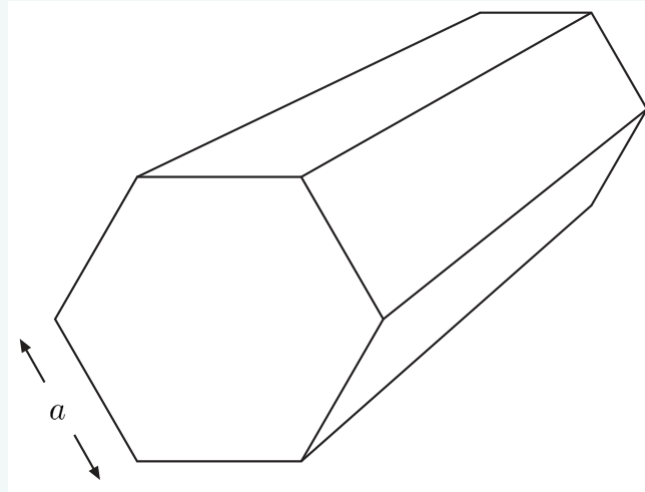


المسألة 1: تدحرج منشور سداسي

لنعتبر منشوراً سداسياً منتظماً طويلاً ومصمماً وصلباً، يشبه نوعاً شائعاً من أقلام الرصاص (الشكل 1.1). كتلة المنشور هي M ، وهي موزعة بانتظام. طول كل ضلع من أضلاع المقطع السداسي هو a . عزم القصور الذاتي I للمنشور السداسي حول محوره المركزي هو

$$I = \frac{5}{12}Ma^2 \quad (1.1)$$



الشكل 1.1: منشور مصممت مقطعه العرضي سداسي منتظم.

عزم القصور الذاتي I' حول إحدى حواف المنشور هو

$$I' = \frac{17}{12}Ma^2 \quad (1.2)$$

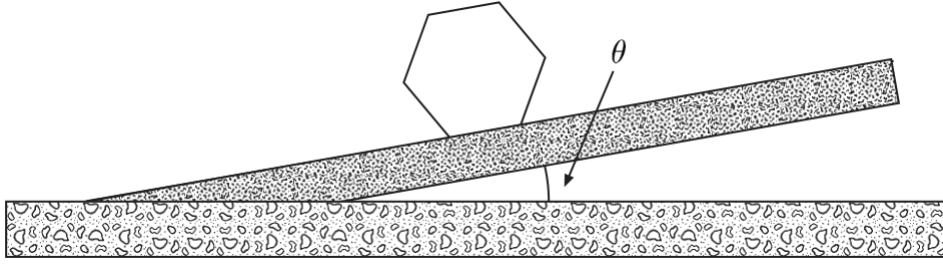
(a) (3.5 درجات) يكون المنشور ساكناً في البداية، ومحوره أفقي، على مستوى مائل يصنع زاوية صغيرة θ مع الأفقي (الشكل 1.2). افترض أن أوجه المنشور مقعرة قليلاً، بحيث لا يلامس المنشور المستوى إلا عند حوافه. يمكن إهمال تأثير هذا التقعر في عزم القصور الذاتي. يُزاح المنشور الآن عن وضع سكونه، ويبدأ بالتدحرج بصورة غير منتظمة إلى أسفل المستوى. افترض أن الاحتكاك يمنع أي انزلاق، وأن المنشور لا يفقد تلامسه مع المستوى. السرعة الزاوية قبيل اصطدام حافة معينة بالمستوى هي ω_i ، بينما ω_f هي السرعة الزاوية فور الاصطدام.

بيّن أنه يمكننا كتابة

$$\omega_f = s\omega_i \quad (1.3)$$

واكتب قيمة المعامل s في ورقة الإجابة.

المؤلفان: Thorsteinn Vilhjálmsson و Leó Kristjánsson



الشكل 1.2: منشور سداسي مستقر على مستوى مائل.

(b) (1 درجة) وبالمثل، تكون الطاقة الحركية للمنشور قبيل الاصطدام وبُعیده هي K_i و K_f ، على الترتيب.

بيّن أنه يمكننا كتابة

$$K_f = rK_i \quad (1.4)$$

واكتب قيمة المعامل r في ورقة الإجابة.

(c) (1.5 درجة) لكي يحدث الاصطدام التالي، يجب أن تتجاوز K_i قيمة دنيا $K_{i,min}$ ، يمكن كتابتها على الصورة

$$K_{i,min} = \delta Mga \quad (1.5)$$

حيث $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ هو تسارع الجاذبية.

أوجد المعامل δ بدلالة زاوية الميل θ والمعامل r . اكتب إجابتك في ورقة الإجابة. (استخدم الرمز الجبري r ، لا قيمته).

(d) (2 درجة) إذا تحقق شرط الجزء (c)، فإن الطاقة الحركية K_i ستقترب من قيمة ثابتة $K_{i,0}$ أثناء تدرج المنشور إلى أسفل المستوى المائل.

بفرض وجود النهاية، بيّن أنه يمكن كتابة $K_{i,0}$ على الصورة:

$$K_{i,0} = \kappa Mga \quad (1.6)$$

واكتب المعامل κ بدلالة θ و r في ورقة الإجابة.

(e) (2 درجة) احسب، بدقة 0.1° ، أصغر زاوية ميل θ_0 يستمر عندها التدرج غير المنتظم إلى ما لا نهاية بعد بدئه. اكتب إجابتك العددية في ورقة الإجابة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

$$s = \frac{11}{17} \approx 0.6471. \quad (\mathbf{a})$$

$$r = \frac{121}{289} \approx 0.4187. \quad (\mathbf{b})$$

$$\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}. \quad (\mathbf{c})$$

$$\kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}. \quad (\mathbf{d})$$

$$\theta_0 = 6.5724 \dots^\circ \approx \boxed{6.6^\circ}. \quad (\mathbf{e})$$

المعاملات κ, δ, r, s عديمة الأبعاد.

الحل

نعدّ كل اصطدام لحظياً، ونهمل دفع قوة الجاذبية خلاله. بين الاصطدامات، يدور المنشور حول حافة تلامسه الساكنة؛ ولا تبذل قوة التلامس شغلاً، لذا تنحفظ الطاقة الميكانيكية. نستخدم الدوال المثلثية الدقيقة دون تقريب طوال الحل.

(a) تغير السرعة الزاوية عند الاصطدام

في مقطع عرضي، لنرمز بـ A إلى حافة التلامس السابقة، وبـ B إلى الحافة التالية التي ستصطدم بالمستوى، وبـ C إلى مركز الكتلة. في السداسي المنتظم،

$$AC = BC = AB = a, \quad \angle ACB = 60^\circ.$$

قبيل الاصطدام مباشرة، يدور المنشور حول A ، ومن ثم

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_i \times \overrightarrow{AC}.$$

عند الاصطدام، تنفصل الحافة السابقة عن المستوى، وتصبح الحافة الجديدة محور الارتكاز. تمر قوة التلامس الاندفاعية عبر B ، لذا ينحفظ الزخم الزاوي حول الخط الثابت الذي تصطدم به B .

قبل الاصطدام، يتكون الزخم الزاوي حول B من الزخم الزاوي للدوران حول مركز الكتلة والزخم الزاوي المداري لمركز الكتلة:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{B,i} &= I\boldsymbol{\omega}_i + \overrightarrow{BC} \times M\mathbf{v}_C \\ &= \left(I + M\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \boldsymbol{\omega}_i \\ &= \left(I + \frac{1}{2}Ma^2 \right) \boldsymbol{\omega}_i. \end{aligned}$$

بعد الاصطدام، يدور المنشور حول B ، فنحصل على

$$\mathbf{L}_{B,f} = I'\boldsymbol{\omega}_f.$$

وبناءً على ذلك،

$$\left(\frac{5}{12} + \frac{1}{2} \right) Ma^2 \omega_i = \frac{17}{12} Ma^2 \omega_f,$$

ومن ثم

$$\boxed{\omega_f = \frac{11}{17}\omega_i}, \quad \boxed{s = \frac{11}{17}}.$$

(b) تغير الطاقة الحركية عند الاصطدام

قبيل الاصطدام وبُعیده مباشرة، تكون الحركة دورانياً محضاً حول حافة ساكنة. وعزم القصور الذاتي حول كلتا الحافتين هو نفسه I' ، لذا

$$K_i = \frac{1}{2}I'\omega_i^2, \quad K_f = \frac{1}{2}I'\omega_f^2.$$

ويترتب على ذلك أن

$$\frac{K_f}{K_i} = \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} \right)^2 = s^2.$$

إن

$$\boxed{K_f = \frac{121}{289}K_i}, \quad \boxed{r = \frac{121}{289}}.$$

(c) الطاقة الدنيا اللازمة للاصطدام التالي

بعد الاصطدام عند B ، يجب أن يرتفع مركز الكتلة حتى يصبح فوق B رأسياً، ثم يهبط نحو الاصطدام التالي.

