

IPhO 1997

Теоретические задачи и решения · Садбери, Канада · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1997/

Задача 1: Масштабирование

(а) Небольшой груз подвешен к концу идеальной пружины с пренебрежимо малой массой и совершает вертикальные колебания с собственной частотой f . Если разрезать пружину пополам и снова подвесить груз к концу одной из половин, какой будет новая частота f' ? (1.5 балла)

(b) Радиус атома водорода в основном состоянии равен $a_0 = 0.0529 \text{ nm}$ («боровский радиус»). Чему равен радиус a' атома «мюонного водорода», в котором электрон заменён мюоном с таким же зарядом и массой, в 207 раз превышающей массу электрона? Считайте, что масса протона намного больше масс мюона и электрона. (2 балла)

(с) Средняя температура Земли равна $T = 287 \text{ K}$. Какой стала бы новая средняя температура T' , если бы среднее расстояние между Землёй и Солнцем уменьшилось на 1%? (2 балла)

(d) В некоторый день воздух сухой и имеет плотность $\rho = 1.2500 \text{ kg/m}^3$. На следующий день влажность повысилась, и теперь водяной пар составляет 2% массы воздуха. Давление и температура остались такими же, как накануне. Чему теперь равна плотность воздуха ρ' ? (2 балла)

Средняя молярная масса сухого воздуха: 28.8 (г/моль)

Молярная масса воды: 18 (г/моль)

Считайте газ идеальным.

(е) Вертолёт определённого типа может зависать в воздухе, если механическая мощность его двигателя равна P . Если изготовить другой вертолёт, представляющий собой точную копию первого в масштабе $\frac{1}{2}$ (по всем линейным размерам), какая механическая мощность P' потребуется ему для зависания? (2.5 балла)

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- (а) $f' = \sqrt{2} f$.
- (b) $a' = \frac{a_0}{207} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}$.

- (c) $T' = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K}$, что соответствует повышению примерно на 1.4 K.
- (d) $\rho' = \frac{1.2500}{1.012} \text{ kg/m}^3 \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3$.
- (e) $P' = 2^{-7/2} P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884P$.

Решение

(a)

Пусть жёсткость исходной пружины равна k , а масса подвешенного груза — m . Собственная частота колебаний равна

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Однородную пружину можно рассматривать как две одинаковые пружины, соединённые последовательно, каждая из которых составляет её половину. Если жёсткость каждой половины равна k_h , то

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_h},$$

откуда $k_h = 2k$. Иными словами, при одной и той же силе натяжения удлинение каждой половины вдвое меньше удлинения всей пружины.

Масса остаётся неизменной, поэтому

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2} f.$$

Сила тяжести изменяет равновесное удлинение, но не влияет на частоту колебаний идеальной пружины.

(b)

В указанном приближении протон можно считать неподвижным, поэтому характерный размер атома определяется массой m частицы, движущейся по орбите.

В модели Бора кулоновское притяжение создаёт центростремительную силу, а момент импульса в основном состоянии равен $\hbar$:

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad mva = \hbar.$$

Исключая v , получаем

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}.$$

Таким образом, при неизменном заряде радиус обратно пропорционален массе частицы. Поскольку $m_\mu = 207m_e$,

$$\frac{a'}{a_0} = \frac{m_e}{m_\mu} = \frac{1}{207}.$$

Следовательно,

$$a' = \frac{0.0529}{207} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}.$$

(c)

Предположим, что установилось радиационное равновесие, светимость Солнца постоянна, а альbedo Земли и её эффективные характеристики теплового излучения не изменяются.

На расстоянии r между Землёй и Солнцем плотность потока падающего солнечного излучения пропорциональна r^{-2} . Поэтому поглощаемая мощность равна

$$P_{\text{abs}} = (1 - \alpha) \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \pi R_{\oplus}^2,$$

где α — альbedo. По закону Стефана — Больцмана мощность излучения можно представить в виде

$$P_{\text{emit}} = 4\pi R_{\oplus}^2 \varepsilon_{\text{eff}} \sigma T^4,$$

с постоянным эффективным коэффициентом ε_{eff} .

Приравнявая поглощаемую и излучаемую мощности, получаем

$$T^4 \propto r^{-2}, \quad T \propto r^{-1/2}.$$

Новое расстояние равно $r' = 0.99r$, поэтому

$$T' = T \left(\frac{r}{r'} \right)^{1/2} = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K}.$$

Для проверки в первом приближении имеем

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = 0.005,$$

откуда $\Delta T \approx 1.435 \text{ K}$, что близко к результату 1.446 K , полученному до округления.

