

IPhO 1997

理论题与解答 · 加拿大萨德伯里 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1997/

题目 1: 标度关系

- (a) 一个小物体悬挂在质量可忽略的理想弹簧末端，以固有频率 f 上下振动。如果将弹簧切成两半，并将该物体重新悬挂在其中一半的末端，新的频率 f' 是多少？ (1.5 分)
- (b) 基态氢原子的半径为 $a_0 = 0.0529 \text{ nm}$ （即“玻尔半径”）。如果用一个电荷与电子相同、质量为电子质量 207 倍的 μ 子替代电子，所形成的“ μ 子氢”原子的半径 a' 是多少？假设质子的质量远大于 μ 子和电子的质量。 (2 分)
- (c) 地球的平均温度为 $T = 287 \text{ K}$ 。如果地球与太阳之间的平均距离减小 1%，新的平均温度 T' 是多少？ (2 分)
- (d) 某一天，空气干燥，密度为 $\rho = 1.2500 \text{ kg/m}^3$ 。第二天，湿度增加，水蒸气占空气总质量的 2%。气压和温度与前一天相同。此时空气密度 ρ' 是多少？ (2 分)
- 干空气的平均摩尔质量：28.8 (g/mol)
水的摩尔质量：18 (g/mol)
- 假设气体遵循理想气体规律。
- (e) 某型号直升机在发动机输出机械功率为 P 时能够悬停。如果制造另一架直升机，其所有线性尺寸均严格缩小为原直升机的 $\frac{1}{2}$ ，悬停所需的机械功率 P' 是多少？ (2.5 分)

题目译自官方英文原文。

答案

- (a) $f' = \sqrt{2} f$.
- (b) $a' = \frac{a_0}{207} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}$.
- (c) $T' = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K}$ ，约升高 1.4 K。
- (d) $\rho' = \frac{1.2500}{1.012} \text{ kg/m}^3 \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3$.
- (e) $P' = 2^{-7/2} P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884 P$.

解答

(a)

设原弹簧的劲度系数为 k ，悬挂物体的质量为 m 。其固有频率为

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

对于均匀弹簧，原弹簧可视为两个完全相同的半段弹簧串联而成。若每个半段的劲度系数为 k_h ，则

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_h},$$

因此 $k_h = 2k$ 。等价地，在相同拉力作用下，每个半段的伸长量是整根弹簧伸长量的一半。

物体的质量不变，因此

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2} f.$$

重力会改变平衡时的伸长量，但不影响理想弹簧的振动频率。

(b)

在题设近似下，可以认为质子固定不动，因此绕质子运动的粒子的质量 m 决定了原子的长度尺度。

在玻尔模型中，库仑引力提供向心力，基态的角动量为 $\hbar$ ：

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad mva = \hbar.$$

消去 v ，得到

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}.$$

因此，在电荷不变时，半径与粒子的质量成反比。由于 $m_\mu = 207m_e$ ，

$$\frac{a'}{a_0} = \frac{m_e}{m_\mu} = \frac{1}{207}.$$

所以，

$$a' = \frac{0.0529}{207} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}.$$

(c)

假设地球处于辐射平衡，太阳光度恒定，且地球的反照率和有效热辐射特性不变。

当地日距离为 r 时，入射太阳辐射通量密度与 r^{-2} 成正比。因此，吸收的功率为

$$P_{\text{abs}} = (1 - \alpha) \frac{L_\odot}{4\pi r^2} \pi R_\oplus^2,$$

其中 α 为反照率。根据斯特藩—玻尔兹曼定律，辐射功率可表示为

$$P_{\text{emit}} = 4\pi R_\oplus^2 \epsilon_{\text{eff}} \sigma T^4,$$

其中有效因子 ϵ_{eff} 保持不变。

令吸收功率与辐射功率相等，得到

$$T^4 \propto r^{-2}, \quad T \propto r^{-1/2}.$$

新的距离为 $r' = 0.99r$, 因此

$$T' = T \left(\frac{r}{r'} \right)^{1/2} = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K}.$$

用一阶近似进行检验,

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = 0.005,$$

得到 $\Delta T \approx 1.435 \text{ K}$, 与舍入前的结果 1.446 K 接近。

(d)