عند لحظة الاصطدام، تقع C على مسافة عمودية $\sqrt{3}a/2$ فوق المستوى، وعلى مسافة $a/2$ من B في اتجاه الصعود على المستوى. لذلك يكون ارتفاعها الرأسي بالنسبة إلى B هو

$$h_{\text{start}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cos \theta + \frac{a}{2} \sin \theta = a \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right).$$

لزوايا الميل الصغيرة قيد النظر، $0 \leq \theta < \pi/6$ ، يصل مركز الكتلة بعد ذلك إلى أقصى ارتفاع

$$h_{\text{top}} = a.$$

حاجز طاقة وضع الجاذبية هو

$$\Delta U = Mga \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right].$$

الطاقة الحركية المتاحة فور الاصطدام هي rK_i . ولكي يتجاوز المنشور أعلى نقطة ويصل إلى الحافة التالية، يجب أن تحقق هذه الطاقة

$$rK_i > \Delta U.$$

ومن ثم فإن طاقة العتبة قبل الاصطدام هي

$$K_{i,\text{min}} = \frac{Mga}{r} \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right],$$

وبالتالي

$$\delta = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta)}{r}.$$

المتباينة صارمة: عند طاقة تساوي طاقة العتبة تمامًا، يقترب المنشور من وضع الاتزان غير المستقر دون أن يتجاوزه.

(d) القيمة الحدية للطاقة الحركية قبل الاصطدام

تتطابق أوضاع الاصطدامات المتتالية، باستثناء إزاحة بمقدار طول ضلع واحد a إلى أسفل المستوى. ومن ثم ينخفض مركز الكتلة رأسيًا بمقدار $a \sin \theta$ بين الاصطدامات.

لتكن E_n الطاقة الحركية قبيل الاصطدام n مباشرة. يخفضها الاصطدام إلى rE_n ، وتضيف الجاذبية طاقة مقدارها $Mga \sin \theta$ قبل الاصطدام التالي. لذلك، بالنسبة إلى الخطوات المتتالية المكتملة،

$$E_{n+1} = rE_n + Mga \sin \theta.$$

بأخذ النهاية المذكورة $E_n \rightarrow K_{i,0}$ ،

$$K_{i,0} = rK_{i,0} + Mga \sin \theta.$$

إن

$$K_{i,0} = \frac{Mga \sin \theta}{1 - r}, \quad \kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}.$$

وبالفعل، تعطي العلاقة التكرارية

$$E_n = K_{i,0} + r^n (E_0 - K_{i,0}),$$

وهي تتقارب لأن $0 < r < 1$ ، شريطة أن يستمر المنشور في تجاوز كل حاجز طاقة.

(e) أصغر زاوية ميل لاستمرار التدرج إلى ما لا نهاية

إذا كان $K_{i,0} < K_{i,\text{min}}$ ، فإن أي طاقة ابتدائية منتهية تنخفض في نهاية المطاف بما يكفي لجعل المنشور عاجزًا عن تجاوز الحاجز التالي. أما إذا كان $K_{i,0} \geq K_{i,\text{min}}$ وكانت الطاقة الابتدائية تحقق $E_0 > K_{i,\text{min}}$ ، فإن العلاقة التكرارية تُبقي كل قيمة لاحقة E_n ذات دليل منتهٍ أعلى من العتبة.

لذلك تتحدد الزاوية الحرجة من

$$K_{i,0} = K_{i,\text{min}},$$

$$\frac{\sin \theta_0}{1-r} = \frac{1 - \cos(\pi/6 - \theta_0)}{r}.$$

بالتعويض بـ $r = 121/289$ ،

$$121 \sin \theta_0 = 168 \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta_0 \right) \right].$$

بتوسيع جيب التمام نحصل على

$$205 \sin \theta_0 + 84\sqrt{3} \cos \theta_0 = 168.$$

وباستخدام $t = \tan(\theta_0/2)$ ، تصبح المعادلة

$$(168 + 84\sqrt{3})t^2 - 410t + (168 - 84\sqrt{3}) = 0.$$

الجزر الواقع في المجال الفيزيائي $0 < \theta_0 < 30^\circ$ هو

$$t = \frac{3(2 - \sqrt{3})}{14}.$$

وبناءً على ذلك،

$$\theta_0 = 2 \arctan \left[\frac{3(2 - \sqrt{3})}{14} \right] = 6.5723657 \dots^\circ,$$

وبالدقة المطلوبة،

$$\boxed{\theta_0 = 6.6^\circ}.$$

عند الميل الحرج، تتيح طاقة ابتدائية أعلى من العتبة قطعاً إتمام كل خطوة لاحقة، وإن كان المنشور يمكث زمناً أطول تدريجياً قرب كل وضع اتزان غير مستقر.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: الماء تحت غطاء جليدي

الغطاء الجليدي صفيحة سميكة من الجليد (قد يبلغ سمكها بضعة كيلومترات) تستقر على الأرض تحتها وتمتد أفقياً عشرات أو مئات الكيلومترات. نتناول في هذه المسألة انصهار الجليد وسلوك الماء تحت غطاء جليدي معتدل الحرارة، أي غطاء جليدي عند درجة الانصهار. يمكننا افتراض أن الجليد في هذه الظروف يحدث تغيرات في الضغط كما يفعل مائع لزج، لكنه يتشوه على نحو هش، أساساً بالحركة الرأسية. ولأغراض هذه المسألة، تُعطى المعلومات الآتية.

$\rho_w = 1.000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	كثافة الماء:
$\rho_i = 0.917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	كثافة الجليد:
$c_i = 2.1 \cdot 10^3 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$	الحرارة النوعية للجليد:
$L_i = 3.4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$	الحرارة الكامنة النوعية لانصهار الجليد:
$\rho_r = 2.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	كثافة الصخور والصهارة:
$c_r = 700 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$	الحرارة النوعية للصخور والصهارة:
$L_r = 4.2 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$	الحرارة الكامنة النوعية لانصهار الصخور والصهارة:
$J_Q = 0.06 \text{ W/m}^2$	متوسط التدفق الحراري المتجه إلى الخارج عبر سطح الأرض:
$T_0 = 0^\circ\text{C}$ ، ثابتة	درجة انصهار الجليد:

(a) (0.5 درجة) اعتبر غطاءً جليدياً سميكاً في موضع يكون فيه التدفق الحراري من باطن الأرض مساوياً لمتوسطه. باستخدام بيانات الجدول، احسب سمك d طبقة الجليد التي تنصهر كل سنة، واكتب إجابتك في الخانة المخصصة في ورقة الإجابة.

(b) (3.5 درجات) اعتبر الآن السطح العلوي لغطاء جليدي. تميل الأرض تحت الغطاء الجليدي بزاوية α . ويميل السطح العلوي للغطاء بزاوية β كما هو موضح في الشكل 2.1. السمك الرأسى للجليد عند $x = 0$ هو h_0 . ومن ثم يمكن وصف السطحين السفلي والعلوي للغطاء الجليدي بالمعادلتين

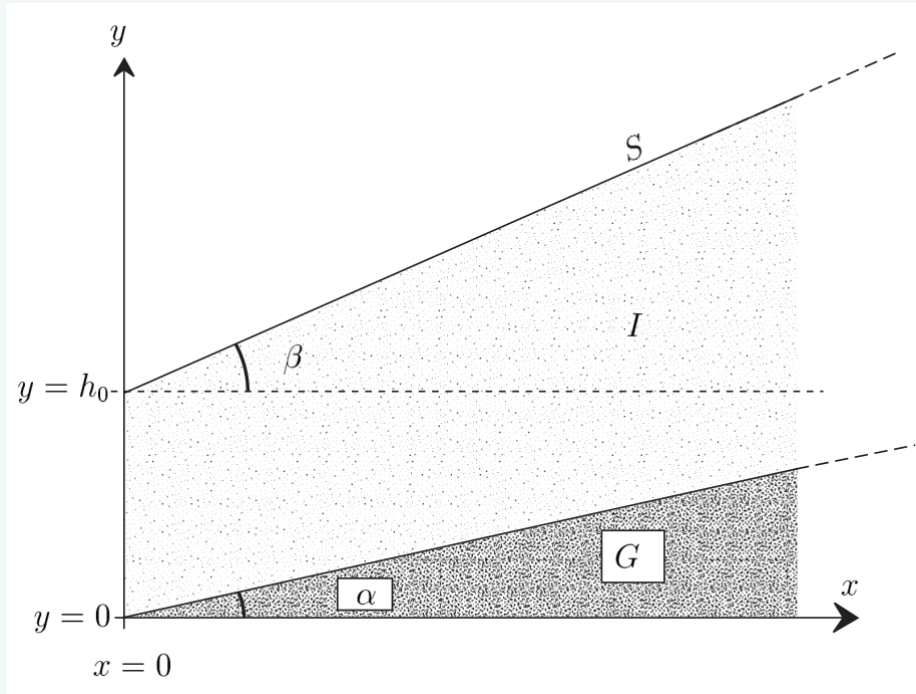
$$y_1 = x \tan \alpha, \quad y_2 = h_0 + x \tan \beta \quad (2.1)$$

اشتق تعبيراً للضغط p عند قاع الغطاء الجليدي بدلالة الإحداثي الأفقي x ، واكتبه في ورقة الإجابة.

