

IPhO 1997

Teorik sorular ve çözümler · Sudbury, Kanada · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1997/

Soru 1: Ölçeklendirme

- (a) Kütlesiz ideal bir yayın ucuna asılan küçük bir kütle, yayın doğal frekansı f ile aşağı yukarı salınmaktadır. Yay iki eşit parçaya kesilir ve kütle parçalardan birinin ucuna yeniden asılırsa yeni frekans f' ne olur? (1.5 puan)
- (b) Temel durumdaki bir hidrojen atomunun yarıçapı $a_0 = 0.0529 \text{ nm}$ değerindedir ("Bohr yarıçapı"). Elektronun yerine aynı yüke sahip ve kütlesi elektronunkinin 207 katı olan bir müonun geçtiği "müonik hidrojen" atomunun yarıçapı a' nedir? Protonun kütlesinin müonun ve elektronun kütlelerinden çok daha büyük olduğunu varsayın. (2 puan)
- (c) Dünya'nın ortalama sıcaklığı $T = 287 \text{ K}$ değerindedir. Dünya ile Güneş arasındaki ortalama uzaklık %1 azaltılsaydı yeni ortalama sıcaklık T' ne olurdu? (2 puan)
- (d) Belirli bir günde hava kurudur ve yoğunluğu $\rho = 1.2500 \text{ kg/m}^3$ değerindedir. Ertesi gün nem artmış ve havanın kütlece %2'si su buharı hâline gelmiştir. Basınç ve sıcaklık bir önceki günle aynıdır. Havanın şimdiki yoğunluğu ρ' nedir? (2 puan)
- Kuru havanın ortalama mol kütlesi: 28.8 (g/mol)
 Suyun mol kütlesi: 18 (g/mol)
- İdeal gaz davranışı varsayın.
- (e) Bir tür helikopter, motorunun mekanik güç çıkışı P olduğunda havada asılı kalabilmektedir. İlk helikopterin (tüm doğrusal boyutları bakımından) tam $\frac{1}{2}$ ölçekli bir kopyası olan başka bir helikopter yapılırsa bunun havada asılı kalması için gereken mekanik güç P' nedir? (2.5 puan)

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- (a) $f' = \sqrt{2} f$.
- (b) $a' = \frac{a_0}{207} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}$.
- (c) $T' = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K}$, yaklaşık 1.4 K artış.
- (d) $\rho' = \frac{1.2500}{1.012} \text{ kg/m}^3 \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3$.
- (e) $P' = 2^{-7/2} P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884P$.

Çözüm

(a)

Başlangıçtaki yay sabiti k , yaya asılan kütle ise m olsun. Sistemin doğal frekansı

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

ile verilir.

Düzgün bir yayın iki yarısı, seri bağlanmış özdeş yaylardır. Her bir yarının yay sabiti k_h ise

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_h},$$

dolayısıyla $k_h = 2k$ olur. Eşdeğer olarak, aynı gerilme kuvveti altında her bir yarı, yayın tamamının yarısı kadar uzar.

Kütle değişmediğinden

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2} f.$$

elde edilir. Yer çekimi, dengedeki uzamayı değiştirir ancak ideal bir yayın frekansını etkilemez.

(b)

Belirtilen yaklaşım altında proton sabit kabul edilebilir; dolayısıyla yörüngede dolanan parçacığın kütlesi m , atomun uzunluk ölçeğini belirler.

Bohr modelinde Coulomb çekimi merkezci kuvveti sağlar ve temel durumdaki açısal momentum $\hbar$ değerindedir:

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad mva = \hbar.$$

v elendiğinde

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}.$$

elde edilir. Böylece yük değişmediğinde yarıçap, parçacığın kütlesiyle ters orantılıdır. $m_\mu = 207m_e$ olduğundan

$$\frac{a'}{a_0} = \frac{m_e}{m_\mu} = \frac{1}{207}.$$

Dolayısıyla,

$$a' = \frac{0.0529}{207} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}.$$

(c)

Işınım dengesi olduğunu, Güneş'in ışınlam gücünün sabit kaldığını ve Dünya'nın albedosu ile etkin ısı ışınlam özelliklerinin değişmediğini varsayın.

Dünya–Güneş uzaklığı r iken gelen Güneş ışınlamının akısı r^{-2} ile orantılıdır. Dolayısıyla soğurulan güç

$$P_{\text{abs}} = (1 - \alpha) \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \pi R_{\oplus}^2,$$

ile verilir; burada α albedodur. Stefan–Boltzmann yasasına göre yayılan güç

$$P_{\text{emit}} = 4\pi R_{\oplus}^2 \varepsilon_{\text{eff}} \sigma T^4,$$

şeklinde ifade edilebilir; burada ε_{eff} sabit bir etkin katsayıdır.

Soğurulan ve yayılan güçler eşitlendiğinde

$$T^4 \propto r^{-2}, \quad T \propto r^{-1/2}.$$

elde edilir. Yeni uzaklık $r' = 0.99r$ olduğundan

$$T' = T \left(\frac{r}{r'} \right)^{1/2} = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K}.$$

Birinci mertebeden bir kontrol olarak,

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = 0.005,$$

buradan $\Delta T \approx 1.435 \text{ K}$ elde edilir; bu değer, yuvarlanmamış sonuç olan 1.446 K değerine yakındır.