设干空气和水的摩尔质量分别为 $M_d = 28.8 \text{ g/mol}$ 和 $M_w = 18 \text{ g/mol}$ 。水的质量分数为 $w = 0.02$ 。质量为 m 的湿空气中, 干空气的质量为 $(1-w)m$, 水蒸气的质量为 wm 。采用一致的质量单位, 其总物质的量为

$$n = \frac{(1-w)m}{M_d} + \frac{wm}{M_w}.$$

由于 $m/V = \rho'$, 由理想气体状态方程可得

$$\frac{p}{RT} = \frac{n}{V} = \rho' \left(\frac{1-w}{M_d} + \frac{w}{M_w} \right).$$

对于处于相同气压和温度下的原来的干空气,

$$\frac{p}{RT} = \frac{\rho}{M_d}.$$

令上述表达式相等并整理, 得到

$$\rho' = \frac{\rho}{(1-w) + wM_d/M_w}.$$

因此

$$\rho' = \frac{1.2500}{0.98 + 0.02(28.8/18)} = \frac{1.2500}{1.012} \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3.$$

密度减小是因为水分子的质量小于干空气分子的平均质量, 而在气压和温度固定时, 分子总数密度保持不变。

(e)

假设缩小后的直升机采用密度相同的材料, 并在密度相同的空气中悬停。采用理想动量流的标度关系, 假设气动效率不变, 忽略黏性效应和机械损耗的变化。

设线性尺度因子为 λ 。直升机的质量 m 按体积缩放, 而旋翼的扫掠面积 A 按面积缩放:

$$m' = \lambda^3 m, \quad A' = \lambda^2 A.$$

设 v 表征旋翼产生的向下气流的速度。对于几何相似的流动, 单位时间内被加速的空气质量满足如下标度关系:

$$\dot{m}_{\text{air}} \propto \rho_{\text{air}} A v.$$

根据动量守恒, 向上的推力满足

$$F \propto \dot{m}_{\text{air}} v \propto \rho_{\text{air}} A v^2.$$

悬停要求 $F = mg$, 因此

$$v \propto \sqrt{\frac{mg}{\rho_{\text{air}} A}}.$$

于是,

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{\lambda^3}{\lambda^2}} = \lambda^{1/2}.$$

所需功率与向空气传递动能的速率成正比:

$$P \propto \dot{m}_{\text{air}} v^2 \propto \rho_{\text{air}} A v^3.$$

因此

$$\frac{P'}{P} = \lambda^2 \left(\lambda^{1/2} \right)^3 = \lambda^{7/2}.$$

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时,

$$P' = \left(\frac{1}{2} \right)^{7/2} P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884P.$$

解答已与官方解答核对。

题目 2: 原子核的质量与稳定性

本题中的所有能量均以 MeV (兆电子伏特, 即百万电子伏特) 为单位。

$1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$, 但解答本题不需要知道这一换算关系。

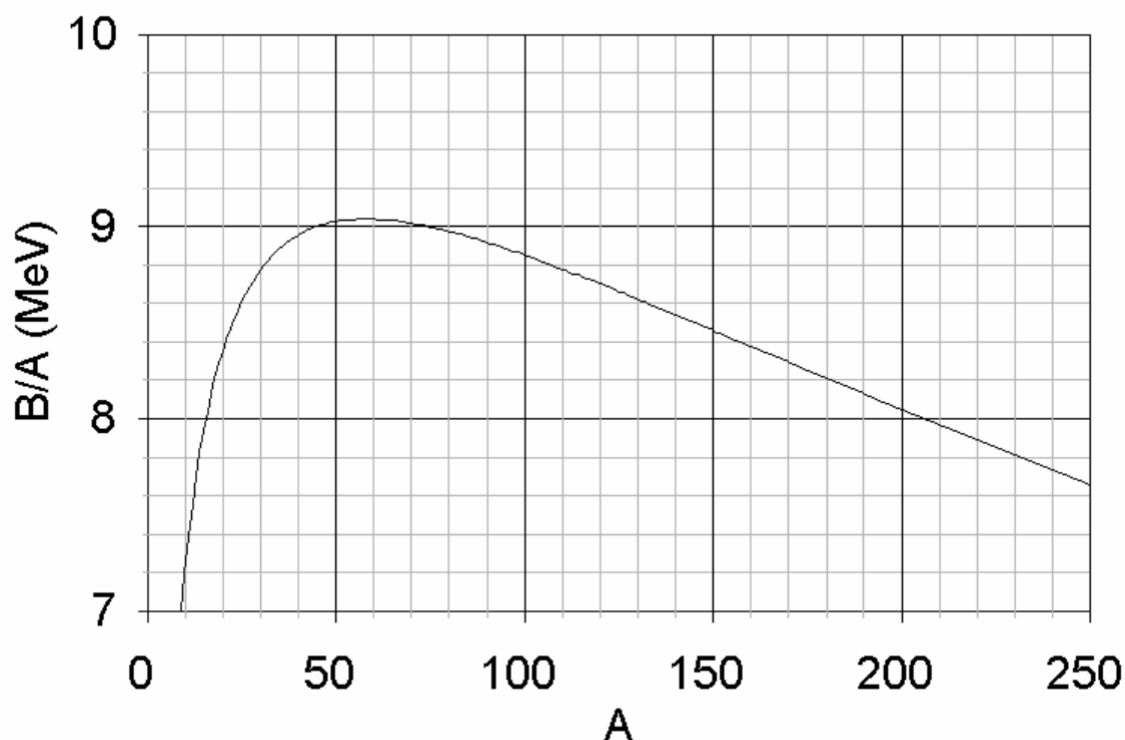
一个含有 Z 个质子和 N 个中子 (即质量数 $A = N + Z$) 的原子核, 其质量 M 等于组成它的各个自由核子 (质子和中子) 的质量之和, 减去结合能所对应的质量 B/c^2 。