صُغ رياضياً شرطاً يربط بين α و β ، بحيث لا يجري الماء الموجود في طبقة بين الغطاء الجليدي والأرض في أي من الاتجاهين. بين أن الشرط يتخذ الصورة $\tan \beta = s \tan \alpha$. أوجد المعامل s ، واكتب النتيجة في صورة رمزية في ورقة الإجابة.

يمثل المستقيم $y_1 = 0.8x$ في الشكل 2.2 سطح الأرض تحت غطاء جليدي. السمك الرأسى h_0 عند $x = 0$ هو 2 km. افترض أن الماء عند القاع في حالة اتزان. ارسم المستقيم y_1 على ورقة الإجابة البيانية، وأضف مستقيماً y_2 يبين السطح العلوي للجليد. وضح في الشكل ما يمثله كل مستقيم.

⁶ المؤلفان: Thorsteinn Vilhjálmsson و Gudni Axelsson



الشكل 2.1: مقطع عرضي لغطاء جليدي ذي سطح مستوي يستقر على أرض مستوية مائلة. S : السطح، G : الأرض، I : الغطاء الجليدي.

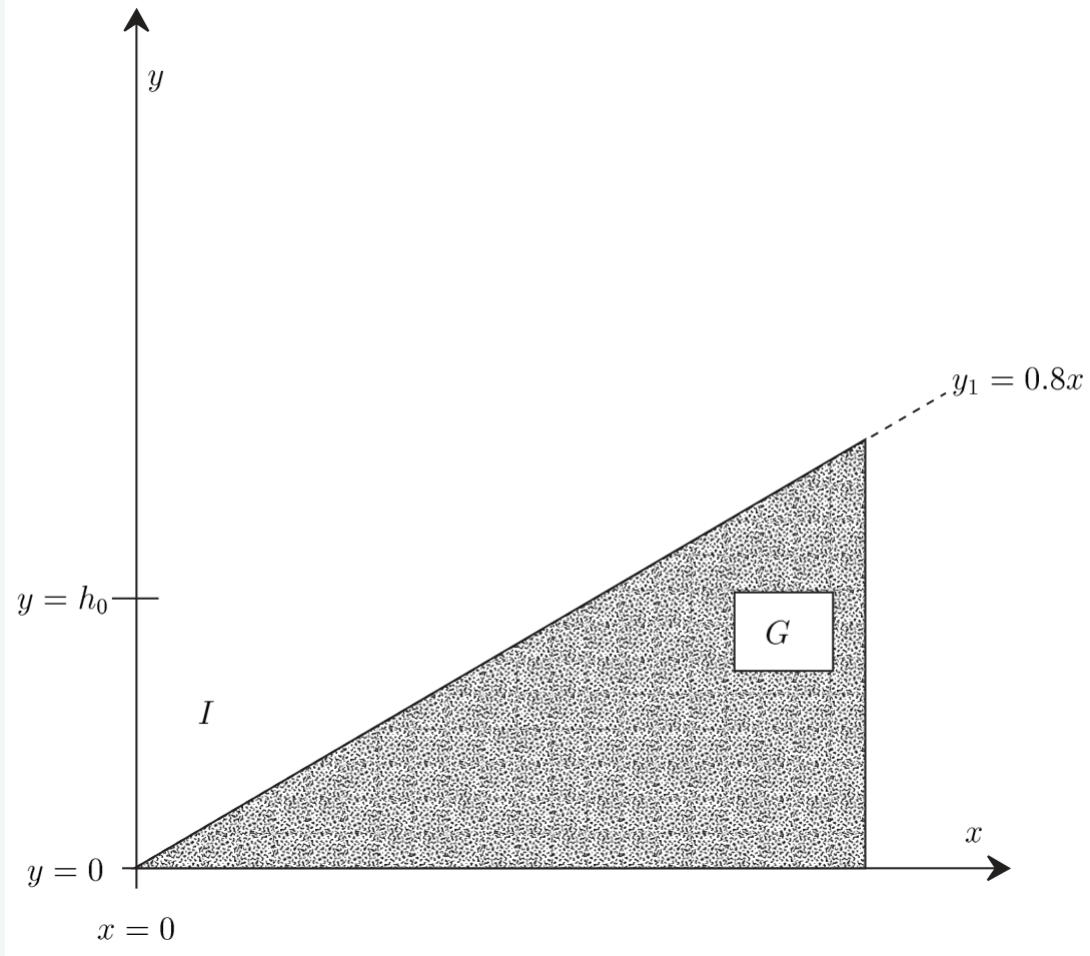
(c) (1 درجة) داخل صفيحة جليدية كبيرة على أرض أفقية، كان سمكها في الأصل ثابتاً ويساوي $D = 2.0$ km، يتشكل فجأة إلى حد ما جسم مائي مخروطي ارتفاعه $H = 1.0$ km ونصف قطره $r = 1.0$ km نتيجة انصهار الجليد (الشكل 2.3). نفترض أن الجليد المتبقي يتكيف مع ذلك بالحركة الرأسية فقط.

بين تحليلياً على ورقة إجابة فارغة، وبالرسم على ورقة إجابة بيانية، شكل سطح الغطاء الجليدي بعد تشكل مخروط الماء وبلوغ الاتزان الهيدروستاتيكي.

(d) (5 درجات) في بعثتها السنوية، تستكشف مجموعة دولية من العلماء غطاءً جليدياً معتدل الحرارة في القارة القطبية الجنوبية. تكون المنطقة عادة هضبة واسعة، لكنهم يجدون هذه المرة منخفضاً عميقاً شبيهاً بفوهة، على هيئة مخروط مقلوب، عمقه h يساوي 100 m ونصف قطره r يساوي 500 m (الشكل 2.4). سمك الجليد في المنطقة 2000 m.

بعد مناقشة، يخلص العلماء إلى أن الأرجح هو حدوث ثوران بركاني طفيف تحت الغطاء الجليدي. اندست كمية صغيرة من الصهارة (الصخر المنصهر) عند قاع الغطاء الجليدي، ثم تصلبت وبردت، مما أدى إلى انصهار حجم معين من الجليد. ويحاول العلماء، بالطريقة الآتية، تقدير حجم الجسم المندس وتكوين فكرة عما آل إليه ماء الانصهار.

افترض أن الجليد تحرك رأسياً فقط. وافترض أيضاً أن الصهارة كانت منصهرة بالكامل وعند 1200°C في البداية. وللتبسيط، افترض كذلك أن الجسم المندس كان على هيئة مخروط ذي قاعدة دائرية يقع رأسياً تحت المنخفض المخروطي في السطح. كان زمن صعود الصهارة قصيراً مقارنة بزمن التبادل الحراري في العملية. ويُفترض أن التدفق الحراري كان رأسياً في المقام الأول، بحيث يحد الحجم المنصهر من الجليد في أي وقت سطح مخروطي يتمركز فوق مركز الجسم الصهاري المندس. في ظل هذه الافتراضات، يحدث انصهار الجليد على مرحلتين. في البداية لا يكون الماء في اتزان ضغطي عند سطح الصهارة، ولذلك يجري مبتعداً. ويمكن افتراض أن درجة حرارة الماء الذي يجري مبتعداً هي 0°C . وبعد ذلك،



الشكل 2.2: مقطع عرضي لغطاء جليدي معتدل الحرارة يستقر على أرض مائلة، والماء عند قاعه في حالة اتزان. G : الأرض، I : الغطاء الجليدي.

يُبلغ الاتزان الهيدروستاتيكي، ويتراكم الماء فوق الجسم المندس بدلاً من الجريان مبتعداً.

