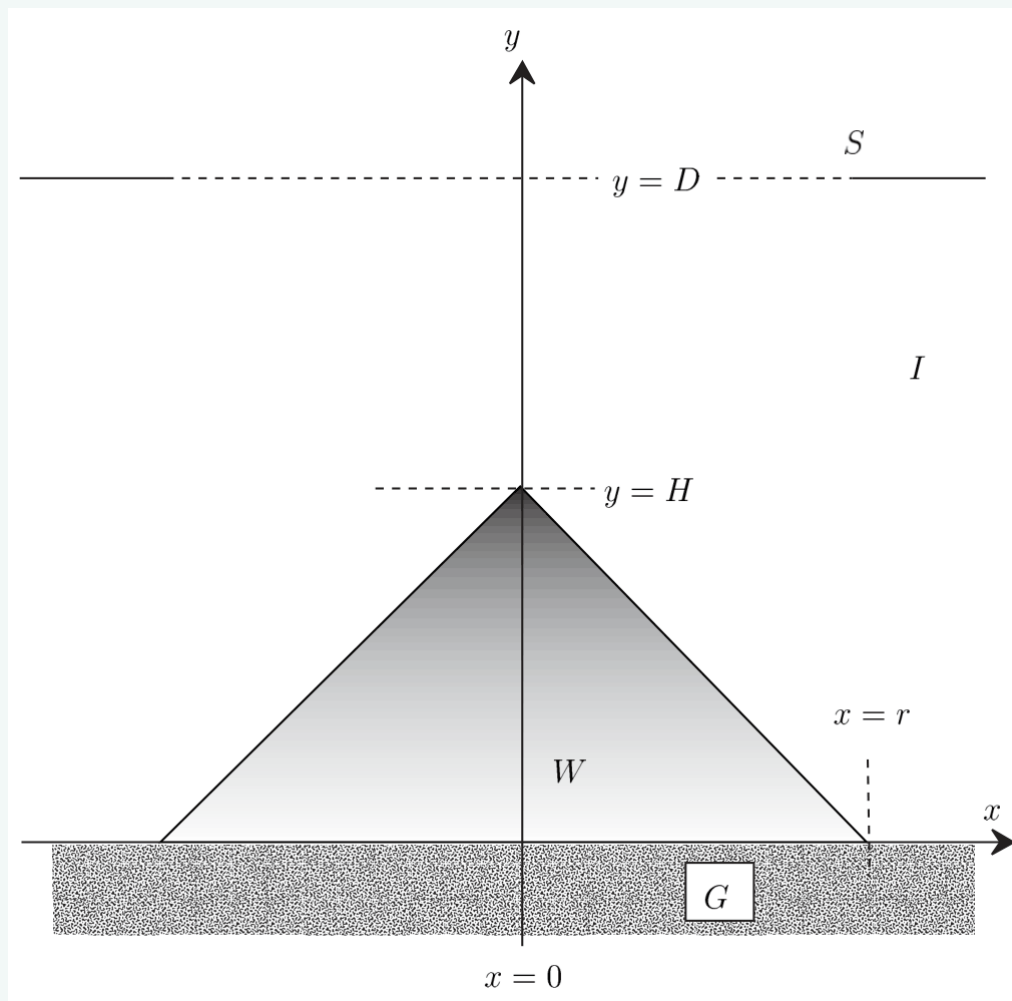


Abbildung 2.3: Ein vertikaler Schnitt durch die Mittelebene eines Wasserkegels innerhalb einer Eiskappe. S : Oberfläche, W : Wasser, G : Boden, I : Eiskappe.