$$Mc^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

下图给出了对于给定的 A 值, B/A 的最大值随 A 的变化关系。

一般而言, B/A 的值越大, 原子核就越稳定。

Binding Energy per Nucleon



(a) 当质量数超过某个值 A_α 时，原子核的结合能总是足够小，因而允许发射 α 粒子 ($A = 4$)。对这条曲线在 $A = 100$ 以上的部分采用线性近似，估算 A_α 。(3 分)

对于这一模型，作如下假设：

- 初始原子核和最终原子核都由这条曲线上的点表示。
- α 粒子的总结合能为 $B_4 = 25.0$ MeV (这一数值无法从图中读出!)。

(b) 一个含有 Z 个质子和 N 个中子 ($A = N + Z$) 的原子核，其结合能由以下半经验公式给出：

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} - \delta$$

δ 的取值如下：

对于 N 为奇数、 Z 为奇数的原子核，取 $+a_p A^{-3/4}$

对于 N 为偶数、 Z 为奇数或 N 为奇数、 Z 为偶数的原子核，取 0

对于 N 为偶数、 Z 为偶数的原子核，取 $-a_p A^{-3/4}$

各系数的数值为：

$$a_v = 15.8 \text{ MeV}; \quad a_s = 16.8 \text{ MeV}; \quad a_c = 0.72 \text{ MeV}; \quad a_a = 23.5 \text{ MeV}; \quad a_p = 33.5 \text{ MeV}.$$

(i) 推导在给定质量数 A 时，结合能最大的原子核的质子数 $Z_{\max}$ 的表达式。仅在本小问中忽略 δ 项。(2 分)

(ii) 对于 $A = 200$ 的原子核，使 B/A 最大的 Z 值是多少？须计入 δ 项的影响。(2 分)

(iii) 考虑答题纸表格中列出的三个 $A = 128$ 的原子核。判断哪些原子核在能量上是稳定的，哪些有足够的能量通过下列过程发生衰变。求出第 (i) 小问中定义的 $Z_{\max}$ ，并填写答题纸上的表格。

填写表格时，请：

- 用 $\checkmark$ 标记能量上允许的过程
- 用 0 标记能量上不允许的过程
- 仅考虑这三个原子核之间的跃迁。

衰变过程：

- (1) β^- 衰变；原子核发射一个电子
- (2) β^+ 衰变；原子核发射一个正电子
- (3) $\beta^-\beta^-$ 衰变；原子核同时发射两个电子
- (4) 电子俘获；原子核俘获一个原子中的电子。

电子（及正电子）的静止能量为 $m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ ；质子的静止能量为 $m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}$ ；中子的静止能量为 $m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}$ 。

(3 分)

(b) (iii)