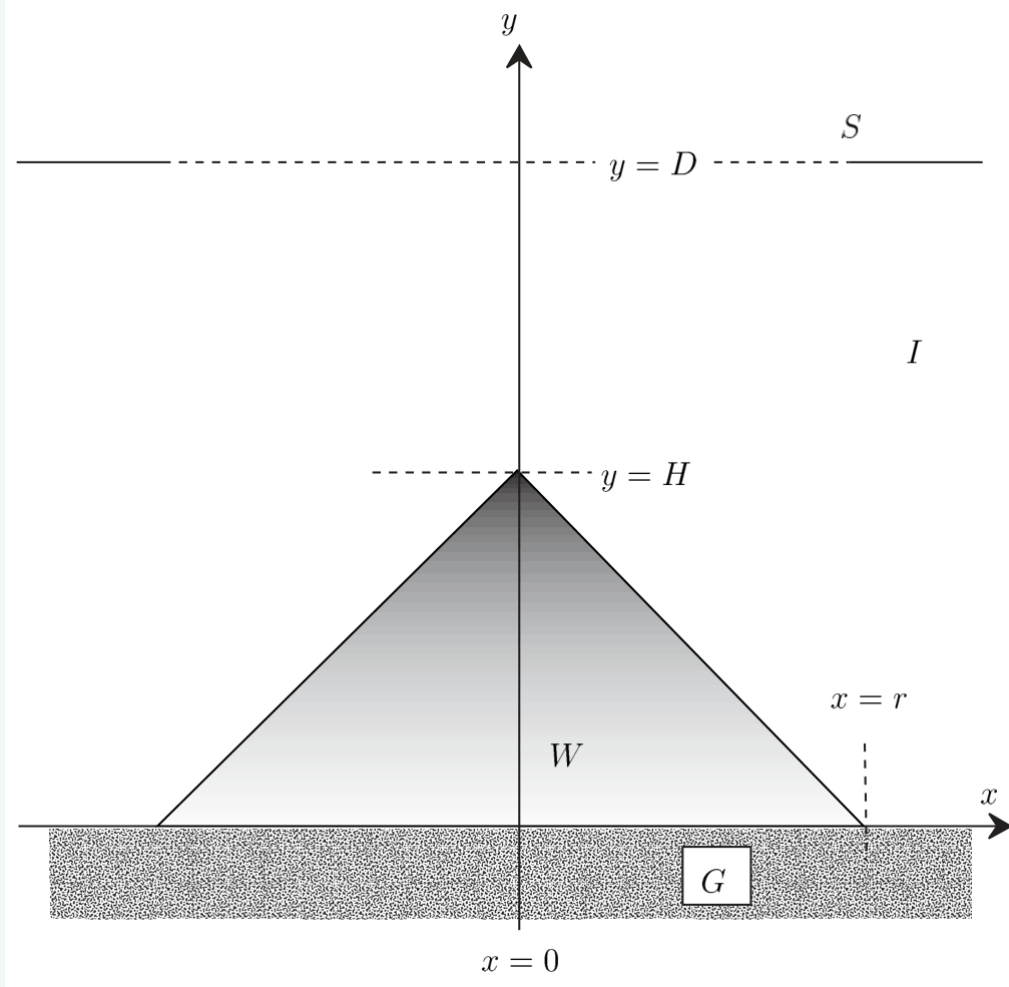
عند بلوغ الاتزان الحراري، يُطلب منك تحديد الكميات الآتية. اكتب الإجابات في ورقة الإجابة.

1. ارتفاع H قمة مخروط الماء المتشكل تحت الغطاء الجليدي، بالنسبة إلى القاع الأصلي للغطاء الجليدي.

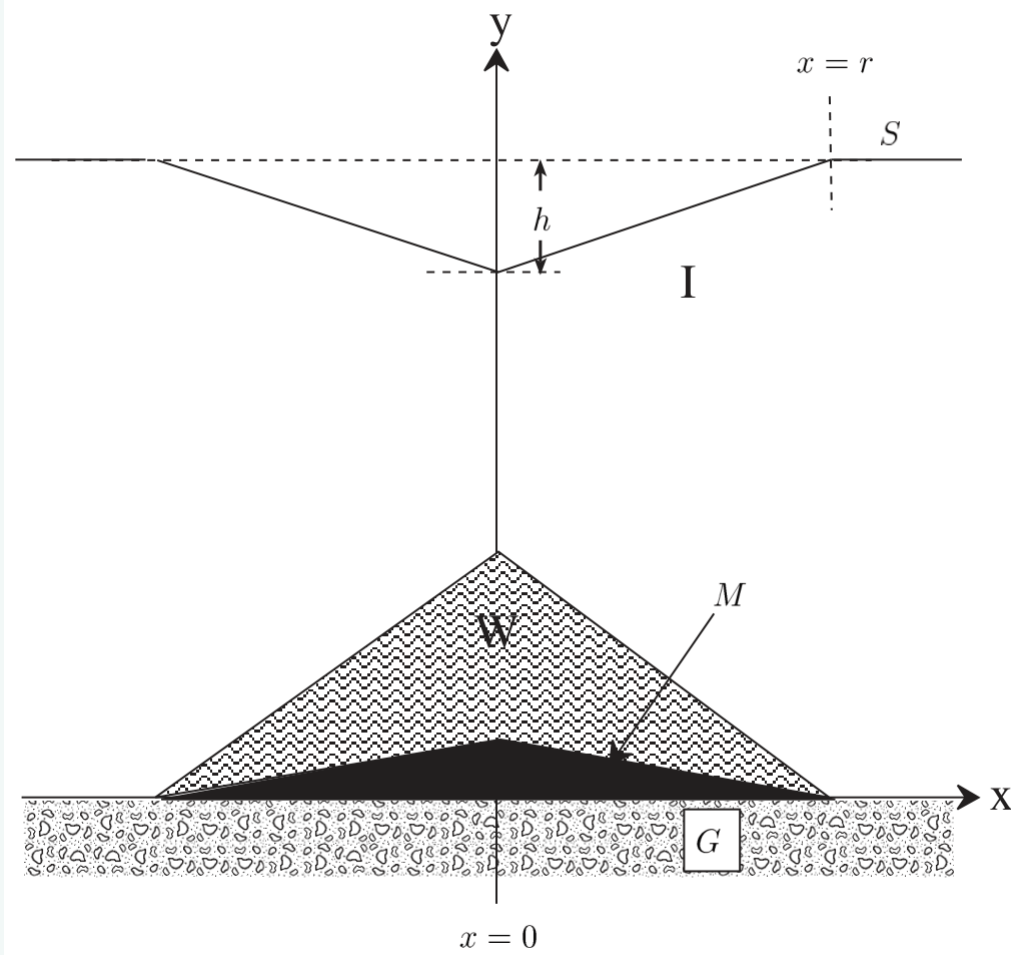
2. ارتفاع h_1 الجسم المندس.

3. الكتلة الكلية m_{tot} للماء الناتج، وكتلة m' الماء الذي يجري مبتعداً.

ارسم على ورقة إجابة بيانية، بمقياس رسم، شكلي الجسم الصخري المندس والجسم المائي المتبقي. استخدم نظام الإحداثيات المقترح في الشكل 2.4.



الشكل 2.3: مقطع رأسي يمر بالمستوى الأوسط لمخروط ماء داخل غطاء جليدي. S : السطح، W : الماء، G : الأرض، I : الغطاء الجليدي.



الشكل 2.4: مقطع عرضي رأسي ومركزي لمنخفض مخروطي في غطاء جليدي معتدل الحرارة. S : السطح، G : الأرض، I : الغطاء الجليدي، M : الجسم الصخري/الصهاري المندس، W : الماء. لاحظ أن الشكل غير مرسوم بمقياس رسم. نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- (a) السمك الذي ينصهر كل سنة هو

$$d \simeq 6.1 \times 10^{-3} \text{ m} = 6.1 \text{ mm}.$$

- (b) عند ضغط جوي منتظم p_a ,

$$p(x) - p_a = \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

يتطلب انعدام الجريان

$$\tan \beta = s \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \simeq -0.09051.$$

لرسم المطلوب، مع التعبير عن كلا الإحداثيين بالكيلومترات،

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.07241x.$$

يتقاطع المستقيمان تقريباً عند (2.293, 1.834) km.

• (c) ليكن R المسافة الأفقية من محور المخروط. يكون السطح

$$y_s(R) = \begin{cases} D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r}\right), & 0 \leq R \leq r, \\ D, & R \geq r. \end{cases}$$

وهو منخفض مخروطي نصف قطره 1.0 km وعمقه نحو 91 m. ويبلغ ارتفاعه عند المركز 1.9095 km فوق القاع.

• 1, d.

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} \simeq 1.10 \times 10^3 \text{ m.}$$

• 2, d.

$$h_1 \simeq 103 \text{ m.}$$

حجم الجسم المندس نحو $2.7 \times 10^7 \text{ m}^3$.

• 3, d.

$$m_{tot} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ kg}, \quad m' \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ kg.}$$

يتسرب نحو 9.3% من ماء الانصهار. ولرسم، عرّف $f(x) = 1 - |x|/(500 \text{ m})$ من أجل $|x| \leq 500 \text{ m}$. ويكون سطح الصخر والحد الفاصل بين الماء والجليد

$$y_M = (102.8 \text{ m})f(x), \quad y_W = (1104.8 \text{ m})f(x).$$

يشغل الماء المنطقة بين هذين السطحين.

الحل

(a) الانصهار السنوي

الجليد عند درجة انصهاره أصلاً، لذا تتحول الحرارة الجوفية المزدودة إلى حرارة كامنة. لمساحة أفقية A ، يعطي حفظ الطاقة خلال سنة واحدة

$$J_Q A t = \rho_i A d L_i.$$

إذن

$$d = \frac{J_Q t}{\rho_i L_i}.$$

باعتبار السنة الواحدة $s = 3.1536 \times 10^7 = 365 \times 24 \times 3600$.

$$d = \frac{0.06(3.1536 \times 10^7)}{(917)(3.4 \times 10^5)} = 6.069 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

وعليه ينصهر نحو 6.1 mm من الجليد كل سنة. ولا حاجة إلى الحرارة النوعية للجليد، لأن تسخيناً أولياً غير مطلوب.