(d)

Пусть $M_d = 28.8 \text{ g/mol}$ и $M_w = 18 \text{ g/mol}$ — молярные массы сухого воздуха и воды. **Массовая доля** воды равна $w = 0.02$.

Влажный воздух массой m содержит сухой воздух массой $(1 - w)m$ и водяной пар массой wm . При использовании согласованных единиц массы общее количество вещества равно

$$n = \frac{(1 - w)m}{M_d} + \frac{wm}{M_w}.$$

Поскольку $m/V = \rho'$, из уравнения состояния идеального газа следует

$$\frac{p}{RT} = \frac{n}{V} = \rho' \left(\frac{1 - w}{M_d} + \frac{w}{M_w} \right).$$

Для исходного сухого воздуха при тех же давлении и температуре

$$\frac{p}{RT} = \frac{\rho}{M_d}.$$

Приравнявая эти выражения и преобразуя, получаем

$$\rho' = \frac{\rho}{(1 - w) + wM_d/M_w}.$$

Следовательно,

$$\rho' = \frac{1.2500}{0.98 + 0.02(28.8/18)} = \frac{1.2500}{1.012} \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3.$$

Плотность уменьшается, поскольку молекулы воды легче средней молекулы сухого воздуха, а общее число молекул в единице объёма при постоянных давлении и температуре остаётся неизменным.

(е)

Предположим, что копия изготовлена из материалов той же плотности и зависит в воздухе той же плотности. Используем законы масштабирования, полученные из идеальной модели потока импульса, при неизменной аэродинамической эффективности; пренебрежём изменениями влияния вязкости и механических потерь.

Пусть коэффициент линейного масштабирования равен λ . Масса вертолётa m изменяется пропорционально объёму, а площадь A , ометаемая несущим винтом, — пропорционально квадрату линейного размера:

$$m' = \lambda^3 m, \quad A' = \lambda^2 A.$$

Пусть v — характерная скорость направленного вниз потока воздуха, создаваемого несущим винтом. Для геометрически подобных потоков масса воздуха, ускоренного в единицу времени, изменяется по закону

$$\dot{m}_{\text{air}} \propto \rho_{\text{air}} A v.$$

По закону сохранения импульса направленная вверх сила тяги изменяется по закону

$$F \propto \dot{m}_{\text{air}} v \propto \rho_{\text{air}} A v^2.$$

Для зависания необходимо $F = mg$, поэтому

$$v \propto \sqrt{\frac{mg}{\rho_{\text{air}} A}}.$$

Следовательно,

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{\lambda^3}{\lambda^2}} = \lambda^{1/2}.$$

Необходимая мощность пропорциональна кинетической энергии, сообщаемой воздуху в единицу времени:

$$P \propto \dot{m}_{\text{air}} v^2 \propto \rho_{\text{air}} A v^3.$$

Таким образом,

$$\frac{P'}{P} = \lambda^2 (\lambda^{1/2})^3 = \lambda^{7/2}.$$

При $\lambda = \frac{1}{2}$

$$P' = \left(\frac{1}{2}\right)^{7/2} P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884P.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Массы и устойчивость ядер

Все энергии в этой задаче выражены в МэВ — миллионах электронвольт.