原子核/过程	β^- 衰变	β^+ 衰变	电子俘获	$\beta^-\beta^-$ 衰变
$^{128}_{53}\text{I}$				
$^{128}_{54}\text{Xe}$				
$^{128}_{55}\text{Cs}$				

符号表示： $^A_Z X$

X = 化学元素符号

题目译自官方英文原文。

答案

- (a) $A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2$ 。下文采用的直线拟合给出的值约为 215。
- (b)(i) $Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}$ 。这是将质子数视为连续变量时的极大值位置；忽略配对项时，应选取最接近的整数。
- (b)(ii) $Z = 80$ ，此时 $N = 120$ ，且 $B/A \approx 8.05 \text{ MeV}$ 。
- (b)(iii) 连续变量情形的结果为 $Z_{\max} \approx 53.58$ ；整数范围内结合能在 $Z = 54$ 时最大。在指定的跃迁范围内， ^{128}Xe 是稳定的，而 ^{128}I 和 ^{128}Cs 可以发生衰变。

原子核/过程	β^- 衰变	β^+ 衰变	电子俘获	$\beta^-\beta^-$ 衰变
$^{128}_{53}\text{I}$	$\checkmark$	0	0	$\checkmark$
$^{128}_{54}\text{Xe}$	0	0	0	0
$^{128}_{55}\text{Cs}$	0	$\checkmark$	$\checkmark$	0

根据题目所述限制，若某过程的子核不属于这三个原子核，则相应表项标记为 0。

解答

(a)

α 衰变中，质子总数和中子总数分别守恒。因此，在计算释放的能量时，自由核子的静止能量相互抵消：

$$Q_\alpha = [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M(4, 2)]c^2 = B(A - 4) + B_4 - B(A).$$

当 $Q_\alpha > 0$ 时，该衰变在能量上是允许的。

将图中所示物理量的直线近似写为

$$b(A) \equiv \frac{B(A)}{A} \simeq b_0 - kA.$$

从图中读取的代表性数值为

$$b(100) \simeq 8.85 \text{ MeV}, \quad b(200) \simeq 8.05 \text{ MeV}.$$

因此，

$$k \simeq 8.0 \times 10^{-3} \text{ MeV}, \quad b_0 \simeq 9.65 \text{ MeV},$$

其中 A 为无量纲量。因此，总结合能为

$$B(A) \simeq b_0 A - kA^2.$$

考虑核子数减少四个这一有限变化，有

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= B_4 + b_0(A - 4) - k(A - 4)^2 - b_0 A + kA^2 \\ &= B_4 - 4b_0 + 8kA - 16k. \end{aligned}$$

在阈值处， $Q_\alpha = 0$ ，得到

$$A_\alpha = \frac{b_0 - B_4/4}{2k} + 2.$$

代入数值得

$$A_\alpha \simeq \frac{9.65 - 25.0/4}{0.016} + 2 = 214.5.$$

由于 Q_α 随 A 增大而增大，超过这一阈值时， α 发射在能量上是可能的。考虑到图的精度，

$$\boxed{A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2}.$$

(b)(i)

固定 A ，代入 $N = A - Z$ ，于是 $N - Z = A - 2Z$ 。忽略配对项，

$$B(Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_a}{A} (A - 2Z)^2.$$

先将 Z 视为连续变量，极大值满足

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_c Z A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} (A - 2Z) = 0.$$

两边乘以 A ，并合并含 Z 的项，得到

$$(2a_c A^{2/3} + 8a_a)Z = 4a_a A.$$

因此，

$$Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}.$$

这一驻点为极大值点，因为

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_c A^{-1/3} - \frac{8a_a}{A} < 0.$$

不计配对项时，物理上允许的整数范围内，使结合能最大的整数就是最接近这一数值的整数。

(b)(ii)

对于 $A = 200$ ，不计配对项时，连续变量情形的极大值位置为

$$Z_0 = \frac{200}{2 + \frac{0.72}{47.0} 200^{2/3}} \simeq 79.242.$$

由于 A 为偶数， Z 为偶数时 N 也为偶数，而 Z 为奇数时 N 也为奇数。配对项的大小为

$$P = a_p A^{-3/4} = 33.5(200)^{-3/4} \simeq 0.6299 \text{ MeV}.$$

由于公式中包含的是 $-\delta$ ，当 Z 为偶数时，配对项使结合能增加 P ；当 Z 为奇数时，则使结合能减少 P 。

不计配对项的结合能可以写为

$$B_0(Z) = B_0(Z_0) - \left(a_c A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} \right) (Z - Z_0)^2.$$