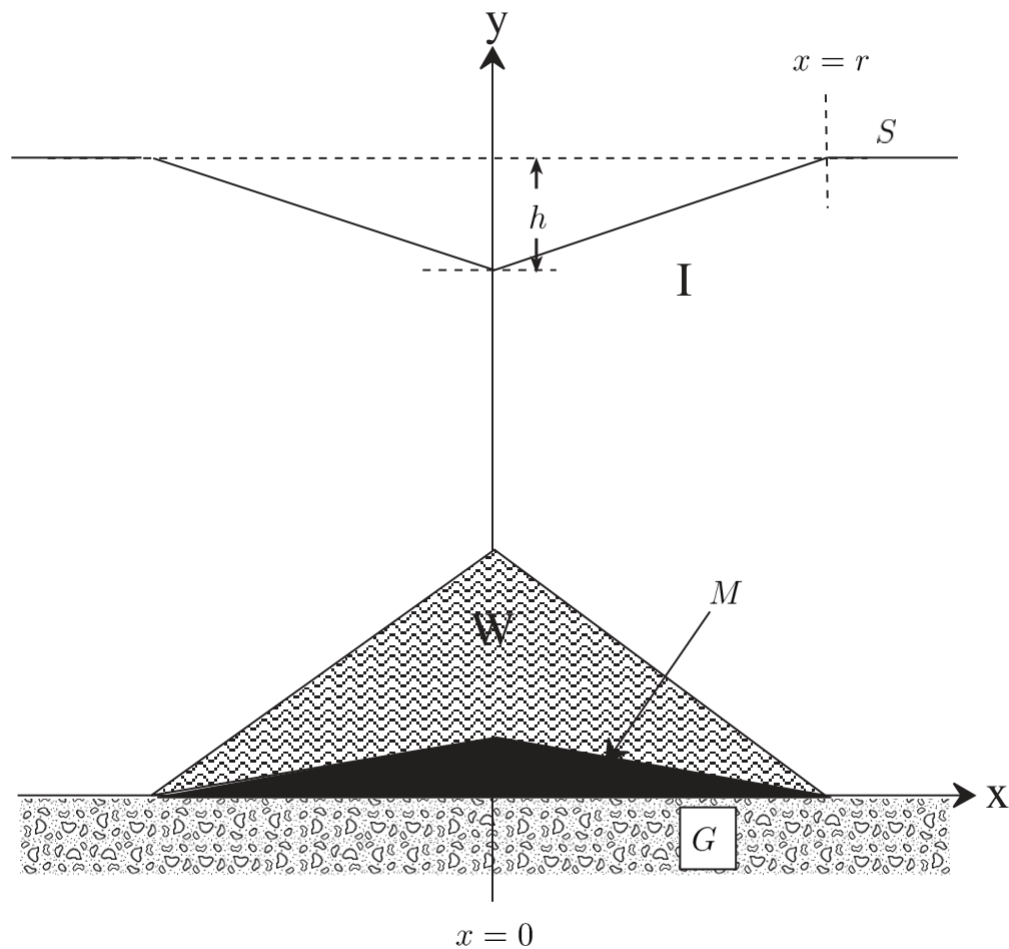


Abbildung 2.4: Ein vertikaler Schnitt durch die Mitte einer kegelförmigen Senke in einer temperierten Eiskappe. S : Oberfläche, G : Boden, I : Eiskappe, M : Gesteins-/Magmaintrusion, W : Wasser. Beachten Sie, dass die Abbildung NICHT maßstabsgetreu gezeichnet ist.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **a)** Die jährlich abgeschmolzene Dicke beträgt

$$d \simeq 6.1 \times 10^{-3} \text{ m} = 6.1 \text{ mm.}$$

- **b)** Bei gleichförmigem Atmosphärendruck p_a gilt

$$p(x) - p_a = \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

Damit kein Wasser fließt, muss gelten

$$\tan \beta = s \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \simeq -0.09051.$$

Für das geforderte Diagramm gilt mit beiden Koordinaten in Kilometern

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.07241x.$$

Die Geraden schneiden sich ungefähr bei (2.293, 1.834) km.

- c) Sei R der horizontale Abstand von der Kegelachse. Die Oberfläche ist

$$y_s(R) = \begin{cases} D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r}\right), & 0 \leq R \leq r, \\ D, & R \geq r. \end{cases}$$

Es handelt sich um eine kegelförmige Senke mit einem Radius von 1.0 km und einer Tiefe von ungefähr 91 m. Ihre Höhe im Zentrum beträgt 1.9095 km über dem Untergrund.

- d), 1.

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} \simeq 1.10 \times 10^3 \text{ m.}$$

- d), 2.

$$h_1 \simeq 103 \text{ m.}$$

Das Volumen der Intrusion beträgt ungefähr $2.7 \times 10^7 \text{ m}^3$.

- d), 3.

$$m_{\text{tot}} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ kg}, \quad m' \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ kg.}$$

Etwa 9.3% des Schmelzwassers fließen ab. Definieren Sie für die Zeichnung $f(x) = 1 - |x|/(500 \text{ m})$ für $|x| \leq 500 \text{ m}$. Die Gesteinsoberfläche und die Wasser-Eis-Grenzfläche sind

$$y_M = (102.8 \text{ m})f(x), \quad y_W = (1104.8 \text{ m})f(x).$$

Das Wasser füllt den Bereich zwischen diesen beiden Flächen aus.

Lösung

a) Jährliches Schmelzen

Das Eis befindet sich bereits am Schmelzpunkt, sodass die zugeführte Erdwärme als Schmelzwärme aufgenommen wird. Für eine horizontale Fläche A ergibt die Energieerhaltung über ein Jahr

$$J_Q A t = \rho_i A d L_i.$$

Somit gilt

$$d = \frac{J_Q t}{\rho_i L_i}.$$

Setzt man ein Jahr gleich $365 \times 24 \times 3600 = 3.1536 \times 10^7 \text{ s}$, erhält man

$$d = \frac{0.06(3.1536 \times 10^7)}{(917)(3.4 \times 10^5)} = 6.069 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

Damit schmelzen jedes Jahr ungefähr 6.1 mm Eis. Die spezifische Wärmekapazität des Eises wird nicht benötigt, da keine anfängliche Erwärmung erforderlich ist.

b) Druck und Bedingung dafür, dass kein Wasser fließt

Die vertikale Eisdicke beträgt

$$h_i(x) = y_2 - y_1 = h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha).$$

Im angegebenen Modell ist der Druck an der Unterseite gleich dem Atmosphärendruck zuzüglich der Gewichtskraft des darüberliegenden Eises pro horizontaler Flächeneinheit:

$$p(x) = p_a + \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

Wird der Druck relativ zum Atmosphärendruck gemessen, entfällt der Term p_a .

Für ruhendes Wasser erfordert das hydrostatische Gleichgewicht

$$p + \rho_w g y = \text{konstant.}$$

Entlang der dünnen Wasserschicht gilt $y = y_1(x)$, sodass die Bedingung für das Ausbleiben einer Strömung lautet

$$\frac{dp}{dx} + \rho_w g \frac{dy_1}{dx} = 0.$$

Einsetzen des Drucks und der Bodenneigung ergibt

$$\rho_i g (\tan \beta - \tan \alpha) + \rho_w g \tan \alpha = 0.$$

Folglich gilt

$$\tan \beta = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i}.$$

Numerisch ergibt sich

$$s = \frac{917 - 1000}{917} = -0.0905125.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Eisoberfläche in der Richtung abfallen muss, in der der Boden ansteigt.