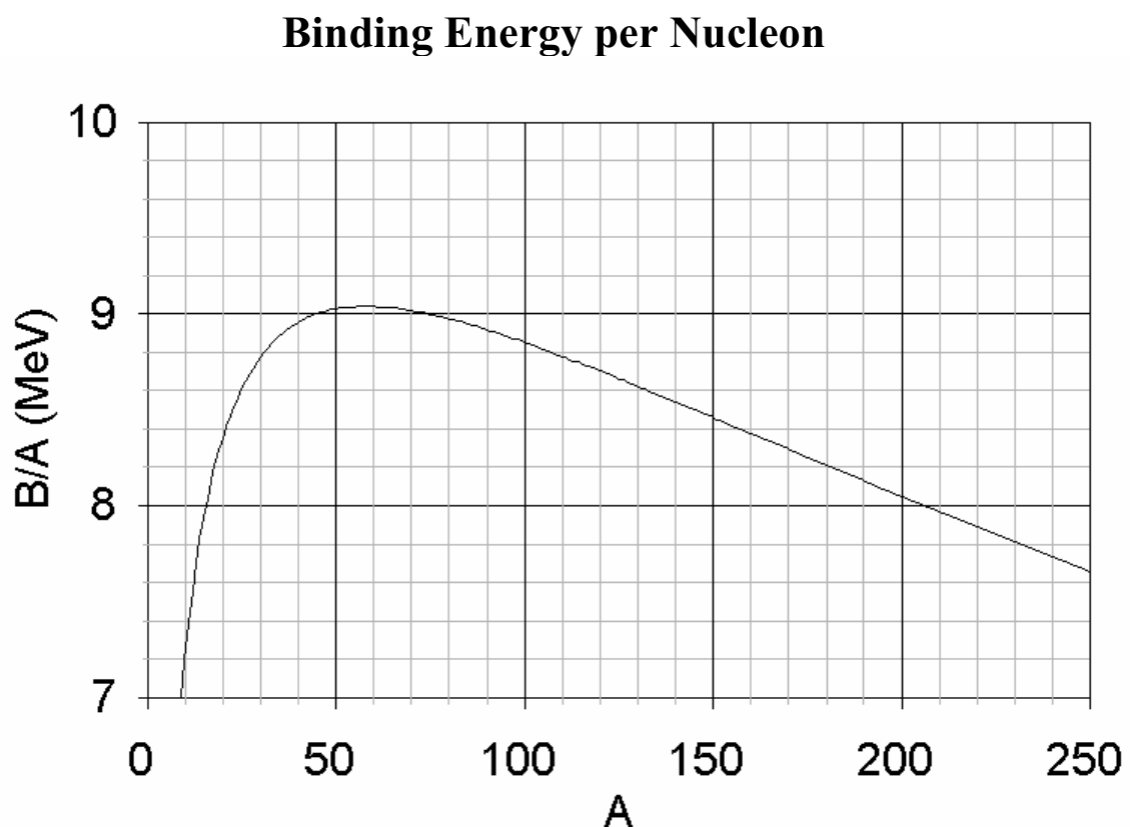
Один МэВ = 1.6×10^{-13} Дж, однако для решения задачи знать это не требуется.

Масса M атомного ядра с Z протонами и N нейтронами (т. е. с массовым числом $A = N + Z$) равна сумме масс свободных составляющих его нуклонов (протонов и нейтронов) за вычетом энергии связи, делённой на квадрат скорости света, B/c^2 .

$$Mc^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

На приведённом ниже графике показана зависимость максимального значения B/A при заданном значении A от A .

В общем случае чем больше значение B/A , тем устойчивее ядро.



(а) При массовых числах выше некоторого значения A_α энергии связи ядер всегда достаточно малы, чтобы было возможно испускание альфа-частиц ($A = 4$). Используя линейную аппроксимацию этой кривой на участке выше $A = 100$, оцените A_α . (3 балла)

В этой модели примите следующие допущения:

- Как исходное, так и конечное ядро представлены на этой кривой.
- Полная энергия связи альфа-частицы равна $B_4 = 25.0$ МэВ (это значение нельзя определить по графику!).

(b) Энергия связи атомного ядра с Z протонами и N нейтронами ($A = N + Z$) задаётся полуэмпирической формулой:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} - \delta$$

Величина δ задаётся следующим образом:

$+a_p A^{-3/4}$ для ядер с нечётным N и нечётным Z

0 для ядер с чётным N и нечётным Z или нечётным N и чётным Z

$-a_p A^{-3/4}$ для ядер с чётным N и чётным Z

Значения коэффициентов:

$$a_v = 15.8 \text{ MeV}; \quad a_s = 16.8 \text{ MeV}; \quad a_c = 0.72 \text{ MeV}; \quad a_a = 23.5 \text{ MeV}; \quad a_p = 33.5 \text{ MeV}.$$

(i) Выведите выражение для числа протонов $Z_{\max}$ в ядре с наибольшей энергией связи при заданном массовом числе A . Только в этом пункте пренебрегите членом с δ . (2 балла)

(ii) Чему равно Z для ядра с $A = 200$, имеющего наибольшее значение B/A ? Учтите влияние члена с δ . (2 балла)

(iii) Рассмотрите три ядра с $A = 128$, перечисленные в таблице на бланке ответов. Определите, какие из них энергетически устойчивы, а какие обладают достаточной энергией для распада посредством перечисленных ниже процессов. Определите $Z_{\max}$ согласно определению в пункте (i) и заполните таблицу на бланке ответов.

При заполнении таблицы:

- Отметьте энергетически разрешённые процессы знаком: $\checkmark$
- Отметьте энергетически НЕ разрешённые процессы знаком: 0
- Рассматривайте только переходы между этими тремя ядрами.

Процессы распада:

(1) β^- -распад; испускание ядром электрона

(2) β^+ -распад; испускание ядром позитрона

(3) $\beta^- \beta^-$ -распад; одновременное испускание ядром двух электронов

(4) Электронный захват; захват ядром атомного электрона.