因此，在奇数和偶数这两类中，各自的最佳整数都是该类中最接近 Z_0 的整数。最佳奇数为 79，最佳偶数为 80。计入配对项，直接代入可得：

Z	N	$\delta \text{ (MeV)}$	$B \text{ (MeV)}$
78	122	-0.630	1609.55
79	121	+0.630	1609.17
80	120	-0.630	1610.12

特别地，

$$B(80) - B(79) \simeq 0.954 \text{ MeV} > 0.$$

因此，

$$Z = 80, \quad N = 120,$$

此时

$$\frac{B}{A} = \frac{1610.12}{200} \simeq 8.05 \text{ MeV}.$$

(b)(iii)

首先，由第 (i) 小问的结果可得

$$Z_{\max} = \frac{128}{2 + \frac{0.72}{47.0} 128^{2/3}} \simeq 53.577.$$

因此，最接近的整数为 54，配对效应也有利于这一取值。

对于这些原子核，

$$P = 33.5(128)^{-3/4} \simeq 0.880313 \text{ MeV}.$$

碘和铯的 N 与 Z 均为奇数, 因此 $\delta = +P$ 。氙的 N 与 Z 均为偶数, 因此 $\delta = -P$ 。

分析衰变的能量条件时, 除了结合能, 还需要考虑原子核的质量。令 $E_Z = M_Z c^2$, 则

$$E_Z = 128m_n c^2 + Z(m_p - m_n)c^2 - B_Z = 128m_n c^2 - (1.30 \text{ MeV})Z - B_Z.$$

代入后得到下列数值。为确定双 β 衰变中较小的能量差, 这里保留了更多位数。

原子核	B_Z (MeV)	$E_Z - E_{54}$ (MeV)
$^{128}_{53}\text{I}$	1104.656	3.195830
$^{128}_{54}\text{Xe}$	1106.552	0
$^{128}_{55}\text{Cs}$	1103.172	2.079906

忽略原子中电子的结合能和中微子的静止质量, 由能量守恒可得

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-}(Z) &= E_Z - E_{Z+1} - m_e c^2, \\ Q_{\beta^+}(Z) &= E_Z - E_{Z-1} - m_e c^2, \\ Q_{\text{EC}}(Z) &= E_Z + m_e c^2 - E_{Z-1}, \\ Q_{\beta^-\beta^-}(Z) &= E_Z - E_{Z+2} - 2m_e c^2. \end{aligned}$$

发射时应减去电子的静止能量, 俘获时则应加上。当 $Q > 0$ 时, 该过程在能量上是允许的。

指定的原子核集合内, 所有可能的跃迁如下:

初始原子核	过程	子核	Q (MeV)	是否允许?
^{128}I	β^-	^{128}Xe	+2.686	✓
^{128}Xe	β^-	^{128}Cs	-2.590	0
^{128}Xe	β^+	^{128}I	-3.706	0
^{128}Cs	β^+	^{128}Xe	+1.570	✓
^{128}Xe	电子俘获	^{128}I	-2.686	0
^{128}Cs	电子俘获	^{128}Xe	+2.590	✓
^{128}I	$\beta^-\beta^-$	^{128}Cs	+0.096	✓

具体而言, 对于较小的双 β 衰变能量,

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-\beta^-} &= E_{53} - E_{55} - 2m_e c^2 \\ &= 3.195830 - 2.079906 - 1.020 \\ &\simeq 0.0959 \text{ MeV} > 0. \end{aligned}$$