Für $y_1 = 0.8x$ und $h_0 = 2$ km gilt

$$\tan \beta = (-0.0905125)(0.8) = -0.0724100,$$

woraus sich mit x und y in Kilometern ergibt

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.0724100x.$$

Zeichnen Sie den Boden als ansteigende Gerade durch den Ursprung und die Eisoberfläche als leicht abfallende Gerade durch $(0, 2)$. Hilfreiche Koordinaten für die Zeichnung sind:

x (km)	Boden y_1 (km)	Eisoberfläche y_2 (km)
0	0	2.000
1.000	0.800	1.928
2.000	1.600	1.855
2.2925	1.834	1.834

Für $x \geq 0$ liegt das Eis bis zum Schnittpunkt zwischen diesen Geraden.

c) Oberfläche über einem kegelförmigen Wasserkörper

Sei $z(R)$ die Höhe der Eis-Wasser-Grenzfläche über dem horizontalen Untergrund:

$$z(R) = H \left(1 - \frac{R}{r} \right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

Am Rand geht die Wasserdicke gegen null, und das Eis behält seine ursprüngliche Dicke D . Daher beträgt der Wasserdruck auf Höhe des Untergrunds

$$p_b = p_a + \rho_i g D.$$

Aus dem hydrostatischen Gleichgewicht ergibt sich der Druck in der Höhe z :

$$p_w(z) = p_a + \rho_i g D - \rho_w g z.$$

Die Eissäule über diesem Punkt hat die Dicke $y_s - z$ und übt daher folgenden Druck aus:

$$p_i = p_a + \rho_i g (y_s - z).$$

Gleichsetzen der Drücke an der Eis-Wasser-Grenzfläche ergibt

$$\rho_i (y_s - z) = \rho_i D - \rho_w z.$$

Somit gilt

$$y_s = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} z.$$

Einsetzen der kegelförmigen Grenzfläche ergibt

$$y_s(R) = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r} \right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

Außerhalb der Grundfläche gilt $y_s = D$. Die Tiefe der Senke beträgt

$$\delta = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H = \frac{83}{917} (1000 \text{ m}) = 90.51 \text{ m}.$$

Die Oberfläche bildet somit einen umgekehrten Kegel mit dem Radius 1.0 km, der stetig in die umgebende horizontale Oberfläche übergeht. Sein tiefster Punkt liegt bei

$$y_s(0) = 2000 - 90.51 = 1909.49 \text{ m}.$$

Für einen vertikalen Schnitt durch die Mitte setzen Sie $R = |x|$. Verbinden Sie bei Koordinaten in Kilometern die Punkte

$$(-1.000, 2.000), \quad (0, 1.90949), \quad (1.000, 2.000)$$

durch gerade Strecken und setzen Sie das Profil auf beiden Seiten horizontal bei $y = 2.000$ km fort. Durch Rotation dieses Profils um die vertikale Achse erhält man die Oberflächensenke.

d) Vulkanische Intrusion

Es sei

$$f(R) = 1 - \frac{R}{r}, \quad 0 \leq R \leq r,$$

wobei $r = 500$ m ist. Die endgültige Oberfläche, die Wasser-Eis-Grenzfläche und die Gesteinsoberfläche haben die Formen

$$y_s = D - hf(R), \quad y_W = Hf(R), \quad y_M = h_1 f(R).$$

Hierbei sind $D = 2000$ m und $h = 100$ m.

1. Höhe der Spitze des Wasserkegels

Die in Teil c hergeleitete hydrostatische Beziehung gilt erneut:

$$D - y_s = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} y_W.$$

Im Zentrum gilt

$$h = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H.$$

Daher folgt

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} = \frac{917(100)}{83} = 1104.82 \text{ m.}$$

Diese Höhe wird vom ursprünglichen Untergrund aus gemessen. Die tatsächliche Wassertiefe im Zentrum wird $H - h_1$ betragen.

2. Höhe der Intrusion

Bestimmen Sie zunächst, wie viel Eis geschmolzen ist. Die endgültige Eisdicke in einer vertikalen Säule beträgt

$$y_s - y_w = D - (h + H)f(R).$$

Da sich das Eis nur vertikal bewegt, verliert jede Säule eine Eisdicke von

$$(h + H)f(R).$$

Das anfängliche Anheben durch das Magma ändert die Eismenge in einer Säule nicht. Daher beträgt das gesamte geschmolzene Eisvolumen

$$V_{\text{melt}} = \int_0^r (h + H) \left(1 - \frac{R}{r}\right) 2\pi R dR = \frac{\pi r^2}{3} (h + H).$$

Schreiben wir

$$C = \frac{\pi r^2}{3}.$$

Dann gilt

$$m_{\text{tot}} = \rho_i C(h + H), \quad V_M = Ch_1, \quad m_M = \rho_r Ch_1.$$

Im endgültigen thermischen Gleichgewicht haben das Gestein und das Eis-Wasser-Gemisch eine Temperatur von 0°C . Jedes Kilogramm Magma setzt folgende Wärme frei:

$$q_M = L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0) = 4.2 \times 10^5 + 700(1200) = 1.26 \times 10^6 \text{ J/kg.}$$

Darin sind sowohl die Erstarrung als auch die Abkühlung enthalten. Unter Vernachlässigung von Wärmeverlusten und kleinen Änderungen der mechanischen Energie ergibt die Energieerhaltung

$$\rho_r Ch_1 q_M = \rho_i C(h + H)L_i.$$

Daher gilt

$$h_1 = \frac{\rho_i (h + H)L_i}{\rho_r [L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

Aus der hydrostatischen Beziehung folgt außerdem

$$\rho_i (h + H) = \rho_w H,$$

sodass gleichwertig gilt

$$h_1 = \frac{\rho_w H L_i}{\rho_r [L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

Numerisch ergibt sich

$$h_1 = \frac{1000(1104.819)(3.4 \times 10^5)}{2900(1.26 \times 10^6)} = 102.80 \text{ m} \simeq 103 \text{ m}.$$