Энергия покоя электрона (и позитрона) равна $m_e c^2 = 0.51$ МэВ; протона — $m_p c^2 = 938.27$ МэВ; нейтрона — $m_n c^2 = 939.57$ МэВ.

(3 балла)

(b) (iii)

Ядро/Процесс	β^- -распад	β^+ -распад	Электронный захват	$\beta^-\beta^-$ -распад
$^{128}_{53}\text{I}$				
$^{128}_{54}\text{Xe}$				
$^{128}_{55}\text{Cs}$				

Обозначение: $^A_Z X$

X = химический символ

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- (a) $A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2$. Использованная ниже линейная аппроксимация даёт приблизительно 215.
- (b)(i) $Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}$. Это максимум при непрерывном изменении переменной; если спаривание не учитывается, следует выбрать ближайшее целое число.
- (b)(ii) $Z = 80$, при этом $N = 120$ и $B/A \approx 8.05$ МэВ.
- (b)(iii) При непрерывном изменении переменной получается $Z_{\max} \approx 53.58$; максимум энергии связи при целочисленном значении достигается при $Z = 54$. В рамках указанных переходов ^{128}Xe устойчив, тогда как ^{128}I и ^{128}Cs могут распадаться.

Ядро/Процесс	β^- -распад	β^+ -распад	Электронный захват	$\beta^-\beta^-$ -распад
$^{128}_{53}\text{I}$	✓	0	0	✓
$^{128}_{54}\text{Xe}$	0	0	0	0
$^{128}_{55}\text{Cs}$	0	✓	✓	0

В соответствии с указанным ограничением процессы, дочерние ядра которых не входят в число этих трёх ядер, отмечены 0.

Решение

(a)

При альфа-распаде сохраняются полные числа протонов и нейтронов. Следовательно, при вычислении энерговыделения энергии покоя свободных нуклонов взаимно сокращаются:

$$Q_\alpha = [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M(4, 2)]c^2 = B(A - 4) + B_4 - B(A).$$

Распад энергетически разрешён при $Q_\alpha > 0$.

Запишем линейную аппроксимацию величины, представленной на графике, в виде

$$b(A) \equiv \frac{B(A)}{A} \simeq b_0 - kA.$$

Характерные значения, считываемые с графика:

$$b(100) \simeq 8.85 \text{ MeV}, \quad b(200) \simeq 8.05 \text{ MeV}.$$

Таким образом,

$$k \simeq 8.0 \times 10^{-3} \text{ MeV}, \quad b_0 \simeq 9.65 \text{ MeV},$$

где A — безразмерная величина. Поэтому полная энергия связи равна

$$B(A) \simeq b_0 A - k A^2.$$

Учитывая конечное изменение числа нуклонов на четыре, получаем

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= B_4 + b_0(A - 4) - k(A - 4)^2 - b_0 A + k A^2 \\ &= B_4 - 4b_0 + 8kA - 16k. \end{aligned}$$

На пороге $Q_\alpha = 0$, откуда

$$A_\alpha = \frac{b_0 - B_4/4}{2k} + 2.$$

Численно:

$$A_\alpha \simeq \frac{9.65 - 25.0/4}{0.016} + 2 = 214.5.$$

Поскольку Q_α возрастает с A , выше этого порога испускание альфа-частиц энергетически возможно. С учётом точности графика,

$$A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2.$$

(b)(i)

При фиксированном A подставим $N = A - Z$, так что $N - Z = A - 2Z$. Без учёта спаривания,

$$B(Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_a}{A} (A - 2Z)^2.$$

Сначала рассматривая Z как непрерывную переменную, запишем условие максимума:

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_c Z A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} (A - 2Z) = 0.$$

Умножая на A и собирая члены с Z , получаем

$$(2a_c A^{2/3} + 8a_a)Z = 4a_a A.$$

Следовательно,

$$Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}.$$

Эта стационарная точка является максимумом, поскольку

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_c A^{-1/3} - \frac{8a_a}{A} < 0.$$

Без учёта спаривания физически допустимый целочисленный максимум достигается при целом числе, ближайшем к этому значению.

(b)(ii)

При $A = 200$ максимум для непрерывной переменной без учёта спаривания достигается при

$$Z_0 = \frac{200}{2 + \frac{0.72}{47.0} 200^{2/3}} \simeq 79.242.$$

Поскольку A чётно, чётному Z соответствует чётное N , а нечётному Z — нечётное N . Модуль поправки на спаривание равен

$$P = a_p A^{-3/4} = 33.5(200)^{-3/4} \simeq 0.6299 \text{ MeV}.$$

Поскольку формула содержит $-\delta$, спаривание **увеличивает** энергию связи на P при чётном Z и **уменьшает** её на P при нечётном Z .