因此, 碘同时发射两个电子而衰变为铯的双 β 衰变在能量上是允许的, 尽管经由氙的逐次衰变路径中的第二步是不允许的。

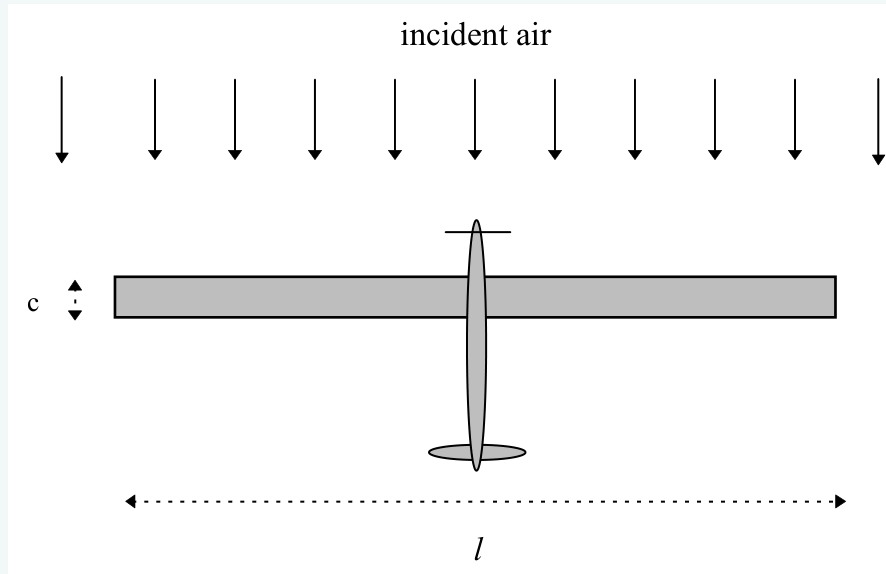
在指定的原子核集合内, 氙没有任何能量上允许的跃迁。碘可以发生 β^- 衰变或双 β^- 衰变; 铯可以发射正电子或发生电子俘获。

解答已与官方解答核对。

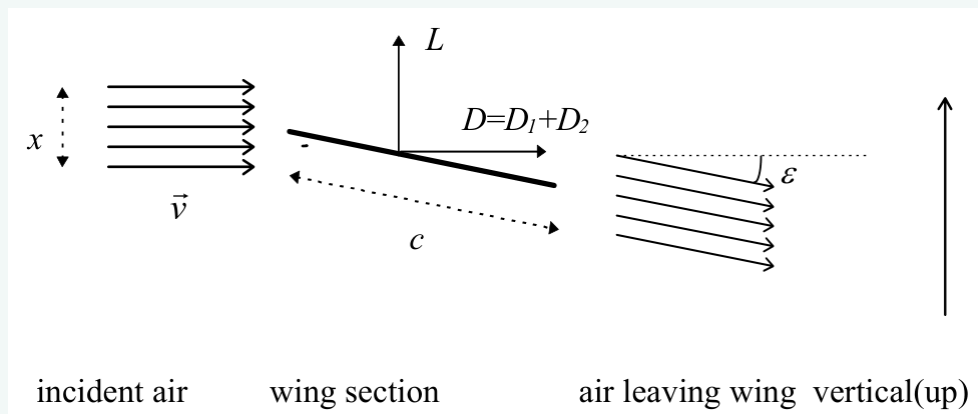
题目 3：太阳能飞机

我们希望设计一架仅靠太阳能就能持续飞行的飞机。效率最高的布局是将机翼上表面完全覆盖太阳能电池。太阳能电池提供电能，由电动机驱动螺旋桨。

考虑一个平面形状为矩形的机翼，其翼展为 l ，翼弦（宽度）为 c ；机翼面积为 $S = cl$ ，展弦比为 $A = l/c$ 。设一层高度为 x 、长度为 l 的空气以小角度 ε 向下偏转，而速率仅发生极小的变化，通过考察这一过程，我们可以大致了解机翼的性能。可以利用操纵面选择适合飞行的最佳 ε 值。当 $x = \pi l/4$ 时，这一简单模型与实际情况十分接近，我们可以假定此关系成立。飞机的总质量为 M ，相对于周围空气以速度 $\vec{v}$ 水平飞行。在以下计算中，只考虑机翼周围的气流。



飞机的俯视图（在飞机自身的参考系中）：



机翼的侧视图（在随飞机运动的参考系中）：

忽略螺旋桨对气流的影响。

(a) 考虑空气流经机翼时的动量变化，假定此过程中空气的速率不变。用机翼尺寸、 v 、 ε 和空气密度 ρ 推导机翼所受竖直升力 L 和水平阻力 D_1 的表达式。假设气流方向始终平行于侧视图所在的平面。

(3 分)