Das Volumen der Intrusion beträgt folglich

$$V_M = \frac{\pi(500)^2}{3}(102.802) = 2.691 \times 10^7 \text{ m}^3.$$

3. Insgesamt entstandenes und abgeflossenes Wasser

Aus dem geschmolzenen Eisvolumen folgt

$$m_{tot} = \rho_i C(h + H) = \rho_w CH.$$

Somit gilt

$$m_{tot} = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3}(1104.819) = 2.8924 \times 10^{11} \text{ kg} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

Das verbleibende Wasser füllt den Raum zwischen dem Kegel der Wasser-Eis-Grenzfläche und dem Gesteinskegel aus. Sein Volumen beträgt

$$V_{\text{remaining}} = C(H - h_1),$$

und seine Masse beträgt

$$m_{\text{remaining}} = \rho_w C(H - h_1) = 2.6233 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

Die Massenerhaltung ergibt daher

$$\begin{aligned} m' &= m_{tot} - m_{\text{remaining}} \\ &= \rho_w CH - \rho_w C(H - h_1) \\ &= \rho_w Ch_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$m' = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3}(102.802) = 2.6914 \times 10^{10} \text{ kg} \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ kg}.$$

Das Volumen des abgeflossenen Wassers ist gleich dem Volumen der Intrusion:

$$\frac{m'}{\rho_w} = V_M.$$

Dies erklärt auch die beiden Phasen. Anfangs hebt das Magma das Eis an, ohne dessen Dicke zu verringern, sodass das Wasser auf der erhöhten Gesteinsoberfläche einen hydraulischen Überdruck aufweist und abfließt. Am Ende dieser Abflussphase liegt die Eis-Wasser-Grenzfläche näherungsweise auf der Gesteinsoberfläche $h_1 f(R)$. Das hydrostatische Gleichgewicht erfordert dann eine Eisdicke von

$$D - \frac{\rho_w}{\rho_i} h_1 f(R).$$

Das bis zu diesem Zeitpunkt geschmolzene Eis hat die Masse $\rho_w Ch_1$, genau die oben ermittelte abgeflossene Masse. Weiteres Schmelzen erzeugt den verbleibenden Wasserkörper.

Beschreibung der Zeichnung

Verwenden Sie für einen vertikalen Schnitt durch die Mitte $R = |x|$. Innerhalb von $|x| \leq 500$ m gilt

$$y_M(x) = 102.802 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m},$$

$$y_W(x) = 1104.819 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m},$$

$$y_s(x) = 2000 - 100 \left(1 - \frac{|x|}{500} \right) \text{ m},$$

wobei x als Zahlenwert in Metern eingesetzt wird.

Verwenden Sie die folgenden Koordinaten und verbinden Sie benachbarte Punkte durch gerade Linien:

x (m)	Gesteinsoberfläche y_M (m)	Wasser-Eis-Grenzfläche y_W (m)	Eisoberfläche y_s (m)
-500	0	0	2000
-250	51.4	552.4	1950
0	102.8	1104.8	1900
250	51.4	552.4	1950
500	0	0	2000

Zeichnen Sie den ursprünglichen Untergrund entlang $y = 0$, schraffieren Sie die Intrusion zwischen dem Untergrund und y_M und schraffieren Sie das Wasser zwischen y_M und y_W . Das Eis liegt zwischen y_W und y_s . Außerhalb der Grundfläche bleibt der Untergrund bei $y = 0$ und die Eisoberfläche bei $y = 2000$ m.

Bei gleichen Längenmaßstäben auf beiden Achsen ist die Intrusion nur etwa 103 m hoch, während die Wassergrenzfläche etwa 1105 m erreicht. Die Wassertiefe im Zentrum beträgt

$$H - h_1 \simeq 1002 \text{ m},$$

und das verbleibende Eis direkt darüber ist etwa 795 m dick.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Schneller als Licht?

In dieser Aufgabe analysieren und interpretieren wir Messungen der Radiowellenemission einer aus mehreren Komponenten bestehenden Quelle innerhalb unserer Galaxie, die 1994 durchgeführt wurden.

Der Empfänger war auf ein breites Band von Radiowellen mit Wellenlängen von mehreren Zentimetern abgestimmt. Abbildung 3.1 zeigt eine Reihe von Bildern, die zu verschiedenen Zeiten aufgenommen wurden. Die Konturlinien kennzeichnen eine konstante Strahlungsintensität, ähnlich wie Höhenlinien auf einer geografischen Karte. Die beiden Maxima in der Abbildung werden als zwei Objekte gedeutet, die sich von einem gemeinsamen Zentrum entfernen, das in den Bildern durch Kreuze markiert ist. (Das Zentrum, das als im Raum ruhend angenommen wird, ist ebenfalls eine starke Strahlungsquelle, allerdings hauptsächlich bei anderen Wellenlängen). Die Messungen an den verschiedenen Tagen wurden jeweils zur selben Tageszeit durchgeführt.

Der Maßstab der Abbildung ist durch eine Strecke angegeben, die einer Bogensekunde (as) entspricht. (1 as = 1/3600 eines Grades). Die Entfernung zu dem Himmelskörper im Zentrum der Abbildung, der durch Kreuze markiert ist, wird auf $R = 12.5$ kpc geschätzt. Ein Kiloparsec (kpc) entspricht $3.09 \cdot 10^{19}$ m. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s.