Энергию связи без учёта спаривания можно записать в виде

$$B_0(Z) = B_0(Z_0) - \left(a_c A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} \right) (Z - Z_0)^2.$$

Поэтому среди целых чисел каждой чётности наилучшим является ближайшее к Z_0 . Наилучшее нечётное значение — 79, а наилучшее чётное — 80. Прямая подстановка с учётом спаривания даёт:

Z	N	δ (МэВ)	B (МэВ)
78	122	−0.630	1609.55
79	121	+0.630	1609.17
80	120	−0.630	1610.12

В частности,

$$B(80) - B(79) \simeq 0.954 \text{ MeV} > 0.$$

Таким образом,

$$\boxed{Z = 80, \quad N = 120,}$$

причём

$$\frac{B}{A} = \frac{1610.12}{200} \simeq 8.05 \text{ MeV}.$$

(b)(iii)

Сначала воспользуемся результатом пункта (i):

$$Z_{\max} = \frac{128}{2 + \frac{0.72}{47.0} 128^{2/3}} \simeq 53.577.$$

Таким образом, ближайшее целое число — 54; спаривание также способствует выбору этого значения.

Для этих ядер

$$P = 33.5(128)^{-3/4} \simeq 0.880313 \text{ MeV}.$$

У йода и цезия нечётные N и Z , поэтому $\delta = +P$. У ксенона чётные N и Z , поэтому $\delta = -P$.

Для анализа энергетики распада нужны как массы ядер, так и энергии связи. Обозначая $E_Z = M_Z c^2$, получаем

$$E_Z = 128m_n c^2 + Z(m_p - m_n)c^2 - B_Z = 128m_n c^2 - (1.30 \text{ MeV})Z - B_Z.$$

Подстановка даёт следующие значения. Дополнительные знаки сохранены, чтобы определить малую энергию двойного бета-распада.

Ядро	B_Z (МэВ)	$E_Z - E_{54}$ (МэВ)
$^{128}_{53}\text{I}$	1104.656	3.195830
$^{128}_{54}\text{Xe}$	1106.552	0
$^{128}_{55}\text{Cs}$	1103.172	2.079906

Пренебрегая энергиями связи атомных электронов и массами покоя нейтрино, из закона сохранения энергии получаем

$$\begin{aligned}
 Q_{\beta^-}(Z) &= E_Z - E_{Z+1} - m_e c^2, \\
 Q_{\beta^+}(Z) &= E_Z - E_{Z-1} - m_e c^2, \\
 Q_{\text{EC}}(Z) &= E_Z + m_e c^2 - E_{Z-1}, \\
 Q_{\beta^-\beta^-}(Z) &= E_Z - E_{Z+2} - 2m_e c^2.
 \end{aligned}$$

Энергия покоя электрона вычитается при испускании и прибавляется при захвате. Процесс энергетически разрешён при $Q > 0$.

Все возможные переходы в пределах указанного набора ядер:

Исходное ядро	Процесс	Дочернее ядро	Q (МэВ)	Разрешён?
^{128}I	β^-	^{128}Xe	+2.686	✓
^{128}Xe	β^-	^{128}Cs	-2.590	0
^{128}Xe	β^+	^{128}I	-3.706	0
^{128}Cs	β^+	^{128}Xe	+1.570	✓
^{128}Xe	Электронный захват	^{128}I	-2.686	0
^{128}Cs	Электронный захват	^{128}Xe	+2.590	✓
^{128}I	$\beta^-\beta^-$	^{128}Cs	+0.096	✓

В частности, для малой энергии двойного бета-распада:

$$\begin{aligned}
 Q_{\beta^-\beta^-} &= E_{53} - E_{55} - 2m_e c^2 \\
 &= 3.195830 - 2.079906 - 1.020 \\
 &\simeq 0.0959 \text{ MeV} > 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, одновременный двойной бета-распад йода в цезий энергетически разрешён, хотя второй шаг последовательного пути через ксенон запрещён.