(d)

Kuru havanın ve suyun mol kütleleri sırasıyla $M_d = 28.8 \text{ g/mol}$ ve $M_w = 18 \text{ g/mol}$ olsun. Suyun **kütle kesri** $w = 0.02$ değerindedir.

m kütleli nemli hava, $(1 - w)m$ kütleli kuru hava ve wm kütleli su buharı içerir. Tutarlı kütle birimleri kullanıldığında toplam mol sayısı

$$n = \frac{(1 - w)m}{M_d} + \frac{wm}{M_w}.$$

olur. $m/V = \rho'$ olduğundan ideal gaz yasası

$$\frac{p}{RT} = \frac{n}{V} = \rho' \left(\frac{1 - w}{M_d} + \frac{w}{M_w} \right).$$

bağıntısını verir.

Aynı basınç ve sıcaklıktaki başlangıçtaki kuru hava için

$$\frac{p}{RT} = \frac{\rho}{M_d}.$$

Bu ifadeler eşitlenip yeniden düzenlendiğinde,

$$\rho' = \frac{\rho}{(1 - w) + wM_d/M_w}.$$

Böylece

$$\rho' = \frac{1.2500}{0.98 + 0.02(28.8/18)} = \frac{1.2500}{1.012} \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3.$$

Su molekülleri ortalama bir kuru hava molekülünden daha hafif olduğu ve sabit basınç ile sıcaklıkta birim hacimdeki toplam molekül sayısı sabit kaldığı için yoğunluk azalır.

(e)

Kopyada aynı yoğunluklara sahip malzemelerin kullanıldığını ve kopyanın aynı yoğunluktaki havada asılı kaldığını varsayın. Aerodinamik verimin değişmediğini kabul ederek ideal momentum akışı ölçeklendirmesini kullanın; viskoz etkilerdeki ve mekanik kayıplardaki değişimleri ihmal edin.

Doğrusal ölçek çarpanı λ olsun. Helikopterin kütlesi m hacimle, rotorun süpürdüğü alan A ise alanla ölçeklenir:

$$m' = \lambda^3 m, \quad A' = \lambda^2 A.$$

v , rotorun oluşturduğu aşağı yönlü hava hızını temsil etsin. Geometrik olarak benzer akışta, birim zamanda hızlandırılan havanın kütlesi

$$\dot{m}_{\text{air}} \propto \rho_{\text{air}} A v.$$

şeklinde ölçeklenir. Momentumun korunumuna göre yukarı yönlü itki kuvveti

$$F \propto \dot{m}_{\text{air}} v \propto \rho_{\text{air}} A v^2.$$

şeklinde ölçeklenir. Havada asılı kalmak için $F = mg$ olması gerektiğinden

$$v \propto \sqrt{\frac{mg}{\rho_{\text{air}} A}}.$$

Sonuç olarak,

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{\lambda^3}{\lambda^2}} = \lambda^{1/2}.$$

Gereken güç, havaya kinetik enerji aktarıma hızıyla orantılıdır:

$$P \propto \dot{m}_{\text{air}} v^2 \propto \rho_{\text{air}} A v^3.$$

Dolayısıyla

$$\frac{P'}{P} = \lambda^2 (\lambda^{1/2})^3 = \lambda^{7/2}.$$

$\lambda = \frac{1}{2}$ için,

$$P' = \left(\frac{1}{2}\right)^{7/2} P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884P.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Çekirdek Kütleleri ve Kararlılık