(b) الضغط وشرط انعدام جريان الماء

السلك الرأسى للجليد هو

$$h_i(x) = y_2 - y_1 = h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha).$$

باستخدام النموذج المذكور، يساوي الضغط عند القاع الضغط الجوي مضافاً إليه وزن الجليد الذي يعلوه لكل وحدة مساحة أفقية:

$$p(x) = p_a + \rho_i g [h_0 + x(\tan \beta - \tan \alpha)].$$

إذا قيس الضغط بالنسبة إلى الضغط الجوي، يُحذف الحد p_a .

للماء الساكن، يتطلب الاتزان الهيدروستاتيكي

$$p + \rho_w g y = \text{ثابت}.$$

على امتداد طبقة الماء الرقيقة، $y = y_1(x)$ ، لذا يكون شرط انعدام الجريان

$$\frac{dp}{dx} + \rho_w g \frac{dy_1}{dx} = 0.$$

بالتعويض عن الضغط وميل الأرض،

$$\rho_i g (\tan \beta - \tan \alpha) + \rho_w g \tan \alpha = 0.$$

وبالتالي،

$$\tan \beta = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i} \tan \alpha, \quad s = \frac{\rho_i - \rho_w}{\rho_i}.$$

عددياً،

$$s = \frac{917 - 1000}{917} = -0.0905125.$$

تعني الإشارة السالبة أن سطح الجليد يجب أن ينحدر إلى أسفل في الاتجاه الذي ترتفع فيه الأرض.

من أجل $y_1 = 0.8x$ و $h_0 = 2 \text{ km}$

$$\tan \beta = (-0.0905125)(0.8) = -0.0724100,$$

ف نحصل، مع التعبير عن x و y بالكيلومترات، على

$$y_1 = 0.8x, \quad y_2 = 2.000 - 0.0724100x.$$

ارسم الأرض على هيئة خط مستقيم صاعد يمر بنقطة الأصل، و سطح الجليد على هيئة خط قليل الانحدار إلى أسفل يمر بالنقطة $(0, 2)$. ومن الإحداثيات المفيدة للرسم:

x (km)	الأرض y_1 (km)	سطح الجليد y_2 (km)
0	0	2.000
1.000	0.800	1.928
2.000	1.600	1.855
2.2925	1.834	1.834

من أجل $x \geq 0$ ، يقع الجليد بين هذين المستقيمين حتى نقطة تقاطعهما.

(c) السطح فوق جسم مائي مخروطي

ليكن $z(R)$ ارتفاع الحد الفاصل بين الجليد والماء فوق القاع الأفقي:

$$z(R) = H \left(1 - \frac{R}{r} \right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

عند الحافة، يؤول سمك الماء إلى الصفر، ويحتفظ الجليد بسمكه الأصلي D . ومن ثم يكون ضغط الماء عند مستوى القاع

$$p_b = p_a + \rho_i g D.$$

يعطي الاتزان الهيدروستاتيكي الضغط عند الارتفاع z :

$$p_w(z) = p_a + \rho_i g D - \rho_w g z.$$

سمك عمود الجليد فوق تلك النقطة هو $y_s - z$ ، ولذلك يؤثر بضغط

$$p_i = p_a + \rho_i g (y_s - z).$$

بمساواة الضغطين عند الحد الفاصل بين الجليد والماء،

$$\rho_i(y_s - z) = \rho_i D - \rho_w z.$$

إذن

$$y_s = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} z.$$

بالتعويض عن الحد الفاصل المخروطي نحصل على

$$y_s(R) = D - \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H \left(1 - \frac{R}{r}\right), \quad 0 \leq R \leq r.$$

خارج المسقط الأفقي للمخروط، $y_s = D$. ويكون عمق المنخفض

$$\delta = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H = \frac{83}{917}(1000 \text{ m}) = 90.51 \text{ m}.$$

وعليه يكون السطح مخروطاً مقلوباً نصف قطره 1.0 km، يلتقي بالسطح الأفقي المحيط به اتصالاً مستمراً. وتقع أدنى نقطة له عند

$$y_s(0) = 2000 - 90.51 = 1909.49 \text{ m}.$$

لرسم مقطع رأسي مركزي، ضع $R = |x|$. وبإحداثيات معبر عنها بالكيلومترات، صل النقاط

$$(-1.000, 2.000), \quad (0, 1.90949), \quad (1.000, 2.000)$$

بقطع مستقيمة، ثم واصل أفقياً عند $y = 2.000 \text{ km}$ على الجانبين. ويعطي تدوير هذا المقطع حول المحور الرأسي المنخفض السطحي.

(d) الاندساس البركاني

لتكن

$$f(R) = 1 - \frac{R}{r}, \quad 0 \leq R \leq r,$$

حيث $r = 500 \text{ m}$. يتخذ السطح النهائي، والحد الفاصل بين الماء والجليد، وسطح الصخر الصور الآتية

$$y_s = D - hf(R), \quad y_W = Hf(R), \quad y_M = h_1 f(R).$$

هنا $D = 2000 \text{ m}$ و $h = 100 \text{ m}$.

1. ارتفاع قمة مخروط الماء

تنطبق مرة أخرى العلاقة الهيدروستاتيكية المشتقة في الجزء C:

$$D - y_s = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} y_W.$$

عند المركز،

$$h = \frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} H.$$

ومن ثم

$$H = \frac{\rho_i h}{\rho_w - \rho_i} = \frac{917(100)}{83} = 1104.82 \text{ m}.$$

يُقاس هذا الارتفاع من القاع الأصلي. وسيكون عمق الماء الفعلي عند المركز $H - h_1$.

2. ارتفاع الجسم المهندس

نحدد أولاً مقدار الجليد الذي انصهر. السمك النهائي للجليد في عمود رأسي هو

$$y_s - y_W = D - (h + H)f(R).$$

بما أن الجليد يتحرك رأسياً فقط، يفقد كل عمود سمكاً من الجليد مقداره

$$(h + H)f(R).$$

لا يغير الرفع الأولي بفعل الصهارة كمية الجليد في العمود. ومن ثم يكون الحجم الكلي للجليد المنصهر

$$V_{\text{melt}} = \int_0^r (h + H) \left(1 - \frac{R}{r}\right) 2\pi R dR = \frac{\pi r^2}{3} (h + H).$$

نكتب

$$C = \frac{\pi r^2}{3}.$$

عندئذ

$$m_{\text{tot}} = \rho_i C(h + H), \quad V_M = Ch_1, \quad m_M = \rho_r Ch_1.$$

عند الاتزان الحراري النهائي، يكون الصخر ومزيج الجليد والماء عند 0°C . ويطلق كل كيلوغرام من الصهارة

$$q_M = L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0) = 4.2 \times 10^5 + 700(1200) = 1.26 \times 10^6 \text{ J/kg}.$$

يشمل ذلك كلاً من التصلب والتبريد. وبإهمال الفوائد الحرارية والتغيرات الصغيرة في الطاقة الميكانيكية، يعطي حفظ الطاقة

$$\rho_r Ch_1 q_M = \rho_i C(h + H) L_i.$$

وعليه

$$h_1 = \frac{\rho_i (h + H) L_i}{\rho_r [L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

وتقتضي العلاقة الهيدروستاتيكية أيضاً

$$\rho_i (h + H) = \rho_w H,$$

لذا، بصورة مكافئة،

$$h_1 = \frac{\rho_w H L_i}{\rho_r [L_r + c_r(1200^\circ\text{C} - T_0)]}.$$

عددياً،

$$h_1 = \frac{1000(1104.819)(3.4 \times 10^5)}{2900(1.26 \times 10^6)} = 102.80 \text{ m} \simeq 103 \text{ m}.$$

وبالتالي يكون حجم الجسم المندس

$$V_M = \frac{\pi(500)^2}{3} (102.802) = 2.691 \times 10^7 \text{ m}^3.$$

3. إجمالي الماء الناتج والماء المتسرب

من حجم الجليد المنصهر،

$$m_{\text{tot}} = \rho_i C(h + H) = \rho_w CH.$$

إن

$$m_{\text{tot}} = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3} (1104.819) = 2.8924 \times 10^{11} \text{ kg} \simeq 2.9 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

يشغل الماء المتبقي الحيز بين مخروط الحد الفاصل بين الماء والجليد ومخروط الصخر. وحجمه هو

$$V_{\text{remaining}} = C(H - h_1),$$

وكتلته هي

$$m_{\text{remaining}} = \rho_w C(H - h_1) = 2.6233 \times 10^{11} \text{ kg}.$$

ومن ثم يعطي حفظ الكتلة

$$\begin{aligned}
m' &= m_{tot} - m_{\text{remaining}} \\
&= \rho_w CH - \rho_w C(H - h_1) \\
&= \rho_w Ch_1.
\end{aligned}$$

ومن ثم

$$m' = 1000 \frac{\pi(500)^2}{3} (102.802) = 2.6914 \times 10^{10} \text{ kg} \simeq 2.7 \times 10^{10} \text{ kg}.$$

يساوي حجم الماء المتسرب حجم الجسم المندس:

$$\frac{m'}{\rho_w} = V_M.$$

وهذا يفسر أيضًا المرحلتين. في البداية ترفع الصحارة الجليد دون أن تقلل سمكه، لذا يكون للماء على سطح الصخر المرتفع ضغط هيدروليكي زائد فيتسرب مبتعدًا. وفي نهاية مرحلة التصريف هذه، يكون الحد الفاصل بين الجليد والماء منطبقًا تقريبًا على سطح الصخر $h_1 f(R)$. ويتطلب الاتزان الهيدروستاتيكي عندئذ سمكًا للجليد مقداره

$$D - \frac{\rho_w}{\rho_i} h_1 f(R).$$

كتلة الجليد الذي انصهر حتى تلك المرحلة هي $\rho_w Ch_1$ ، وهي تساوي تمامًا الكتلة المتسربة المحسوبة أعلاه. وينتج عن مزيد من الانصهار الجسم المائي المحتجز.