Fehlerrechnungen sind bei der Lösung nicht erforderlich.

a) (2 Punkte) Wir bezeichnen die Winkelpositionen der beiden ausgestoßenen Radioquellen relativ zum gemeinsamen Zentrum mit $\theta_1(t)$ und $\theta_2(t)$, wobei sich die Indizes 1 und 2 auf die linke beziehungsweise die rechte Quelle beziehen und t die Beobachtungszeit ist. Die von der Erde aus beobachteten Winkelgeschwindigkeiten sind ω_1 und ω_2 . Die entsprechenden scheinbaren transversalen Geschwindigkeiten der beiden Quellen werden mit $v'_{1,\perp}$ und $v'_{2,\perp}$ bezeichnet.

Erstellen Sie mithilfe von Abbildung 3.1 ein Diagramm, um die Zahlenwerte von ω_1 und ω_2 in Millibogensekunden pro Tag (mas/d) zu bestimmen. Bestimmen Sie auch die Zahlenwerte von $v'_{1,\perp}$ und $v'_{2,\perp}$ und tragen Sie alle Antworten auf dem Antwortblatt ein. (Einige Ergebnisse könnten Sie verwundern).

b) (3 Punkte) Um das in Teil (a) auftretende Rätsel zu lösen, betrachten Sie eine Lichtquelle, die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ unter einem Winkel ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) zur Richtung auf einen weit entfernten Beobachter O zu bewegt (Abbildung 3.2). Der Geschwindigkeitsbetrag lässt sich als $v = \beta c$ schreiben, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Die vom Beobachter gemessene Entfernung zur Quelle beträgt R . Die vom Beobachter aus gesehene Winkelgeschwindigkeit der Quelle ist ω , und die scheinbare Geschwindigkeit senkrecht zur Sichtlinie ist $v'_{\perp}$.

Bestimmen Sie ω und $v'_{\perp}$ in Abhängigkeit von β , R und ϕ und tragen Sie Ihre Antwort auf dem Antwortblatt ein.

c) (1 Punkt) Wir nehmen an, dass sich die beiden ausgestoßenen Objekte, die in der Einleitung und in Teil (a) beschrieben wurden, mit gleichen Geschwindigkeitsbeträgen $v = \beta c$ in entgegengesetzte Richtungen bewegen. Dann ermöglichen es die Ergebnisse aus Teil (b), β und ϕ aus den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 sowie der Entfernung R zu berechnen. Dabei ist ϕ der in Teil (b) definierte Winkel für das linke Objekt, das dem Index 1 in Teil (a) entspricht.

Leiten Sie Formeln für β und ϕ in Abhängigkeit von bekannten Größen her und bestimmen Sie ihre Zahlenwerte aus den Daten in Teil (a). Tragen Sie Ihre Antworten in die dafür vorgesehenen Felder auf dem Antwortblatt ein.

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie für die Situation mit einem Körper aus Teil (b) die Bedingung dafür, dass die scheinbare senkrechte Geschwindigkeit $v'_{\perp}$ größer als die Lichtgeschwindigkeit c ist.

⁷ Autoren: Einar Gudmundsson, Knútur Árnason und Thorsteinn Vilhjálmsson

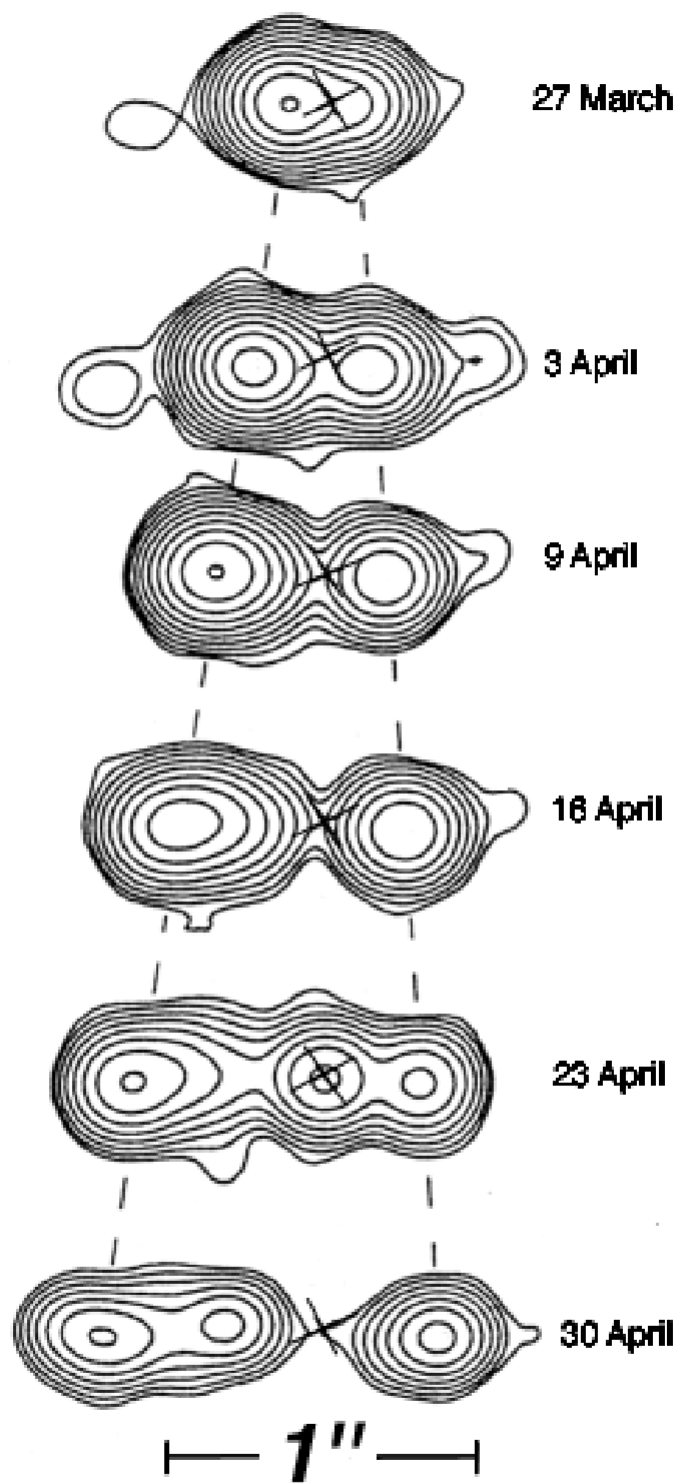


Abbildung 3.1: Radioemission einer Quelle in unserer Galaxie.