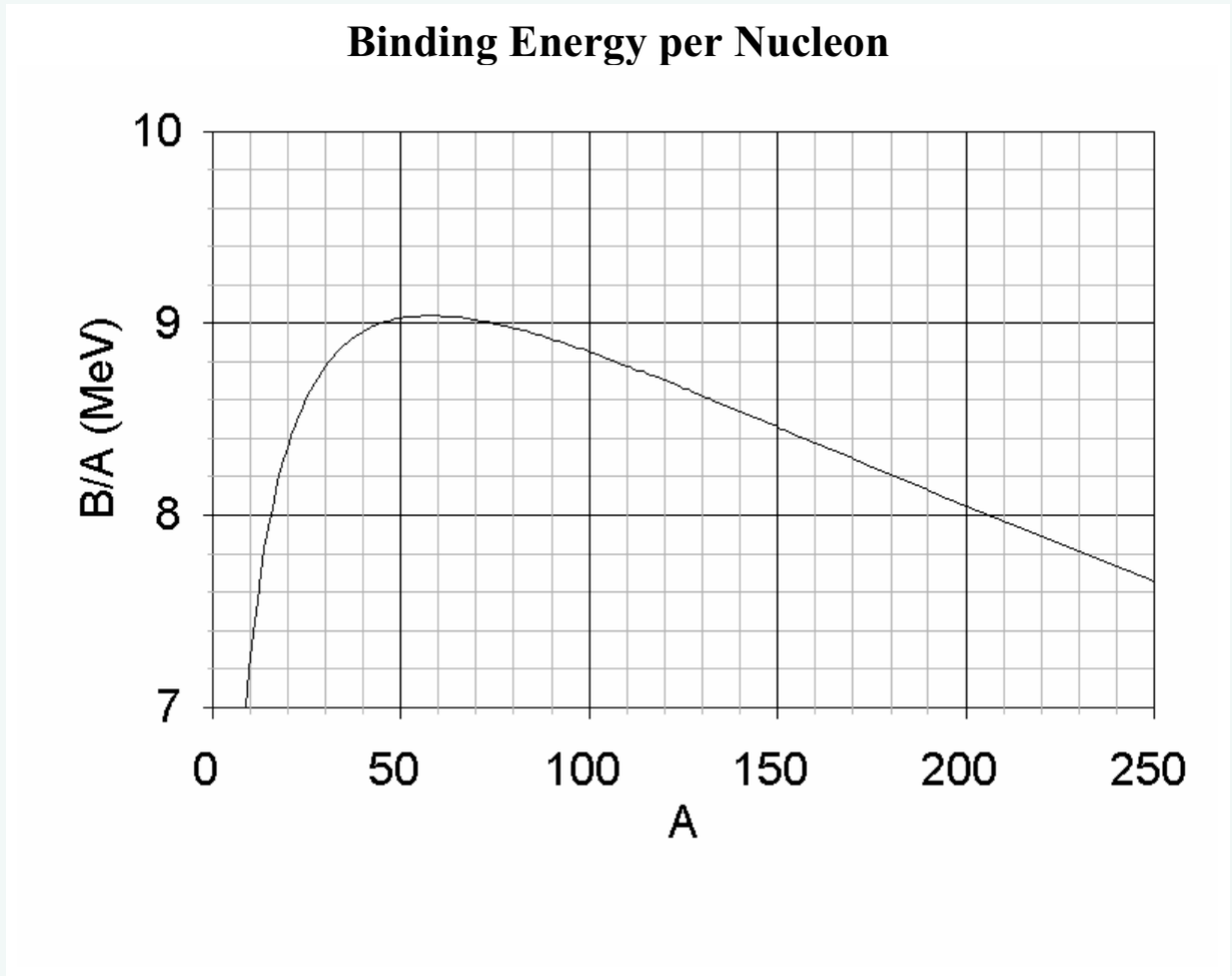
Bu sorudaki tüm enerjiler MeV — milyon elektron volt — cinsinden ifade edilmiştir.

Bir MeV = 1.6×10^{-13} J'dür, ancak problemi çözmek için bunu bilmek gerekli değildir.

Z proton ve N nötron içeren (yani kütle numarası $A = N + Z$ olan) bir atom çekirdeğinin M kütlesi, onu oluşturan serbest nükleonların (proton ve nötronların) kütleleri toplamından bağlanma enerjisinin kütle karşılığı B/c^2 çıkarılarak bulunur.

$$Mc^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

Aşağıdaki grafikte, verilen bir A değeri için B/A 'nın en büyük değeri A 'ya karşı çizilmiştir. Genel olarak B/A değeri ne kadar büyükse çekirdek o kadar kararlıdır.



(a) Belirli bir A_α kütle numarasının üzerinde, çekirdeklerin bağlanma enerjileri alfa parçacığı ($A = 4$) salımına izin verecek kadar küçüktür. A_α 'yı tahmin etmek için bu eğriye $A = 100$ 'ün üzerinde doğrusal bir yaklaşım uygulayın. (3 puan)

Bu model için aşağıdakileri varsayın:

- Hem başlangıç hem de son çekirdek bu eğri üzerinde temsil edilmektedir.
- Alfa parçacığının toplam bağlanma enerjisi $B_4 = 25.0$ MeV olarak verilmiştir (bu değer grafikten okunamaz!).

(b) Z proton ve N nötron içeren ($A = N + Z$) bir atom çekirdeğinin bağlanma enerjisi yarı ampirik bir formülle verilir:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} - \delta$$

δ 'nın değeri şöyledir:

N 'si tek/ Z 'si tek çekirdekler için $+a_p A^{-3/4}$

N 'si çift/ Z 'si tek veya N 'si tek/ Z 'si çift çekirdekler için 0

N 'si çift/ Z 'si çift çekirdekler için $-a_p A^{-3/4}$

Katsayıların değerleri şunlardır:

$$a_v = 15.8 \text{ MeV}; \quad a_s = 16.8 \text{ MeV}; \quad a_c = 0.72 \text{ MeV}; \quad a_a = 23.5 \text{ MeV}; \quad a_p = 33.5 \text{ MeV}.$$

(i) Verilen bir A kütle numarası için en büyük bağlanma enerjisine sahip çekirdeğin $Z_{\max}$ proton sayısını veren bir ifade türetin. Yalnızca bu kısımda δ terimini ihmal edin. (2 puan)

(ii) $A = 200$ olan ve en büyük B/A değerine sahip çekirdeğin Z değeri nedir? δ teriminin etkisini de hesaba katın. (2 puan)

(iii) Cevap kâğıdındaki tabloda listelenen, $A = 128$ olan üç çekirdeği ele alın. Hangilerinin enerji açısından kararlı olduğunu ve hangilerinin aşağıda listelenen süreçlerle bozunmak için yeterli enerjiye sahip olduğunu belirleyin. (i) kısmında tanımlanan $Z_{\max}$ 'ı belirleyin ve cevap kâğıdınızdaki tabloyu doldurun.