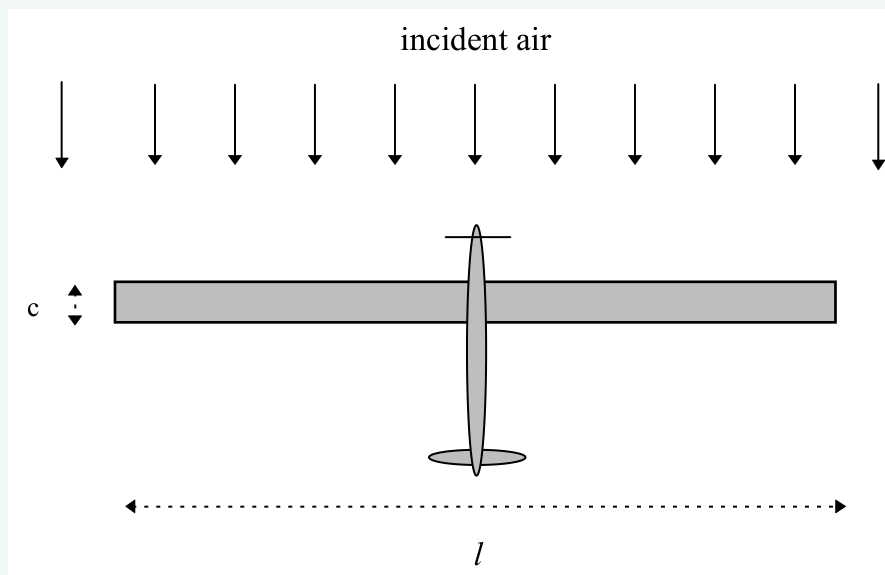
У ксенона нет энергетически разрешённых переходов в пределах указанного набора ядер. Йод может испытывать бета-минус-распад или двойной бета-минус-распад; цезий — испускать позитрон или захватывать электрон.

Решение проверено по официальному решению.

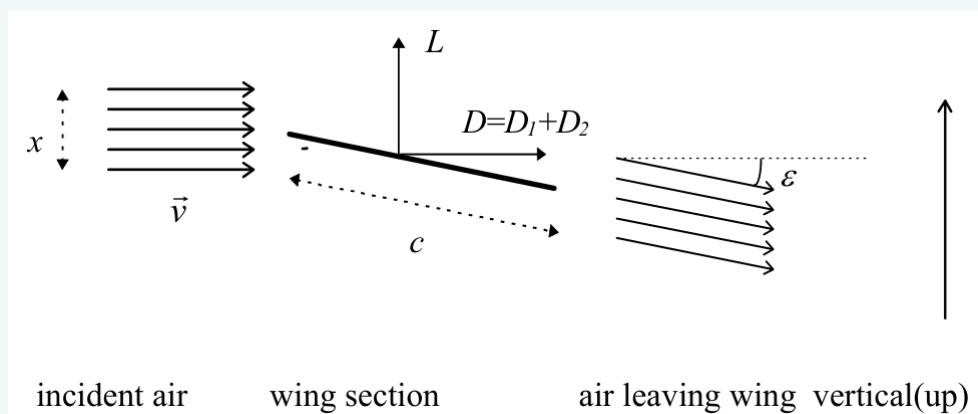
Задача 3: Самолёт на солнечной энергии

Мы хотим спроектировать самолёт, который будет держаться в воздухе, используя только солнечную энергию. Наиболее эффективна компоновка с крылом, верхняя поверхность которого полностью покрыта солнечными элементами. Эти элементы вырабатывают электрическую энергию, за счёт которой двигатель приводит во вращение воздушный винт.

Рассмотрим крыло прямоугольной формы в плане с размахом l и хордой (шириной) c ; площадь крыла равна $S = cl$, а его удлинение — $A = l/c$. Приближённое представление об аэродинамических характеристиках крыла можно получить, рассматривая слой воздуха высотой x и длиной l , отклоняемый вниз на малый угол ε при очень небольшом изменении скорости. С помощью рулевых поверхностей можно выбрать оптимальное для полёта значение ε . Эта простая модель хорошо соответствует действительности при $x = \pi l/4$, и далее будем считать это условие выполненным. Полная масса самолёта равна M , и он летит горизонтально со скоростью $\vec{v}$ относительно окружающего воздуха. В последующих расчётах рассматривайте только обтекание крыла воздухом.



Вид самолёта сверху (в связанной с ним системе отсчёта):



Вид крыла сбоку (в системе отсчёта, движущейся вместе с самолётом):

Пренебрегите изменением воздушного потока под действием воздушного винта.

(a) Рассмотрите изменение импульса воздуха, проходящего мимо крыла, при *неизменном* модуле его скорости. Получите выражения для вертикальной подъёмной силы L и горизонтальной силы сопротивления D_1 , действующих на крыло, через размеры крыла, v , ε и плотность воздуха ρ . Считайте, что направление воздушного потока всегда параллельно плоскости рисунка с видом сбоку.

(3 балла)

(b) Существует дополнительная горизонтальная сила сопротивления D_2 , обусловленная трением воздуха, обтекающего поверхность крыла. Воздух немного замедляется, причём изменение скорости Δv ($\ll 1\%$ от v) задаётся выражением:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A}$$

Значение f не зависит от ε .