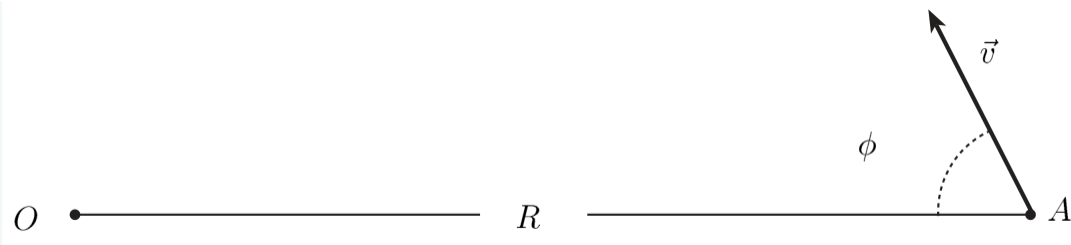


Abbildung 3.2: Der Beobachter befindet sich bei O , und die ursprüngliche Position der Lichtquelle liegt bei A . Der Geschwindigkeitsvektor ist $\vec{v}$.

Schreiben Sie die Bedingung in der Form $\beta > f(\phi)$ und geben Sie auf dem Antwortblatt einen analytischen Ausdruck für die Funktion f an.

Zeichnen Sie auf dem Diagramm-Antwortblatt den physikalisch relevanten Bereich der (β, ϕ) -Ebene. Kennzeichnen Sie durch Schraffur, in welchem Teil dieses Bereichs die Bedingung $v'_\perp > c$ erfüllt ist.

e) (1 Punkt) Bestimmen Sie weiterhin für die Situation mit einem Körper aus Teil (b) einen Ausdruck für den Maximalwert $(v'_\perp)_{\max}$ der scheinbaren senkrechten Geschwindigkeit $v'_\perp$ bei gegebenem β und tragen Sie ihn in das dafür vorgesehene Feld auf dem Antwortblatt ein. Beachten Sie, dass diese Geschwindigkeit für $\beta \rightarrow 1$ unbegrenzt zunimmt.

f) (1 Punkt) Die in der Einleitung angegebene Schätzung für R ist nicht sehr zuverlässig. Wissenschaftler haben daher begonnen, über eine bessere und direktere Methode zur Bestimmung von R nachzudenken. Eine Idee dazu lautet wie folgt. Nehmen Sie an, dass wir die durch den Dopplereffekt verschobenen Wellenlängen λ_1 und λ_2 der Strahlung der beiden ausgestoßenen Objekte identifizieren und messen können, die derselben bekannten ursprünglichen Wellenlänge λ_0 in den Ruhesystemen der Objekte entsprechen.

Zeigen Sie ausgehend von den Gleichungen für die relativistische Dopplerverschiebung, $\lambda = \lambda_0(1 - \beta \cos \phi)(1 - \beta^2)^{-1/2}$, und unter der bisherigen Annahme, dass beide Objekte denselben Geschwindigkeitsbetrag v haben, dass sich das unbekannte $\beta = v/c$ durch λ_0 , λ_1 , und λ_2 ausdrücken lässt als

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}. \quad (3.1)$$

Tragen Sie den Zahlenwert des Koeffizienten α in das dafür vorgesehene Feld auf dem Antwortblatt ein.

Beachten Sie, dass dies bedeutet, dass die vorgeschlagenen Wellenlängenmessungen in der Praxis eine neue Schätzung der Entfernung liefern werden.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- a) Repräsentative grafisch ermittelte Werte sind

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

Folglich gilt

$$v'_{1,\perp} \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c, \quad v'_{2,\perp} \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

- b)

$$\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}, \quad v'_\perp = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

- c) Mit Winkelgeschwindigkeiten in Radiant pro Zeiteinheit definieren wir

$$X = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad Y = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

Dann gilt

$$\beta = \sqrt{X^2 + Y^2} \simeq 0.92, \quad \phi = \arccos\left(\frac{X}{\beta}\right) \simeq 70^\circ.$$

Das linke Objekt nähert sich dem Beobachter.

- d) Der Bereich scheinbarer Überlichtgeschwindigkeit ist

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.$$

Somit gilt $f(\phi) = 1/(\sin \phi + \cos \phi)$ im relevanten Winkelintervall. Eine solche Bewegung erfordert $\beta > 1/\sqrt{2}$.

- e)

$$(v'_\perp)_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

- f)

$$\alpha = 4, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}.$$

Lösung

a) Winkelbewegungen und scheinbare Transversalgeschwindigkeiten

Wir setzen $t = 0$ auf den 27. März. Messen Sie den Winkelabstand jeder Komponente vom Kreuz in ihrem jeweiligen Bild und verwenden Sie dabei die gesamte eingezeichnete Maßstabsstrecke als $1'' = 1000 \text{ mas}$. Verfolgen Sie die beiden sich nach außen bewegendenden Komponenten, die durch die gestrichelten Bahnen gekennzeichnet sind. Wir verwenden auf beiden Seiten des Zentrums positive Winkelabstände.