Tabloyu doldururken lütfen:

- Enerji açısından mümkün olan süreçleri şöyle işaretleyin: $\checkmark$
- Enerji açısından mümkün OLMAYAN süreçleri şöyle işaretleyin: 0
- Yalnızca bu üç çekirdek arasındaki geçişleri dikkate alın.

Bozunma süreçleri:

- (1) β^- bozunması; çekirdekten bir elektron salınması
- (2) β^+ bozunması; çekirdekten bir pozitron salınması
- (3) $\beta^- \beta^-$ bozunması; çekirdekten aynı anda iki elektron salınması
- (4) Elektron yakalama; bir *atom elektronunun* çekirdek tarafından yakalanması.

Bir elektronun (ve pozitronun) durgunluk enerjisi $m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$; bir protonunki $m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}$; bir nötronunki ise $m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}$ 'dir.

(3 puan)

(b) (iii)

Çekirdek/Süreç	β^- bozunması	β^+ bozunması	Elektron yakalama	$\beta^- \beta^-$ bozunması
$^{128}_{53}\text{I}$				
$^{128}_{54}\text{Xe}$				
$^{128}_{55}\text{Cs}$				

Gösterim: $^A_Z X$

X = Kimyasal Sembol

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- (a) $A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2$. Aşağıda kullanılan doğru uyumu yaklaşık 215 verir.
- (b)(i) $Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}$. Bu, sürekli değişken için maksimumdur; eşleşme ihmal edildiğinde en yakın tam sayıyı seçin.
- (b)(ii) $Z = 80$, $N = 120$ ve $B/A \approx 8.05 \text{ MeV}$.

- **(b)(iii)** Sürekli değişken için sonuç $Z_{\max} \approx 53.58$ 'dir; bağlanma enerjisinin tam sayı değerlerindeki maksimumu $Z = 54$ 'te elde edilir. Belirtilen geçişler kapsamında ^{128}Xe kararlıdır; ^{128}I ve ^{128}Cs ise bozunabilir.

Çekirdek/Süreç	β^- bozunması	β^+ bozunması	Elektron yakalama	$\beta^-\beta^-$ bozunması
$^{128}_{53}\text{I}$	$\checkmark$	0	0	$\checkmark$
$^{128}_{54}\text{Xe}$	0	0	0	0
$^{128}_{55}\text{Cs}$	0	$\checkmark$	$\checkmark$	0

Ürün çekirdekleri bu üç çekirdeğin dışında kalan durumlar, belirtilen kısıtlama uyarınca 0 ile işaretlenmiştir.

Çözüm

(a)

Alfa bozunmasında toplam proton ve nötron sayıları korunur. Dolayısıyla açığa çıkan enerji hesaplanırken serbest nükleonların durgunluk enerjileri birbirini götürür:

$$Q_\alpha = [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M(4, 2)]c^2 = B(A - 4) + B_4 - B(A).$$

Bozunma, $Q_\alpha > 0$ olduğunda enerji açısından mümkündür.

Grafikte çizilen niceliğe doğrusal yaklaşımı şöyle yazalım:

$$b(A) \equiv \frac{B(A)}{A} \simeq b_0 - kA.$$

Grafikten okunan temsilî değerler şunlardır:

$$b(100) \simeq 8.85 \text{ MeV}, \quad b(200) \simeq 8.05 \text{ MeV}.$$

Böylece,

$$k \simeq 8.0 \times 10^{-3} \text{ MeV}, \quad b_0 \simeq 9.65 \text{ MeV},$$

burada A boyutsuzdur. Dolayısıyla toplam bağlanma enerjisi

$$B(A) \simeq b_0 A - kA^2.$$

olur. Dört nükleonluk sonlu değişimi kullanırsak,

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= B_4 + b_0(A - 4) - k(A - 4)^2 - b_0 A + kA^2 \\ &= B_4 - 4b_0 + 8kA - 16k. \end{aligned}$$

Eşik değerinde $Q_\alpha = 0$ olduğundan,

$$A_\alpha = \frac{b_0 - B_4/4}{2k} + 2.$$

Sayısal olarak,

$$A_\alpha \simeq \frac{9.65 - 25.0/4}{0.016} + 2 = 214.5.$$

Q_α , A ile arttığından, bu eşiğin üzerinde alfa salımı enerji açısından mümkündür. Grafiğin hassasiyeti dikkate alındığında,

$$A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2.$$

(b)(i)

Sabit A için $N = A - Z$ yazalım; böylece $N - Z = A - 2Z$ olur. Eşleşmeyi ihmal edersek,

$$B(Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_a}{A} (A - 2Z)^2.$$

Başlangıçta Z 'yi sürekli bir değişken olarak ele aldığımızda, maksimum şu koşulu sağlar:

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_c Z A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} (A - 2Z) = 0.$$

A ile çarpıp Z içeren terimleri toplarsak,

$$(2a_c A^{2/3} + 8a_a)Z = 4a_a A.$$

Buradan,

$$Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}.$$

Bu durağan nokta bir maksimumdur, çünkü

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_c A^{-1/3} - \frac{8a_a}{A} < 0.$$

Eşleşme hesaba katılmadığında, fiziksel tam sayı maksimumu bu değere en yakın tam sayıda elde edilir.