(b) 空气流过机翼表面时的摩擦会产生额外的水平阻力 D_2 。空气略微减速，其速率变化量 Δv ($\ll 1\%$ 的 v) 满足：

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A}$$

f 的值与 ε 无关。

求使飞机以恒定高度和速度飞行所需功率最小时的飞行速率 v_0 的表达式（用 M, f, A, S, ρ 和重力加速度 g 表示）。忽略 $(\varepsilon^2 f)$ 阶及更高阶的项。

(3 分)

以下小角近似可能有用：

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\sin^2 \varepsilon}{2}$$

(c) 在答题纸上画出功率 P 随飞行速率 v 变化的示意图。分别画出两种阻力所对应的所需功率。求最小功率 $P_{\min}$ 的表达式（用 M, f, A, S, ρ 和 g 表示）。

(2 分)

(d) 如果太阳能电池能够提供足够的能量，使电动机和螺旋桨按每平方米机翼面积产生 $I = 10$ 瓦的机械功率，计算在此功率下的最大翼载荷 Mg/S (N/m^2) 和飞行速率 v_0 (m/s)。假设 $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$ 、 $f = 0.004$ 、 $A = 10$ 。

(2 分)

题目译自官方英文原文。

答案

• (a)

$$L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon, \quad D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

• (b)

$$v_0 = \left[\frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2} \right]^{1/4}.$$

• (c)

$$P(v) = \underbrace{\frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S v}}_{P_1} + \underbrace{\frac{\pi}{4} \rho f S v^3}_{P_2},$$

$$P_{\min} = \left(\frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

诱导功率项 P_1 按 $1/v$ 减小，而摩擦功率项 P_2 按 v^3 增大。两者之和在 v_0 处有唯一的最小值，此时 $P_1 = 3P_2$ 。

• (d)

$$\left(\frac{Mg}{S}\right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2, \quad v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}.$$

解答

(a)

在飞机的参考系中进行分析。在时间 dt 内，流过受影响横截面 xl 的空气体积为 $xlv dt$ 。因此，质量流率为

$$\dot{m} = \rho xlv.$$

空气最初的水平速率为 v 。偏转后，其水平速度为 $v \cos \varepsilon$ ，向下的速度为 $v \sin \varepsilon$ 。

根据动量定理和牛顿第三定律，机翼所受向上的力等于空气向下动量的增加率：

$$L = \dot{m} v \sin \varepsilon = \rho xlv^2 \sin \varepsilon.$$

同样，空气的水平动量减少，从而使机翼受到阻力：

$$D_1 = \dot{m} v (1 - \cos \varepsilon) = \rho xlv^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

利用 $x = \pi l/4$ ，得

$$L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon, \quad D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

当 ε 很小时，上式变为

$$L \simeq \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \varepsilon, \quad D_1 \simeq \frac{\pi}{8} \rho l^2 v^2 \varepsilon^2.$$

(b)

由于 $AS = l^2$ ，定义

$$K = \rho xl = \frac{\pi}{4} \rho AS, \quad \dot{m} = Kv.$$

速率降低引起的额外水平动量损失给出

$$D_2 = \dot{m} \Delta v \cos \varepsilon.$$

利用 $\Delta v/v = f/A$ ，并忽略 $\varepsilon^2 f$ 阶的修正，得

$$D_2 \simeq Kv^2 \frac{f}{A} = \left[\frac{\pi}{4} \rho f S v^2 \right].$$

减速也使升力相对减小 f/A 。然而，诱导阻力正比于 $\sin^2 \varepsilon$ ，因此减速对诱导阻力的影响为 $\varepsilon^2 f$ 阶。所以，在所要求的精度下，可以用 (a) 中的升力表达式写出竖直方向的平衡条件：

$$Mg = Kv^2 \sin \varepsilon, \quad \sin \varepsilon = \frac{Mg}{Kv^2}.$$

利用题目给出的小角近似，得

$$D_1 \simeq \frac{Kv^2}{2} \sin^2 \varepsilon = \frac{(Mg)^2}{2Kv^2} = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho AS v^2}.$$

在匀速水平飞行时，螺旋桨推力与总阻力平衡。因此，所需的机械功率为

$$P = (D_1 + D_2)v = \frac{2(Mg)^2}{\pi\rho ASv} + \frac{\pi}{4}\rho fSv^3.$$

将其写成

$$P = \frac{\alpha}{v} + \beta v^3, \quad \alpha = \frac{2(Mg)^2}{\pi\rho AS}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}\rho fS.$$