Aus der vorgegebenen Abbildung lassen sich näherungsweise folgende Werte ablesen:

Datum	t (Tage)	θ_1 (Bogensekunden)	θ_2 (Bogensekunden)
27. März	0	0.12	0.07
3. April	7	0.22	0.14
9. April	13	0.35	0.20
16. April	20	0.46	0.26
23. April	27	0.61	0.31
30. April	34	0.70	0.38

Tragen Sie t auf der horizontalen und den Winkelabstand auf der vertikalen Achse auf. Die Punkte jeder Messreihe liegen näherungsweise auf einer Geraden; die linke Komponente hat die größere Steigung.

Repräsentative Geraden sind

$$\frac{\theta_1}{\text{arcsec}} \simeq 0.11 + 0.0175 \frac{t}{\text{d}}, \quad \frac{\theta_2}{\text{arcsec}} \simeq 0.08 + 0.0090 \frac{t}{\text{d}}.$$

Ihre Achsenabschnitte auf der vertikalen Achse betragen somit ungefähr $0.11''$ und $0.08''$, und ihre Steigungen ergeben

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

Die Winkel sind äußerst klein, sodass die zu einer Winkeländerung θ gehörende transversale Verschiebung $R\theta$ beträgt. Folglich gilt

$$v'_{i,\perp} = R\omega_i,$$

wobei ω_i in Radiant pro Sekunde angegeben werden muss. Die erforderlichen Umrechnungen lauten

$$R = 12.5(3.09 \times 10^{19}) = 3.8625 \times 10^{20} \text{ m},$$

$$1 \text{ mas} = \frac{\pi}{180 \times 3600 \times 1000} \text{ rad} = 4.8481 \times 10^{-9} \text{ rad},$$

und damit

$$1 \text{ mas/d} = 5.6113 \times 10^{-14} \text{ rad/s}.$$

Bei der angegebenen Entfernung entspricht 1 mas/d einer Geschwindigkeit von

$$R(5.6113 \times 10^{-14}) = 2.1674 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

Daraus folgt

$$v'_{1,\perp} \simeq 17.5(2.1674 \times 10^7) \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c,$$

$$v'_{2,\perp} \simeq 9.0(2.1674 \times 10^7) \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

Der erste Wert übersteigt c . Bei diesen Geschwindigkeiten wird das Zeitintervall zwischen den **Ankünften** der Signale auf der Erde verwendet; dieses Intervall unterscheidet sich vom Intervall zwischen ihren Aussendungen.

b) Einfluss der Lichtlaufzeit

Wir arbeiten in dem Inertialsystem, in dem der Beobachter und die zentrale Quelle ruhen. Zwei Signale sollen in diesem System im zeitlichen Abstand Δt_e ausgesendet werden.

Während dieses Intervalls beträgt die transversale Verschiebung der Quelle

$$\Delta x_{\perp} = v \sin \phi \Delta t_e.$$

Ihre Verschiebung in Richtung auf den Beobachter beträgt

$$\Delta x_{\parallel} = v \cos \phi \Delta t_e.$$

Für einen weit entfernten Beobachter ist der Weg des zweiten Signals um ungefähr $\Delta x_{\parallel}$ kürzer. Das Zeitintervall zwischen den Ankünften beträgt daher

$$\Delta t_{\text{obs}} = \Delta t_e - \frac{\Delta x_{\parallel}}{c} = (1 - \beta \cos \phi) \Delta t_e.$$

Derselbe Ausdruck gilt auch für eine sich entfernende Quelle: Dann ist $\cos \phi < 0$, sodass das zweite Signal einen längeren Weg zurücklegt.

In der Kleinwinkelnäherung beträgt die Winkeländerung

$$\Delta \theta \simeq \frac{\Delta x_{\perp}}{R}.$$

Somit gilt

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t_{\text{obs}}} = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}$$

und

$$v'_{\perp} = R\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

Dabei ist die Verschiebung der Quelle gegenüber R vernachlässigbar, sodass R und ϕ während der Beobachtungen als konstant behandelt werden können.

Bei einer sich nähernden Quelle treffen aufeinanderfolgende Signale in kürzeren Zeitabständen ein, als sie ausgesendet wurden. Die Division der transversalen Verschiebung durch dieses verkürzte Intervall kann $v'_{\perp} > c$ ergeben, obwohl die tatsächliche Geschwindigkeit der Quelle weiterhin $v = \beta c < c$ ist.

c) Bestimmung der tatsächlichen Geschwindigkeit und Richtung

Die beiden Bewegungsrichtungen bilden mit der Richtung auf den Beobachter die Winkel ϕ und $\pi - \phi$. Die Beträge ihrer transversalen Geschwindigkeiten sind gleich, während ihre radialen Komponenten entgegengesetzte Vorzeichen haben. Daher gilt

$$\frac{R\omega_1}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}, \quad \frac{R\omega_2}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 + \beta \cos \phi}.$$

Wir setzen

$$X = \beta \cos \phi, \quad Y = \beta \sin \phi.$$

Dann gilt

$$\omega_1(1 - X) = \omega_2(1 + X) = \frac{cY}{R}.$$

Gleichsetzen der ersten beiden Ausdrücke ergibt

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Einsetzen in eine der beiden Gleichungen für die Winkelgeschwindigkeit ergibt

$$Y = \beta \sin \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

Folglich gilt

$$\beta = \frac{\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (2R\omega_1\omega_2/c)^2}}{\omega_1 + \omega_2}$$

und ein im gesamten Bereich $0 \leq \phi \leq \pi$ gültiger Ausdruck lautet

$$\phi = \arccos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta(\omega_1 + \omega_2)} \right].$$