وصف الرسم

لمقطع رأسي مركزي، استخدم $R = |x|$. ضمن $|x| \leq 500 \text{ m}$ ،

$$y_M(x) = 102.802 \left(1 - \frac{|x|}{500}\right) \text{ m},$$

$$y_W(x) = 1104.819 \left(1 - \frac{|x|}{500}\right) \text{ m},$$

$$y_s(x) = 2000 - 100 \left(1 - \frac{|x|}{500}\right) \text{ m},$$

حيث يُعبر عن x عدديًا بالأمتار.

استخدم الإحداثيات الآتية، وصل النقاط المتجاورة بخطوط مستقيمة:

x (m)	سطح الصخر y_M (m)	الحد الفاصل بين الماء والجليد y_W (m)	سطح الجليد y_s (m)
-500	0	0	2000
-250	51.4	552.4	1950
0	102.8	1104.8	1900
250	51.4	552.4	1950
500	0	0	2000

ارسم القاع الأصلي على امتداد $y = 0$ ، وظلّ الجسم المندس بين القاع و y_M ، وظلّ الماء بين y_M و y_W . يقع الجليد بين y_W و y_s . وخارج المسقط الأفقي للمخروط، يبقى القاع عند $y = 0$ و سطح الجليد عند $y = 2000 \text{ m}$.

باستخدام مقياسي طول متساويين على المحورين، يبلغ ارتفاع الجسم المندس نحو 103 m فقط، بينما يصل الحد الفاصل للماء إلى نحو 1105 m . وعمق الماء عند المركز هو

$$H - h_1 \simeq 1002 \text{ m},$$

المسألة 3: أسرع من الضوء؟

في هذه المسألة نحلل ونفسر قياسات أُجريت عام 1994 للانبعاث الراديوي من مصدر مركب داخل مجرتنا.

ضُبط جهاز الاستقبال على نطاق عريض من الموجات الراديوية ذات أطوال موجية تبلغ عدة سنتيمترات. يبين الشكل 3.1 سلسلة من الصور المسجلة في أوقات مختلفة. تشير خطوط التساوي إلى شدة إشعاع ثابتة، على نحو يشبه إلى حد بعيد خطوط تساوي الارتفاع على خريطة جغرافية. تُفسر القمتان في الشكل على أنهما تمثّلان جسمين يبتعدان عن مركز مشترك تشير إليه علامات تقاطع في الصور. (وهذا المركز، الذي يُفترض أنه ثابت في الفضاء، مصدر قوي للإشعاع أيضاً، ولكن أساساً عند أطوال موجية أخرى). أُجريت القياسات في التواريخ المختلفة في الوقت نفسه من اليوم.

يُعطى مقياس الشكل بقطعة مستقيمة تمثل ثانية قوسية واحدة (as). ($1 \text{ as} = 1/3600$ من الدرجة). تُقدّر المسافة إلى الجرم السماوي الواقع في مركز الشكل، والمشار إليه بعلامات التقاطع، بأنها $R = 12.5 \text{ kpc}$. يساوي الكيلوفرسخ الفلكي (kpc) مقدار $3.09 \cdot 10^{19} \text{ m}$. سرعة الضوء هي $c = 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. لا يُطلب حساب الأخطاء في الحل.

(a) (درجتان) نرمز إلى الموضعين الزاويين للمصدرين الراديويين المقذوفين، بالنسبة إلى المركز المشترك، بالرمزين $\theta_1(t)$ و $\theta_2(t)$ ، حيث يشير الدليلان 1 و 2 إلى المصدر الأيسر والمصدر الأيمن، على الترتيب، ويمثل t زمن الرصد. السرعتان الزاويتان، كما تُريان من الأرض، هما ω_1 و ω_2 . ونرمز إلى السرعتين الخطيتين العرضيتين الظاهريتين المناظرتين للمصدرين بالرمزين $v'_{1,\perp}$ و $v'_{2,\perp}$.

باستخدام الشكل 3.1، ارسم رسماً بيانياً لإيجاد القيمتين العدديتين لـ ω_1 و ω_2 بوحدة ملي ثانية قوسية في اليوم (mas/d). حدد أيضاً القيمتين العدديتين لـ $v'_{1,\perp}$ و $v'_{2,\perp}$ ، واكتب جميع الإجابات على ورقة الإجابة. (قد تثير بعض النتائج حيرتك).

(b) (3 درجات) لحل اللغز الناشئ في الجزء (a)، انظر في مصدر ضوئي يتحرك بسرعة متجهة $\vec{v}$ تصنع زاوية ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) مع الاتجاه نحو راصد بعيد O (الشكل 3.2). يمكن كتابة مقدار السرعة على الصورة $v = \beta c$ ، حيث c سرعة الضوء. المسافة إلى المصدر، كما يقيسها الراصد، هي R . السرعة الزاوية للمصدر، كما يراها الراصد، هي ω ، والسرعة الخطية الظاهرية العمودية على خط النظر هي $v'_\perp$.

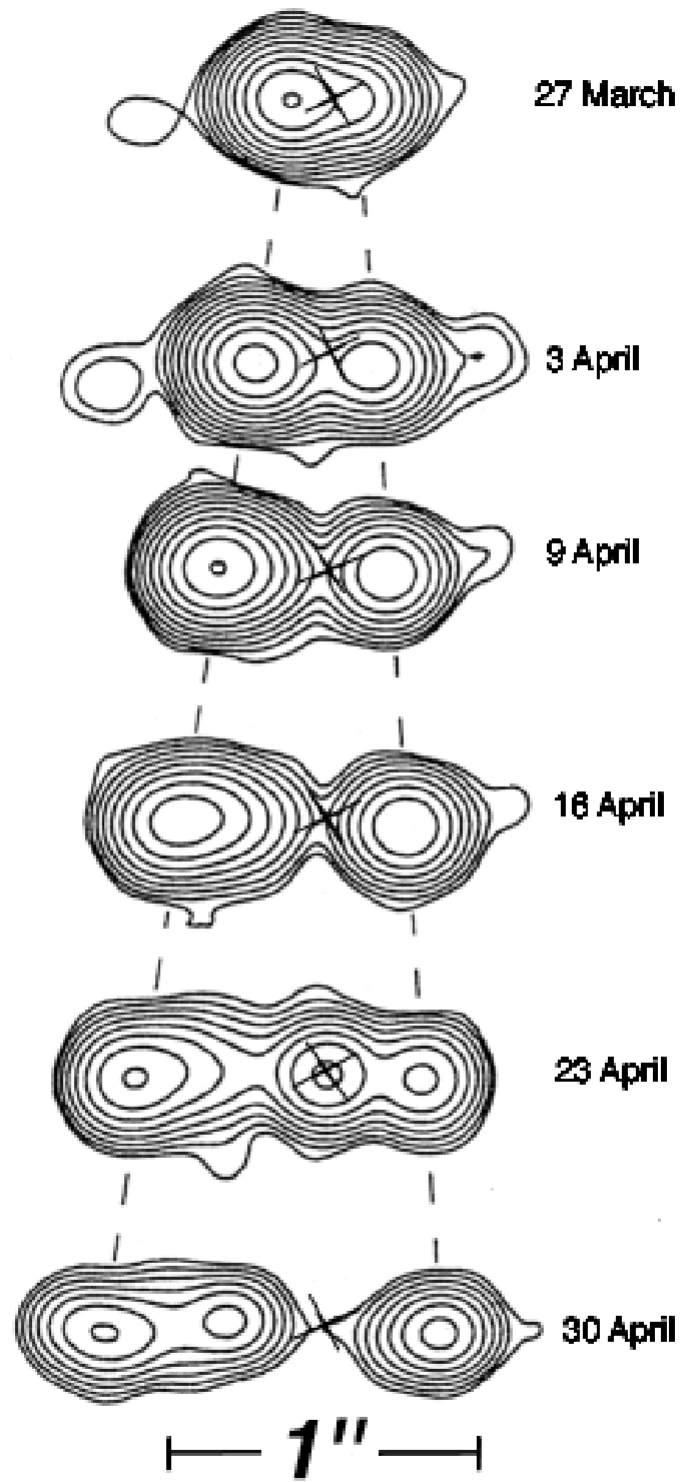
أوجد ω و $v'_\perp$ بدلالة β و R و ϕ ، واكتب إجابتك على ورقة الإجابة.