(b)(ii)

$A = 200$ için, eşleşme hesaba katılmadan sürekli değişken için bulunan maksimum

$$Z_0 = \frac{200}{2 + \frac{0.72}{47.0} 200^{2/3}} \simeq 79.242.$$

olur. A çift olduğundan, Z 'nin çift olması N 'nin de çift olması, Z 'nin tek olması ise N 'nin de tek olması demektir. Eşleşme teriminin büyüklüğü

$$P = a_p A^{-3/4} = 33.5(200)^{-3/4} \simeq 0.6299 \text{ MeV}.$$

olur. Formülde $-\delta$ bulunduğundan eşleşme, çift Z için bağlanma enerjisine P **ekler**, tek Z için ise bağlanma enerjisinden P **çıkartır**.

Eşleşme hesaba katılmadığındaki bağlanma enerjisi şöyle yazılabilir:

$$B_0(Z) = B_0(Z_0) - \left(a_c A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} \right) (Z - Z_0)^2.$$

Dolayısıyla, tek ve çift tam sayı sınıflarının her birinde en iyi tam sayı, Z_0 'a en yakın olandır. En iyi tek sayı seçimi 79, en iyi çift sayı seçimi ise 80'dir. Eşleşme de hesaba katılarak doğrudan yerine koyma işlemi şu sonuçları verir:

Z	N	δ (MeV)	B (MeV)
78	122	-0.630	1609.55
79	121	+0.630	1609.17
80	120	-0.630	1610.12

Özellikle,

$$B(80) - B(79) \simeq 0.954 \text{ MeV} > 0.$$

Böylece,

$$\boxed{Z = 80, \quad N = 120,}$$

ve

$$\frac{B}{A} = \frac{1610.12}{200} \simeq 8.05 \text{ MeV.}$$

(b)(iii)

Önce, (i) kısmındaki sonuçtan

$$Z_{\max} = \frac{128}{2 + \frac{0.72}{47.0} 128^{2/3}} \simeq 53.577.$$

bulunur. Dolayısıyla en yakın tam sayı 54'tür; eşleşme de bu değeri destekler.

Bu çekirdekler için,

$$P = 33.5(128)^{-3/4} \simeq 0.880313 \text{ MeV.}$$

İyot ve sezyumun hem N 'si hem de Z 'si tektir; dolayısıyla $\delta = +P$ 'dir. Ksenonun hem N 'si hem de Z 'si çifttir; dolayısıyla $\delta = -P$ 'dir.

Bozunmanın enerji açısından incelenmesi, bağlanma enerjilerinin yanı sıra çekirdek kütlelerini de gerektirir. $E_Z = M_Z c^2$ yazarsak,

$$E_Z = 128m_n c^2 + Z(m_p - m_n)c^2 - B_Z = 128m_n c^2 - (1.30 \text{ MeV})Z - B_Z.$$

Yerine koyma işlemi aşağıdaki değerleri verir. Küçük çift beta enerjisini ayırt edebilmek için fazladan basamaklar korunmuştur.

Çekirdek	B_Z (MeV)	$E_Z - E_{54}$ (MeV)
$^{128}_{53}\text{I}$	1104.656	3.195830
$^{128}_{54}\text{Xe}$	1106.552	0
$^{128}_{55}\text{Cs}$	1103.172	2.079906

Atom elektronlarının bağlanma enerjileri ve nötrinoların durgunluk kütleleri ihmal edildiğinde, enerjinin korunumu şu ifadeleri verir:

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-}(Z) &= E_Z - E_{Z+1} - m_e c^2, \\ Q_{\beta^+}(Z) &= E_Z - E_{Z-1} - m_e c^2, \\ Q_{\text{EC}}(Z) &= E_Z + m_e c^2 - E_{Z-1}, \\ Q_{\beta^-\beta^-}(Z) &= E_Z - E_{Z+2} - 2m_e c^2. \end{aligned}$$

Elektronun durgunluk enerjisi salımda çıkarılır, yakalamada ise eklenir. Bir süreç $Q > 0$ olduğunda enerji açısından mümkündür.

Belirtilen küme içindeki tüm olası geçişler şunlardır:

Başlangıç çekirdeği	Süreç	Ürün çekirdek	Q (MeV)	Mümkün mü?
^{128}I	β^-	^{128}Xe	+2.686	✓
^{128}Xe	β^-	^{128}Cs	-2.590	0
^{128}Xe	β^+	^{128}I	-3.706	0

Başlangıç çekirdeği	Süreç	Ürün çekirdek	Q (MeV)	Mümkün mü?
^{128}Cs	β^+	^{128}Xe	+1.570	$\checkmark$
^{128}Xe	Elektron yakalama	^{128}I	-2.686	0
^{128}Cs	Elektron yakalama	^{128}Xe	+2.590	$\checkmark$
^{128}I	$\beta^-\beta^-$	^{128}Cs	+0.096	$\checkmark$

Özellikle küçük çift beta enerjisi için,

$$\begin{aligned}
Q_{\beta^-\beta^-} &= E_{53} - E_{55} - 2m_e c^2 \\
&= 3.195830 - 2.079906 - 1.020 \\
&\simeq 0.0959 \text{ MeV} > 0.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, ksenon üzerinden ilerleyen ardışık yolun ikinci adımı yasak olsa da iyodun sezyuma eşzamanlı çift beta bozunması enerji açısından mümkündür.