Für diese Beobachtungen gilt $\omega_1 > \omega_2$, sodass ϕ ein spitzer Winkel ist. Außerdem gilt

$$\tan \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 - \omega_2)}.$$

Mit den repräsentativen Winkelgeschwindigkeiten aus (a) erhalten wir

$$X \simeq \frac{17.5 - 9.0}{17.5 + 9.0} \simeq 0.321, \\ Y \simeq 0.859.$$

Somit gilt

$$\beta \simeq \sqrt{0.321^2 + 0.859^2} \simeq 0.917, \quad \phi \simeq 69.5^\circ.$$

Mit der durch das Diagramm gerechtfertigten Genauigkeit ergibt sich

$$\beta \simeq 0.92, \quad \phi \simeq 70^\circ.$$

Die tatsächliche Geschwindigkeit beträgt ungefähr 2.8×10^8 m/s. Da $\beta \cos \phi > 0$ ist, nähert sich die linke Komponente dem Beobachter, während sich die rechte Komponente von ihm entfernt.

d) Bedingung und Bereich für scheinbare Überlichtgeschwindigkeit

Für eine materielle Quelle gilt $0 \leq \beta < 1$. Daher ist $1 - \beta \cos \phi > 0$, und die Bedingung $v'_\perp > c$ wird zu

$$\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} > 1,$$

oder

$$\beta(\sin \phi + \cos \phi) > 1.$$

Für $\phi \geq \pi/2$ ist der Nenner von $v'_\perp/c$ mindestens eins, während der Zähler höchstens $\beta < 1$ beträgt. Eine scheinbare Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit ist daher für eine sich entfernende oder genau transversal bewegend Quelle unmöglich. Sie ist auch bei $\phi = 0$ unmöglich, wo die transversale Bewegung verschwindet.

Innerhalb des relevanten Intervalls $0 < \phi < \pi/2$ gilt

$$\beta > f(\phi), \quad f(\phi) = \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi}.$$

Die vollständige physikalische Bedingung lautet somit

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.$$

Für das geforderte Diagramm gelten im physikalisch relevanten Bereich die Grenzen

$$0 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Tragen Sie ϕ horizontal und β vertikal auf und zeichnen Sie die Grenzkurve im Bereich $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

Nützliche Punkte der Kurve sind:

ϕ	$f(\phi)$
0	1
$\pi/6$	0.732
$\pi/4$	$1/\sqrt{2} \simeq 0.707$
$\pi/3$	0.732
$\pi/2$	1

Die Kurve ist symmetrisch bezüglich $\phi = \pi/4$. Sie fällt von 1 auf ihr Minimum $1/\sqrt{2}$ ab und steigt dann wieder auf 1 an. Schraffieren Sie den Bereich strikt oberhalb dieser Kurve und strikt unterhalb von $\beta = 1$. Auf der Grenzkurve selbst gilt $v'_\perp = c$, daher gehört sie nicht zum schraffierten Bereich. Für $\phi \geq \pi/2$ wird kein Bereich schraffiert.

Wegen

$$\sin \phi + \cos \phi = \sqrt{2} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2},$$

existiert ein solcher Bereich nur für

$$\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Äquivalent dazu gilt für seine Winkelausdehnung bei jedem festen $\beta > 1/\sqrt{2}$

$$\left|\phi - \frac{\pi}{4}\right| < \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\beta}\right).$$

e) Maximale scheinbare Transversalgeschwindigkeit

Bei festem $0 < \beta < 1$ differenzieren wir das Ergebnis aus (b):

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{v'_\perp}{c} \right) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} \right) = \frac{\beta(\cos \phi - \beta)}{(1 - \beta \cos \phi)^2}.$$

Die Ableitung wechselt von positiv zu negativ bei

$$\cos \phi = \beta.$$

Da die scheinbare Transversalgeschwindigkeit sowohl bei $\phi = 0$ als auch bei $\phi = \pi$ verschwindet, ist dieser stationäre Punkt das globale Maximum. Bei diesem Winkel gilt

$$\sin \phi = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad 1 - \beta \cos \phi = 1 - \beta^2.$$

Daher ergibt sich

$$(v'_{\perp})_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

Für $\beta \rightarrow 1^-$ geht der Nenner gegen null, und die maximale scheinbare Geschwindigkeit wächst unbegrenzt. Für $\beta = 0$ ist die scheinbare Geschwindigkeit bei jedem Winkel null.

f) Bestimmung von β aus den Dopplerverschiebungen

Es sei

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Für das erste Objekt lautet die gegebene Dopplerformel

$$\lambda_1 = \lambda_0 \gamma (1 - \beta \cos \phi).$$

Für das entgegengesetzt bewegte Objekt gilt $\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$, woraus folgt

$$\lambda_2 = \lambda_0 \gamma (1 + \beta \cos \phi).$$

Durch Addition dieser Ausdrücke wird die Richtung eliminiert:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0 \gamma = \frac{2\lambda_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Somit gilt

$$1 - \beta^2 = \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2},$$

und mit dem nichtnegativen Geschwindigkeitsbetrag erhalten wir

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}, \quad \alpha = 4.$$

Dies erklärt auch, wie die Entfernung bestimmt werden könnte. Aus den Winkelbewegungen ergibt sich

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2},$$

während die Wellenlängen β bestimmen. Daher ist $\beta \sin \phi = \sqrt{\beta^2 - X^2}$, und die in (c) hergeleitete Beziehung ergibt

$$R = \frac{c(\omega_1 + \omega_2)}{2\omega_1\omega_2} \sqrt{\beta^2 - X^2}.$$

Somit bestimmen die kombinierten Winkel- und Wellenlängenmessungen R , ohne dessen anfängliche Schätzung zu übernehmen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.