(c) (درجة واحدة) نفترض أن الجسمين المقذوفين، الموصوفين في المقدمة وفي الجزء (a)، يتحركان في اتجاهين متعاكسين بمقداري سرعة متساويين $v = \beta c$. عندئذ تتيج نتائج الجزء (b) حساب β و ϕ من السرعتين الزاويتين ω_1 و ω_2 والمسافة R . هنا تمثل ϕ الزاوية المعروفة في الجزء (b) للجسم الأيسر، الموافق للدليل 1 في الجزء (a).

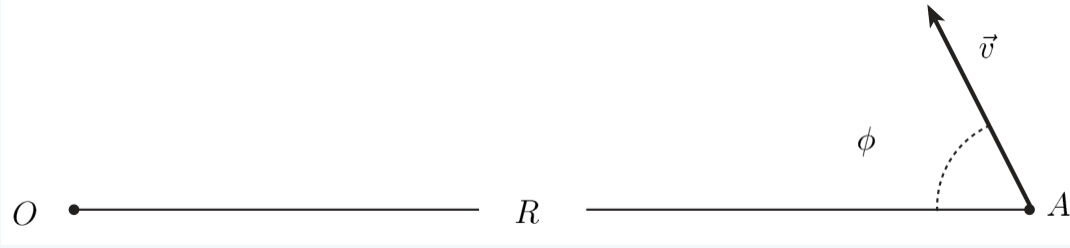
اشتق صيغتين لـ β و ϕ بدلالة الكميات المعروفة، وحدد قيمتيهما العدديتين من بيانات الجزء (a). اكتب إجابتك في الخانات المخصصة على ورقة الإجابة.

(d) (درجتان) في حالة الجسم الواحد الواردة في الجزء (b)، أوجد الشرط اللازم لكي تكون السرعة الظاهرية العمودية $v'_\perp$ أكبر من سرعة الضوء c .

⁷ المؤلفون: Thorsteinn Vilhjálmsson و Knútur Árnason و Einar Gudmundsson



الشكل 3.1: انبعاث راديوي من مصدر في مجرتنا.



الشكل 3.2: يقع الراصد عند O ، والموضع الأصلي للمصدر الضوئي عند A . متجه السرعة هو $\vec{v}$.

اكتب الشرط على الصورة $\beta > f(\phi)$ ، وقدم تعبيراً تحليلياً للدالة f على ورقة الإجابة.

ارسم على ورقة الإجابة البيانية المنطقة ذات المعنى الفيزيائي من المستوى (β, ϕ) . وبين بالتظليل الجزء من هذه المنطقة الذي يتحقق فيه الشرط $v'_{\perp} > c$.

(e) (درجة واحدة) مع الاستمرار في حالة الجسم الواحد الواردة في الجزء (b)، أوجد تعبيراً للقيمة العظمى $(v'_{\perp})_{\max}$ للسرعة الظاهرية العمودية $v'_{\perp}$ عند قيمة معطاة لـ β ، واكتبه في الخانة المخصصة على ورقة الإجابة. لاحظ أن هذه السرعة تزداد بلا حد عندما $\beta \rightarrow 1$.

(f) (درجة واحدة) تقدير R المعطى في المقدمة ليس موثقاً جداً. لذلك بدأ العلماء يفكرون في طريقة أفضل وأكثر مباشرة لتحديد R . وتقوم إحدى الأفكار على ما يلي. افترض أننا نستطيع تحديد وقياس الطولين الموجيين λ_1 و λ_2 ، المزاخين بفعل دوبلر، للإشعاع الصادر عن الجسمين المقذوفين، والموافقين للطول الموجي الأصلي المعلوم نفسه λ_0 في إطار سكوت الجسمين.

انطلاقاً من معادلات انزياح دوبلر النسبي، $\lambda = \lambda_0(1 - \beta \cos \phi)(1 - \beta^2)^{-1/2}$ ، وبافتراض أن الجسمين لهما مقدار السرعة نفسه، v ، كما سبق، بين أن المجهول $\beta = v/c$ يمكن التعبير عنه بدلالة λ_0 ، λ_1 ، و λ_2 على الصورة

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}. \quad (3.1)$$

اكتب القيمة العددية للمعامل α في الخانة المخصصة على ورقة الإجابة.

يمكنك ملاحظة أن هذا يعني أن قياسات الأطوال الموجية المقترحة ستوفر عملياً تقديراً جديداً للمسافة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) قيم نموذجية مستخلصة من الرسم البياني هي

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

ومن ثم،

$$v'_{1,\perp} \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c, \quad v'_{2,\perp} \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

• (b)

$$\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}, \quad v'_{\perp} = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

• (c) مع التعبير عن السرعات الزاوية بالراديان لكل وحدة زمن، نعرّف

$$X = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad Y = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

عندئذ

$$\beta = \sqrt{X^2 + Y^2} \simeq 0.92, \quad \phi = \arccos\left(\frac{X}{\beta}\right) \simeq 70^\circ.$$

الجسم الأيسر يقترب.

• (d) المنطقة التي تتجاوز فيها السرعة الظاهرية سرعة الضوء هي

$$0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.$$

إذن $f(\phi) = 1/(\sin \phi + \cos \phi)$ في المجال الزاوي المعني. وتتطلب هذه الحركة $\beta > 1/\sqrt{2}$.

• (e)

$$(v'_\perp)_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

• (f)

$$\alpha = 4, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}.$$

الحل

(a) الحركات الزاوية والسرعات العرضية الظاهرية

نأخذ $t = 0$ في 27 مارس. نقيس البعد الزاوي لكل مكوّن عن علامة التقاطع في صورته، باستخدام طول المقياس المحدد كاملاً بوصفه $1'' = 1000 \text{ mas}$. نتتبع المكوّنين المتحركين إلى الخارج والمشار إليهما بالمسارين المتقطعين. نستخدم أبعاداً زاوية موجبة على جانبي المركز.

القراءات التقريبية من الشكل المعطى هي:

التاريخ	t (أيام)	θ_1 (ثوانٍ قوسية)	θ_2 (ثوانٍ قوسية)
27 مارس	0	0.12	0.07
3 أبريل	7	0.22	0.14
9 أبريل	13	0.35	0.20
16 أبريل	20	0.46	0.26
23 أبريل	27	0.61	0.31
30 أبريل	34	0.70	0.38

نرسم t على المحور الأفقي والبعد الزاوي على المحور الرأسي. تقع كل مجموعة من النقاط تقريباً على خط مستقيم؛ ويكون ميل خط المكوّن الأيسر أكبر. ومن الخطوط النموذجية

$$\frac{\theta_1}{\text{arcsec}} \simeq 0.11 + 0.0175 \frac{t}{\text{d}}, \quad \frac{\theta_2}{\text{arcsec}} \simeq 0.08 + 0.0090 \frac{t}{\text{d}}.$$

إنّ مقطعا الخطين على المحور الرأسي يساويان تقريباً $0.11''$ و $0.08''$ ، ويعطي ميلهما

$$\omega_1 \simeq 17.5 \text{ mas/d}, \quad \omega_2 \simeq 9.0 \text{ mas/d}.$$

الزوايا صغيرة للغاية، لذا فإن الإزاحة العرضية الموافقة لإزاحة زاوية θ هي $R\theta$. ومن ثم،

$$v'_{i,\perp} = R\omega_i,$$

حيث يجب التعبير عن ω_i بالراديان في الثانية. التحويلات المطلوبة هي

$$R = 12.5(3.09 \times 10^{19}) = 3.8625 \times 10^{20} \text{ m},$$

$$1 \text{ mas} = \frac{\pi}{180 \times 3600 \times 1000} \text{ rad} = 4.8481 \times 10^{-9} \text{ rad},$$

وبالتالي

$$1 \text{ mas/d} = 5.6113 \times 10^{-14} \text{ rad/s}.$$

عند المسافة المذكورة، تقابل 1 mas/d سرعة مقدارها

$$R(5.6113 \times 10^{-14}) = 2.1674 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

وعليه

$$v'_{1,\perp} \simeq 17.5(2.1674 \times 10^7) \simeq 3.8 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 1.3c,$$

$$v'_{2,\perp} \simeq 9.0(2.1674 \times 10^7) \simeq 2.0 \times 10^8 \text{ m/s} \simeq 0.65c.$$

تتجاوز القيمة الأولى c . تُحسب هذه السرعات باستخدام الفاصل الزمني بين وصول الإشارات إلى الأرض؛ وهذا الفاصل يختلف عن الفاصل بين انبعاثاتها.