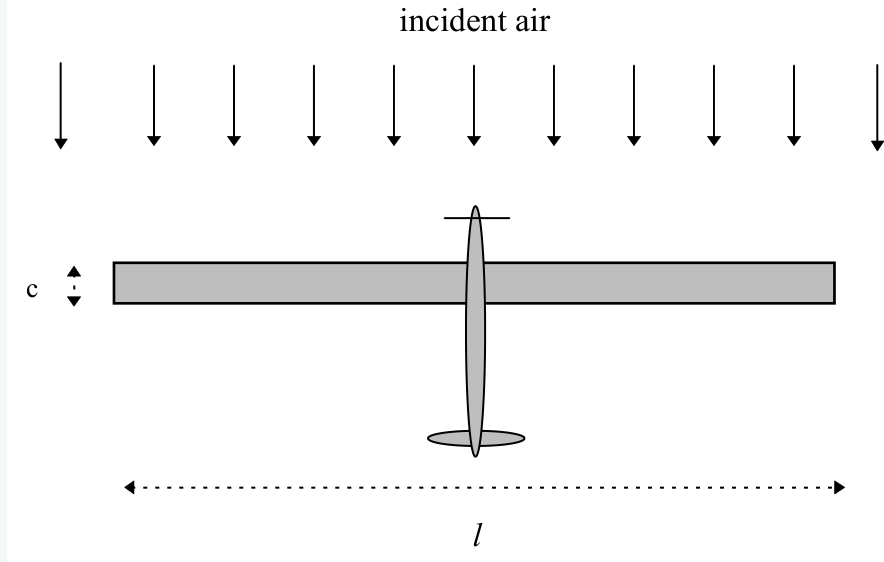
Ksenonun belirtilen küme içinde enerji açısından mümkün bir geçişi yoktur. İyot beta eksi veya çift beta eksi bozunmasına uğrayabilir; sezyum ise pozitron salabilir veya elektron yakalayabilir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

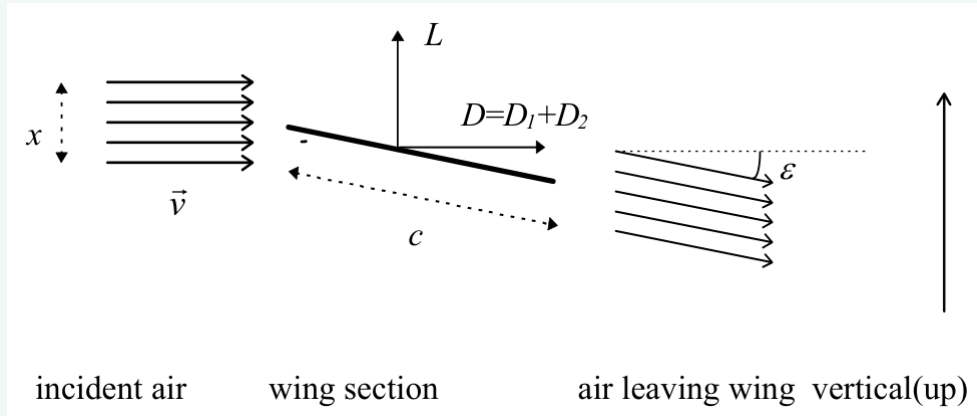
Soru 3: Güneş Enerjili Uçak

Yalnızca güneş enerjisini kullanarak havada kalacak bir uçak tasarlamak istiyoruz. En verimli tasarım, üst yüzeyi tamamen güneş hücreleriyle kaplı bir kanada sahip olmalıdır. Hücreler, motorun pervaneyi döndürmek için kullandığı elektrik gücünü sağlar.

Açıklığı l , veter uzunluğu (genişliği) c olan, üstten görünüşü dikdörtgen biçimindeki bir kanadı ele alın; kanat alanı $S = cl$, kanat açıklık oranı ise $A = l/c$ 'dir. Yüksekliği x ve uzunluğu l olan bir hava diliminin, sürati yalnızca çok az değişerek küçük bir ε açısıyla aşağı doğru saptırılmasını ele alarak kanadın performansı hakkında yaklaşık bir fikir edinebiliriz. Uçuş için en uygun ε değerini seçmek üzere kumanda yüzeyleri kullanılabilir. Bu basit model, $x = \pi l/4$ olduğunda gerçeğe oldukça iyi uyar ve bunun geçerli olduğunu varsayabiliriz. Uçağın toplam kütlesi M 'dir ve çevresindeki havaya göre $\vec{v}$ hızıyla yatay olarak uçmaktadır. Aşağıdaki hesaplamalarda yalnızca kanat çevresindeki hava akışını dikkate alın.



Uçağın üstten görünüşü (kendi referans sisteminde):



Kanadın yandan görünüşü (uçakla birlikte hareket eden bir referans sisteminde):

Pervanenin hava akışında oluşturduğu değişikliği ihmal edin.

(a) Kanadın yanından geçen havanın, bu sırada sürati *hiç* değişmeden gerçekleşen momentum değişimini ele alın. Kanat boyutları, v , ε ve hava yoğunluğu ρ cinsinden, kanada etki eden düşey kaldırma kuvveti L ve yatay sürüklenme kuvveti D_1 için ifadeler türetin. Hava akışının yönünün her zaman yandan görünüş çiziminin düzlemine paralel olduğunu varsayın.