Найдите выражение (через M , f , A , S , ρ и g — ускорение свободного падения) для скорости полёта v_0 , при которой мощность, необходимая для поддержания полёта этого самолёта на постоянной высоте с постоянной скоростью, минимальна. Пренебрегите членами порядка $(\varepsilon^2 f)$ и выше.

(3 балла)

Вам может пригодиться следующее приближение для малых углов:

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\sin^2 \varepsilon}{2}$$

(c) На листе ответов схематически изобразите график зависимости мощности P от скорости полёта v . Покажите отдельно вклады в требуемую мощность от двух источников сопротивления. Найдите выражение (через M , f , A , S , ρ и g) для минимальной мощности $P_{\min}$.

(2 балла)

(d) Если солнечные элементы могут обеспечить достаточно энергии, чтобы электродвигатели и воздушные винты развивали механическую мощность $I = 10$ ватт на квадратный метр площади крыла, вычислите максимальную нагрузку на крыло Mg/S (N/m^2) при этой мощности и скорость полёта v_0 (m/s). Примите $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$, $f = 0.004$, $A = 10$.

(2 балла)

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

• (a)

$$L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon,$$

$$D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

- (b)

$$v_0 = \left[\frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2} \right]^{1/4}.$$

- (c)

$$P(v) = \underbrace{\frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S v}}_{P_1} + \underbrace{\frac{\pi}{4} \rho f S v^3}_{P_2},$$

$$P_{\min} = \left(\frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

Мощность P_1 , затрачиваемая на преодоление индуктивного сопротивления, убывает как $1/v$, а мощность P_2 , затрачиваемая на преодоление сопротивления трения, возрастает как v^3 . Их сумма имеет единственный минимум при v_0 , где $P_1 = 3P_2$.

- (d)

$$\left(\frac{Mg}{S} \right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2, \quad v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}.$$

Решение

(a)

Будем работать в системе отсчёта самолёта. За время dt через поперечное сечение xl потока, отклоняемого крылом, проходит объём воздуха $xlv dt$. Следовательно, массовый расход воздуха равен

$$\dot{m} = \rho xlv.$$

Первоначально воздух движется горизонтально со скоростью v . После отклонения горизонтальная составляющая его скорости равна $v \cos \varepsilon$, а направленная вниз составляющая — $v \sin \varepsilon$.

Согласно закону изменения импульса и третьему закону Ньютона, направленная вверх сила, действующая на крыло, равна скорости приобретения воздухом импульса, направленного вниз:

$$L = \dot{m} v \sin \varepsilon = \rho xlv^2 \sin \varepsilon.$$

Аналогично, воздух теряет горизонтальный импульс, что приводит к возникновению силы сопротивления, действующей на крыло:

$$D_1 = \dot{m} v (1 - \cos \varepsilon) = \rho xlv^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

Подставляя $x = \pi l/4$, получаем

$$L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon, \quad D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

При малых ε эти выражения принимают вид

$$L \simeq \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \varepsilon, \quad D_1 \simeq \frac{\pi}{8} \rho l^2 v^2 \varepsilon^2.$$

(b)

Поскольку $AS = l^2$, введём обозначения

$$K = \rho x l = \frac{\pi}{4} \rho AS, \quad \dot{m} = Kv.$$

Дополнительная потеря горизонтального импульса, вызванная уменьшением скорости, даёт

$$D_2 = \dot{m} \Delta v \cos \varepsilon.$$

Используя $\Delta v/v = f/A$ и отбрасывая поправку порядка $\varepsilon^2 f$, получаем

$$D_2 \simeq Kv^2 \frac{f}{A} = \boxed{\frac{\pi}{4} \rho f S v^2}.$$

Замедление также уменьшает подъёмную силу на относительную величину f/A . Однако его влияние на индуктивное сопротивление, пропорциональное $\sin^2 \varepsilon$, имеет порядок $\varepsilon^2 f$. Поэтому с требуемой точностью можно записать условие равновесия по вертикали, используя выражение для подъёмной силы из (a):

$$Mg = Kv^2 \sin \varepsilon, \quad \sin \varepsilon = \frac{Mg}{Kv^2}.$$

Тогда приведённое в условии приближение для малых углов даёт

$$D_1 \simeq \frac{Kv^2}{2} \sin^2 \varepsilon = \frac{(Mg)^2}{2Kv^2} = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho AS v^2}.$$

В установившемся горизонтальном полёте тяга воздушного винта уравнивает полную силу сопротивления. Поэтому требуемая механическая мощность равна

$$P = (D_1 + D_2)v = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho AS v} + \frac{\pi}{4} \rho f S v^3.$$