对飞行速率求导，得

$$\frac{dP}{dv} = -\frac{\alpha}{v^2} + 3\beta v^2.$$

因此，最佳速率满足

$$v_0^4 = \frac{\alpha}{3\beta} = \frac{8(Mg)^2}{3\pi^2\rho^2 fAS^2},$$

所以

$$v_0 = \left[\frac{8(Mg)^2}{3\pi^2\rho^2 fAS^2} \right]^{1/4}.$$

这对应于 $v > 0$ 时唯一的最小值，因为

$$\frac{d^2P}{dv^2} = \frac{2\alpha}{v^3} + 6\beta v > 0.$$

(c)

在最小值处，由条件 $\alpha = 3\beta v_0^4$ 可得

$$P_1(v_0) = \frac{\alpha}{v_0} = 3\beta v_0^3 = 3P_2(v_0).$$

因此

$$P_{\min} = 4\beta v_0^3 = \pi\rho fSv_0^3.$$

代入 v_0 的表达式，得

$$P_{\min} = \left(\frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

所要求的图像具有以下特征：

- $P_1 = \alpha/v$ 是一条递减的双曲线。从形式上看，它在 $v \rightarrow 0^+$ 时发散，在 $v \rightarrow \infty$ 时趋于零。
- $P_2 = \beta v^3$ 从原点出发，在原点处具有水平切线，并且单调递增。
- 两者之和的曲线位于两条曲线之上，先下降至唯一的最小值点 $(v_0, P_{\min})$ ，随后上升。它在正速率范围的两端均发散，且不与坐标轴相交。
- 两个功率项的曲线在 $v = 3^{1/4}v_0 \approx 1.316v_0$ 处相交，交点位于总功率最小值点的右侧。

令 $u = v/v_0$ ，可得到精确的无量纲描述：

$$\frac{P_1}{P_{\min}} = \frac{3}{4u}, \quad \frac{P_2}{P_{\min}} = \frac{u^3}{4}, \quad \frac{P}{P_{\min}} = \frac{3}{4u} + \frac{u^3}{4}.$$

以下各点有助于绘制示意图：

v/v_0	$P_1/P_{\min}$	$P_2/P_{\min}$	$P/P_{\min}$
0.500	1.500	0.031	1.531
1.000	0.750	0.250	1.000
1.316	0.570	0.570	1.140
2.000	0.375	2.000	2.375

极限 $v \rightarrow 0^+$ 是这些方程在形式上的外推：当速率足够低时，所需的偏转角将超出小角近似的适用范围。

(d)

设翼载荷为

$$w = \frac{Mg}{S}.$$

可用的机械功率为 IS 。当它恰好等于所需的最小功率时，翼载荷达到最大：

$$IS = P_{\min} = \pi \rho f S v_0^3.$$

因此，

$$v_0 = \left(\frac{I}{\pi \rho f} \right)^{1/3}.$$

代入数值，得

$$v_0 = \left(\frac{10}{\pi(1.25)(0.004)} \right)^{1/3} = 8.6025 \dots \text{ m/s},$$

从而

$$\boxed{v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}}.$$

将 (b) 中的最佳速率关系改写为

$$v_0^4 = \frac{8w^2}{3\pi^2 \rho^2 f A},$$

可得

$$w_{\max} = \pi \rho v_0^2 \sqrt{\frac{3fA}{8}} = \pi \rho \sqrt{\frac{3fA}{8}} \left(\frac{I}{\pi \rho f} \right)^{2/3}.$$

代入数值，得

$$w_{\max} = \pi(1.25)(8.6025 \dots)^2 \sqrt{\frac{3(0.004)(10)}{8}} = 35.5925 \dots \text{ N/m}^2.$$

因此，

$$\boxed{\left(\frac{Mg}{S} \right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2}.$$

这是最大值，因为 $P_{\min}/S$ 按 $w^{3/2}$ 增大；若翼载荷更大，则在任何速率下所需的功率都会超过可用的 10 W/m^2 。

为检验近似是否自洽，在这一工作点，

$$\sin \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{6f}{A}}, \quad \varepsilon_0 \simeq 0.049 \text{ rad} \simeq 2.8^\circ,$$

并且

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A} = 0.0004 = 0.04\%.$$

两项近似均与给定数据相符。

解答已与官方解答核对。