(3 puan)

(b) Kanat yüzeyi üzerinden akan havanın sürtünmesinden kaynaklanan ek bir yatay sürüklenme kuvveti D_2 vardır. Hava hafifçe yavaşlar; süratindeki Δv değişimi (v 'nin $\ll 1\%$ 'i) şu şekilde verilir:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A}$$

f 'nin değeri ε 'dan bağımsızdır.

Bu uçağı sabit irtifada ve sabit hızla uçuşta tutmak için gereken gücün en küçük olduğu uçuş sürati v_0 için (M , f , A , S , ρ ve yer çekimi ivmesi g cinsinden) bir ifade bulun. ($\varepsilon^2 f$) veya daha yüksek mertebeden terimleri ihmal edin.

(3 puan)

Aşağıdaki küçük açı yaklaşımı yararlı olabilir:

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\sin^2 \varepsilon}{2}$$

(c) Cevap kâğıdına, P gücünün v uçuş süratine bağıllığını gösteren bir grafik çizin. İki sürüklenme kaynağının gereken güce katkılarını ayrı ayrı gösterin. En küçük güç $P_{\min}$ için (M, f, A, S, ρ ve g cinsinden) bir ifade bulun.

(2 puan)

(d) Güneş hücreleri, elektrik motorları ve pervanelerin kanat alanının metrekaresi başına $I = 10$ watt mekanik güç üretmesine yetecek kadar enerji sağlayabiliyorsa, bu güç için en büyük kanat yüklemesini Mg/S (N/m²) ve uçuş süratini v_0 (m/s) hesaplayın. $\rho = 1.25$ kg/m³, $f = 0.004$, $A = 10$ olduğunu varsayın.

(2 puan)

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

• (a)

$$L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon, \quad D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

• (b)

$$v_0 = \left[\frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2} \right]^{1/4}.$$

• (c)

$$P(v) = \underbrace{\frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S v}}_{P_1} + \underbrace{\frac{\pi}{4} \rho f S v^3}_{P_2},$$

$$P_{\min} = \left(\frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

İndüklenmiş sürüklemekten kaynaklanan güç katkısı P_1 , $1/v$ ile orantılı olarak azalırken sürtünme katkısı P_2 , v^3 ile orantılı olarak artar. Toplamlarının, $P_1 = 3P_2$ olduğu v_0 süratinde tek bir minimumu vardır.

• (d)

$$\left(\frac{Mg}{S} \right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2, \quad v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}.$$

Çözüm

(a)

Uçağın referans sisteminde çalışalım. dt süresinde, akışın etkilendiği xl kesitinden geçen havanın hacmi $xl v dt$ 'dir. Dolayısıyla kütleli debi

$$\dot{m} = \rho xlv.$$

Havanın başlangıçtaki yatay sürati v 'dir. Saptırıldıktan sonra yatay hızı $v \cos \varepsilon$, aşağı yönlü hızı ise $v \sin \varepsilon$ olur.

Momentum ilkesi ve Newton'un üçüncü yasası gereğince, kanada etki eden yukarı yönlü kuvvet, havanın aşağı yönlü momentum kazanma hızına eşittir:

$$L = \dot{m} v \sin \varepsilon = \rho xlv^2 \sin \varepsilon.$$

Benzer şekilde hava yatay momentum kaybeder ve bu, kanat üzerinde bir sürüklenme kuvveti oluşturur:

$$D_1 = \dot{m} v (1 - \cos \varepsilon) = \rho xlv^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

$x = \pi l/4$ kullanılarak,

$$\boxed{L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon}, \quad \boxed{D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon)}.$$

Küçük ε için bunlar şu hâli alır:

$$L \simeq \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \varepsilon, \quad D_1 \simeq \frac{\pi}{8} \rho l^2 v^2 \varepsilon^2.$$

(b)

$AS = l^2$ olduğundan şu tanımları yapalım:

$$K = \rho xl = \frac{\pi}{4} \rho AS, \quad \dot{m} = Kv.$$

Süratin azalmasından kaynaklanan ek yatay momentum kaybı şu sonucu verir:

$$D_2 = \dot{m} \Delta v \cos \varepsilon.$$

$\Delta v/v = f/A$ kullanılarak ve $\varepsilon^2 f$ mertebesindeki düzeltme ihmal edilerek,

$$D_2 \simeq Kv^2 \frac{f}{A} = \boxed{\frac{\pi}{4} \rho f S v^2}.$$

Yavaşlama, kaldırma kuvvetini de görelî olarak f/A oranında azaltır. Ancak bunun, $\sin^2 \varepsilon$ ile orantılı olan indüklenmiş sürüklenme üzerindeki etkisi $\varepsilon^2 f$ mertebesinde. Dolayısıyla, istenen doğruluk düzeyinde, (a)'daki kaldırma kuvveti ifadesini kullanarak düşey denge koşulunu yazabiliriz:

$$Mg = Kv^2 \sin \varepsilon, \quad \sin \varepsilon = \frac{Mg}{Kv^2}.$$

Verilen küçük açı yaklaşımı daha sonra şu sonucu verir:

$$D_1 \simeq \frac{Kv^2}{2} \sin^2 \varepsilon = \frac{(Mg)^2}{2Kv^2} = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho AS v^2}.$$