Запишем это в виде

$$P = \frac{\alpha}{v} + \beta v^3, \quad \alpha = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho AS}, \quad \beta = \frac{\pi}{4} \rho f S.$$

Дифференцируя по скорости полёта, получаем

$$\frac{dP}{dv} = -\frac{\alpha}{v^2} + 3\beta v^2.$$

Следовательно, оптимальная скорость удовлетворяет условию

$$v_0^4 = \frac{\alpha}{3\beta} = \frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f AS^2},$$

откуда

$$\boxed{v_0 = \left[\frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f AS^2} \right]^{1/4}}.$$

Это единственный минимум при $v > 0$, поскольку

$$\frac{d^2P}{dv^2} = \frac{2\alpha}{v^3} + 6\beta v > 0.$$

(c)

В точке минимума из условия $\alpha = 3\beta v_0^4$ следует

$$P_1(v_0) = \frac{\alpha}{v_0} = 3\beta v_0^3 = 3P_2(v_0).$$

Таким образом,

$$P_{\min} = 4\beta v_0^3 = \pi \rho f S v_0^3.$$

Подставляя выражение для v_0 , получаем

$$P_{\min} = \left(\frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

Искомый график обладает следующими свойствами:

- $P_1 = \alpha/v$ — убывающая гипербола. Формально эта величина стремится к бесконечности при $v \rightarrow 0^+$ и к нулю при $v \rightarrow \infty$.
- График $P_2 = \beta v^3$ начинается в начале координат с горизонтальной касательной и монотонно возрастает.
- График их суммы лежит выше обеих кривых, убывает до своего единственного минимума $(v_0, P_{\min})$, а затем возрастает. Сумма стремится к бесконечности на обоих концах диапазона положительных скоростей, и её график не пересекает оси координат.
- Кривые двух вкладов пересекаются при $v = 3^{1/4}v_0 \approx 1.316v_0$, справа от минимума полной мощности.

Точное безразмерное описание получается при введении $u = v/v_0$:

$$\frac{P_1}{P_{\min}} = \frac{3}{4u}, \quad \frac{P_2}{P_{\min}} = \frac{u^3}{4}, \quad \frac{P}{P_{\min}} = \frac{3}{4u} + \frac{u^3}{4}.$$

Для построения эскиза графика полезны следующие точки:

v/v_0	$P_1/P_{\min}$	$P_2/P_{\min}$	$P/P_{\min}$
0.500	1.500	0.031	1.531
1.000	0.750	0.250	1.000
1.316	0.570	0.570	1.140
2.000	0.375	2.000	2.375

Предел $v \rightarrow 0^+$ представляет собой формальную экстраполяцию этих уравнений: при достаточно низких скоростях потребовался бы угол отклонения, выходящий за пределы применимости приближения малых углов.

(d)

Обозначим нагрузку на крыло через

$$w = \frac{Mg}{S}.$$

Доступная механическая мощность равна IS . Максимальная нагрузка достигается, когда эта мощность в точности равна минимальной требуемой мощности:

$$IS = P_{\min} = \pi \rho f S v_0^3.$$

Следовательно,

$$v_0 = \left(\frac{I}{\pi \rho f} \right)^{1/3}.$$

Численно,

$$v_0 = \left(\frac{10}{\pi(1.25)(0.004)} \right)^{1/3} = 8.6025 \dots \text{ m/s},$$

откуда

$$\boxed{v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}}.$$

Преобразуя соотношение для оптимальной скорости из (b),

$$v_0^4 = \frac{8w^2}{3\pi^2 \rho^2 f A},$$

получаем

$$w_{\max} = \pi \rho v_0^2 \sqrt{\frac{3fA}{8}} = \pi \rho \sqrt{\frac{3fA}{8}} \left(\frac{I}{\pi \rho f} \right)^{2/3}.$$

Подстановка даёт

$$w_{\max} = \pi(1.25)(8.6025 \dots)^2 \sqrt{\frac{3(0.004)(10)}{8}} = 35.5925 \dots \text{ N/m}^2.$$

Поэтому

$$\boxed{\left(\frac{Mg}{S} \right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2}.$$

Это максимальное значение, поскольку $P_{\min}/S$ возрастает как $w^{3/2}$; при большей нагрузке на любой скорости потребовалась бы мощность, превышающая доступные 10 W/m^2 .

Для проверки согласованности найдём значения параметров в этом режиме полёта:

$$\sin \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{6f}{A}}, \quad \varepsilon_0 \simeq 0.049 \text{ rad} \simeq 2.8^\circ,$$

и

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A} = 0.0004 = 0.04\%.$$

Оба приближения согласуются с заданными данными.

Решение проверено по официальному решению.