(b) تأثير زمن انتقال الضوء

نعمل في الإطار العطالي الذي يكون فيه الراصد والمصدر المركزي ساكنين. لنفترض انبعاث إشارتين بفاصل زمني Δt_e في هذا الإطار. خلال هذا الفاصل، يتحرك المصدر مسافة عرضية

$$\Delta x_{\perp} = v \sin \phi \Delta t_e.$$

وإزاحته نحو الراصد هي

$$\Delta x_{\parallel} = v \cos \phi \Delta t_e.$$

بالنسبة إلى راصد بعيد، يكون مسار الإشارة الثانية أقصر بمقدار يقارب $\Delta x_{\parallel}$. لذلك فإن الفاصل بين زماني الوصول هو

$$\Delta t_{\text{obs}} = \Delta t_e - \frac{\Delta x_{\parallel}}{c} = (1 - \beta \cos \phi) \Delta t_e.$$

يشمل التعبير نفسه حالة مصدر مبتعد: عندئذ $\cos \phi < 0$ ، فتقطع الإشارة الثانية مسافة أطول.

الإزاحة الزاوية، في تقريب الزوايا الصغيرة، هي

$$\Delta \theta \simeq \frac{\Delta x_{\perp}}{R}.$$

إن

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t_{\text{obs}}} = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}$$

و

$$v'_{\perp} = R\omega = \frac{\beta c \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}.$$

هنا تكون إزاحة المصدر مهمة مقارنةً بـ R ، مما يسمح باعتبار R و ϕ ثابتتين خلال الرصد.

بالنسبة إلى مصدر مقترب، تصل الإشارات المتتالية بفواصل زمنية أقصر من فواصل انبعاثها. وقد تعطي قسمة الإزاحة العرضية على هذا الفاصل المختصر $v'_{\perp} > c$ ، مع أن السرعة الفعلية للمصدر تبقى $v = \beta c < c$.

(c) استنتاج السرعة الحقيقية والاتجاه

يصنع الاتجاهان زاويتين ϕ و $\pi - \phi$ مع الاتجاه نحو الراصد. يتساوى مقداراً مركبتي السرعة العرضيتين، بينما تكون للمركبتين الشعاعيتين إشارتان متعاكستان. لذلك،

$$\frac{R\omega_1}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi}, \quad \frac{R\omega_2}{c} = \frac{\beta \sin \phi}{1 + \beta \cos \phi}.$$

نضع

$$X = \beta \cos \phi, \quad Y = \beta \sin \phi.$$

عندئذ

$$\omega_1(1 - X) = \omega_2(1 + X) = \frac{cY}{R}.$$

بمساواة التعبيرين الأولين نحصل على

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

بالتعويض في أي من معادلتَي السرعة الزاوية نحصل على

$$Y = \beta \sin \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 + \omega_2)}.$$

ومن ثم،

$$\beta = \frac{\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + (2R\omega_1\omega_2/c)^2}}{\omega_1 + \omega_2}$$

وتعبير صالح في كامل المجال $0 \leq \phi \leq \pi$ هو

$$\phi = \arccos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta(\omega_1 + \omega_2)} \right].$$

في هذه الأرصاد، $\omega_1 > \omega_2$ ، لذا فإن ϕ حادة. ويمكننا أيضاً استخدام

$$\tan \phi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{c(\omega_1 - \omega_2)}.$$

باستخدام قيم السرعتين النموذجية من (a)،

$$X \simeq \frac{17.5 - 9.0}{17.5 + 9.0} \simeq 0.321, \\ Y \simeq 0.859.$$

إن

$$\beta \simeq \sqrt{0.321^2 + 0.859^2} \simeq 0.917, \quad \phi \simeq 69.5^\circ.$$

بالدقة التي يتيحها الرسم البياني،

$$\boxed{\beta \simeq 0.92, \quad \phi \simeq 70^\circ.}$$

السرعة الحقيقية تساوي تقريباً $2.8 \times 10^8 \text{ m/s}$. وبما أن $\beta \cos \phi > 0$ ، فإن المكوّن الأيسر يقترب والمكوّن الأيمن يبتعد.

(d) شرط الحركة الظاهرية الأسرع من الضوء ومنطقتها

بالنسبة إلى مصدر مادي، $0 \leq \beta < 1$. ومن ثم $1 - \beta \cos \phi > 0$ ، ويصبح الشرط $v'_\perp > c$

$$\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} > 1,$$

أو

$$\boxed{\beta(\sin \phi + \cos \phi) > 1.}$$

عندما $\phi \geq \pi/2$ ، يكون مقام $v'_\perp/c$ مساوياً للواحد على الأقل، بينما لا يتجاوز بسطه $\beta < 1$. لذلك تستحيل الحركة الظاهرية الأسرع من الضوء لمصدر مبتعد أو متحرك في اتجاه عرضي تماماً. كما أنها مستحيلة عند $\phi = 0$ ، حيث تنعدم الحركة العرضية.

ضمن المجال المعني $0 < \phi < \pi/2$ ،

$$\boxed{\beta > f(\phi), \quad f(\phi) = \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi}.}$$

إذن الشرط الفيزيائي الكامل هو

$$\boxed{0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi} < \beta < 1.}$$

في الرسم المطلوب، تحقق المنطقة ذات المعنى الفيزيائي

$$0 \leq \beta < 1, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

مع وضع ϕ على المحور الأفقي و β على المحور الرأسي، نرسم منحنى العتبة على المجال $0 \leq \phi \leq \pi/2$. ومن النقاط المفيدة لرسمه:

$f(\phi)$	ϕ
1	0
0.732	$\pi/6$
$1/\sqrt{2} \simeq 0.707$	$\pi/4$
0.732	$\pi/3$
1	$\pi/2$

المنحنى متناظر حول $\phi = \pi/4$. يتناقص من 1 إلى قيمته الصغرى $1/\sqrt{2}$ ، ثم يرتفع إلى 1. نظل المنطقة الواقعة فوق هذا المنحنى تماماً وتحت $\beta = 1$ تماماً. وعلى منحنى العتبة نفسه تكون $v'_\perp = c$ ، لذا يُستثنى من التظليل. ولا تُظلل أي منطقة عند $\phi \geq \pi/2$.

بما أن

$$\sin \phi + \cos \phi = \sqrt{2} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2},$$

فإن هذه المنطقة لا توجد إلا عندما

$$\boxed{\beta > \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

وبصورة مكافئة، لأي قيمة ثابتة $\beta > 1/\sqrt{2}$ ، يكون امتدادها الزاوي

$$\left| \phi - \frac{\pi}{4} \right| < \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}\beta}\right).$$

(e) السرعة العرضية الظاهرية العظمى

عند تثبيت $0 < \beta < 1$ ، نشق نتيجة (b):

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{v'_{\perp}}{c} \right) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} \right) = \frac{\beta(\cos \phi - \beta)}{(1 - \beta \cos \phi)^2}.$$

تتغير إشارة المشتقة من موجبة إلى سالبة حيث

$$\cos \phi = \beta.$$

بما أن السرعة العرضية الظاهرية تنعدم عند كل من $\phi = 0$ و $\phi = \pi$ ، فإن هذه النقطة الساكنة تمثل القيمة العظمى المطلقة. وعند تلك الزاوية،

$$\sin \phi = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad 1 - \beta \cos \phi = 1 - \beta^2.$$

لذلك،

$$(v'_{\perp})_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \phi_{\max} = \arccos \beta.$$

عندما $\beta \rightarrow 1^-$ ، يؤول المقام إلى الصفر وتزداد السرعة الظاهرية العظمى بلا حد. وعند $\beta = 0$ ، تكون السرعة الظاهرية صفرًا عند كل زاوية.

(f) تحديد β من انزياحي دوبلر

لتكن

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

بالنسبة إلى الجسم الأول، تكون صيغة دوبلر المعطاة

$$\lambda_1 = \lambda_0 \gamma (1 - \beta \cos \phi).$$

بالنسبة إلى الجسم المتحرك في الاتجاه المعاكس، $\cos(\pi - \phi) = -\cos \phi$ ، مما يعطي

$$\lambda_2 = \lambda_0 \gamma (1 + \beta \cos \phi).$$

بجمع هذين التعبيرين يُحذف الاعتماد على الاتجاه:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0 \gamma = \frac{2\lambda_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

إن

$$1 - \beta^2 = \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2},$$

وبأخذ مقدار السرعة غير السالب،

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}, \quad \alpha = 4.$$

يوضح هذا أيضًا كيفية إيجاد المسافة. فالحركات الزاوية تحدد

$$X = \beta \cos \phi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2},$$

بينما تحدد الأطوال الموجية β . لذلك $\beta \sin \phi = \sqrt{\beta^2 - X^2}$ ، وتعطي العلاقة المشتقة في (c)

$$R = \frac{c(\omega_1 + \omega_2)}{2\omega_1\omega_2} \sqrt{\beta^2 - X^2}.$$

وهكذا تحدد قياسات الزوايا والأطوال الموجية مجتمعةً R دون اعتماد تقديرها الأولي.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.