Sabit hızlı yatay uçuşta pervanenin itme kuvveti toplam sürüklenme kuvvetini dengeler. Dolayısıyla gereken mekanik güç

$$P = (D_1 + D_2)v = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho AS v} + \frac{\pi}{4} \rho f S v^3.$$

Bunu şu şekilde yazalım:

$$P = \frac{\alpha}{v} + \beta v^3, \quad \alpha = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho AS}, \quad \beta = \frac{\pi}{4} \rho f S.$$

Uçuş süratine göre türev alındığında,

$$\frac{dP}{dv} = -\frac{\alpha}{v^2} + 3\beta v^2.$$

Böylece en uygun sürat şu koşulu sağlar:

$$v_0^4 = \frac{\alpha}{3\beta} = \frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f AS^2},$$

dolayısıyla

$$v_0 = \left[\frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f AS^2} \right]^{1/4}.$$

Bu, $v > 0$ için tek minimumdur; çünkü

$$\frac{d^2P}{dv^2} = \frac{2\alpha}{v^3} + 6\beta v > 0.$$

(c)

Minimumda, $\alpha = 3\beta v_0^4$ koşulundan

$$P_1(v_0) = \frac{\alpha}{v_0} = 3\beta v_0^3 = 3P_2(v_0).$$

Böylece

$$P_{\min} = 4\beta v_0^3 = \pi \rho f S v_0^3.$$

v_0 ifadesi yerine konulduğunda,

$$P_{\min} = \left(\frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

İstenen grafik şu özelliklere sahiptir:

- $P_1 = \alpha/v$ azalan bir hiperboldür. Biçimsel olarak, $v \rightarrow 0^+$ iken sonsuza gider ve $v \rightarrow \infty$ iken sıfıra yaklaşır.
- $P_2 = \beta v^3$, yatay bir teğetle orijinden başlar ve monoton olarak artar.
- Toplamları her iki eğrinin de üzerinde yer alır, tek minimumu olan $(v_0, P_{\min})$ noktasına kadar azalır, ardından artar. Pozitif sürat aralığının her iki ucunda da sonsuza gider ve eksenleri kesmez.
- İki katkı, toplam gücün minimumunun sağında, $v = 3^{1/4} v_0 \approx 1.316 v_0$ süratinde kesişir.

$u = v/v_0$ tanımlanarak kesin bir boyutsuz gösterim elde edilir:

$$\frac{P_1}{P_{\min}} = \frac{3}{4u}, \quad \frac{P_2}{P_{\min}} = \frac{u^3}{4}, \quad \frac{P}{P_{\min}} = \frac{3}{4u} + \frac{u^3}{4}.$$

Grafik çizimi için yararlı noktalar şunlardır:

v/v_0	$P_1/P_{\min}$	$P_2/P_{\min}$	$P/P_{\min}$
0.500	1.500	0.031	1.531
1.000	0.750	0.250	1.000
1.316	0.570	0.570	1.140
2.000	0.375	2.000	2.375

$v \rightarrow 0^+$ limiti, bu denklemlerin biçimsel bir ekstrapolasyonudur: yeterince düşük süratlerde, küçük açı yaklaşımının dışında kalan bir sapma açısı gerekir.

(d)

Kanat yüklemesi şu olsun:

$$w = \frac{Mg}{S}.$$

Kullanılabilir mekanik güç IS 'dir. En büyük yükleme, bu güç gereken en küçük güce tam olarak eşit olduğunda elde edilir:

$$IS = P_{\min} = \pi \rho f S v_0^3.$$

Sonuç olarak,

$$v_0 = \left(\frac{I}{\pi \rho f} \right)^{1/3}.$$

Sayısal olarak,

$$v_0 = \left(\frac{10}{\pi(1.25)(0.004)} \right)^{1/3} = 8.6025 \dots \text{ m/s},$$

buradan

$$\boxed{v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}}.$$

(b)'deki en uygun sürat bağıntısını yeniden düzenleyerek,

$$v_0^4 = \frac{8w^2}{3\pi^2 \rho^2 f A},$$

şunu elde ederiz:

$$w_{\max} = \pi \rho v_0^2 \sqrt{\frac{3fA}{8}} = \pi \rho \sqrt{\frac{3fA}{8}} \left(\frac{I}{\pi \rho f} \right)^{2/3}.$$

Değerler yerine konulduğunda,

$$w_{\max} = \pi(1.25)(8.6025 \dots)^2 \sqrt{\frac{3(0.004)(10)}{8}} = 35.5925 \dots \text{ N/m}^2.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{\left(\frac{Mg}{S} \right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2}.$$

Bu değer en büyüktür; çünkü $P_{\min}/S$, $w^{3/2}$ ile orantılı olarak artar; daha büyük bir yükleme, her süratte kullanılabilir 10 W/m^2 'den daha fazla güç gerektirir.

Tutarlılık kontrolü olarak, bu çalışma noktasında,

$$\sin \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{6f}{A}}, \quad \varepsilon_0 \simeq 0.049 \text{ rad} \simeq 2.8^\circ,$$

ve

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A} = 0.0004 = 0.04\%.$$

Her iki yaklaşım da verilen verilerle tutarlıdır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.