

# IPhO 1997

Problemas teóricos y soluciones · Sudbury, Canadá · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1997/

## Problema 1: Leyes de escala

(a) Una pequeña masa cuelga del extremo de un muelle ideal de masa despreciable y oscila verticalmente con su frecuencia natural  $f$ . Si se corta el muelle por la mitad y se vuelve a fijar la masa en el extremo, ¿cuál es la nueva frecuencia  $f'$ ? (1.5 puntos)

(b) El radio de un átomo de hidrógeno en su estado fundamental es  $a_0 = 0.0529 \text{ nm}$  (el «radio de Bohr»). ¿Cuál es el radio  $a'$  de un átomo de «hidrógeno muónico» en el que el electrón se sustituye por un muón con la misma carga y una masa 207 veces mayor que la del electrón? Suponga que la masa del protón es mucho mayor que la del muón y la del electrón. (2 puntos)

(c) La temperatura media de la Tierra es  $T = 287 \text{ K}$ . ¿Cuál sería la nueva temperatura media  $T'$  si la distancia media entre la Tierra y el Sol se redujera un 1%? (2 puntos)

(d) Un día determinado, el aire está seco y tiene una densidad  $\rho = 1.2500 \text{ kg/m}^3$ . Al día siguiente, la humedad ha aumentado y el aire contiene un 2% en masa de vapor de agua. La presión y la temperatura son las mismas que el día anterior. ¿Cuál es ahora la densidad del aire  $\rho'$ ? (2 puntos)

Masa molar media del aire seco: 28.8 (g/mol)

Masa molar del agua: 18 (g/mol)

Suponga un comportamiento de gas ideal.

(e) Un tipo de helicóptero puede mantenerse en vuelo estacionario si la potencia mecánica que entrega su motor es  $P$ . Si se fabrica otro helicóptero que es una réplica exacta a escala  $\frac{1}{2}$  (en todas sus dimensiones lineales) del primero, ¿qué potencia mecánica  $P'$  necesita para mantenerse en vuelo estacionario? (2.5 puntos)

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

## Respuestas

- (a)  $f' = \sqrt{2} f$ .
- (b)  $a' = \frac{a_0}{207} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}$ .
- (c)  $T' = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K}$ , un aumento de aproximadamente 1.4 K.
- (d)  $\rho' = \frac{1.2500}{1.012} \text{ kg/m}^3 \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3$ .

- (e)  $P' = 2^{-7/2}P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884P.$

## Solución

(a)

Sea  $k$  la constante elástica del muelle original y  $m$  la masa fijada a él. Su frecuencia natural es

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En un muelle uniforme, las dos mitades son muelles idénticos conectados en serie. Si cada mitad tiene una constante elástica  $k_h$ , entonces

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_h},$$

por lo que  $k_h = 2k$ . De forma equivalente, bajo la misma tensión, cada mitad se alarga la mitad de lo que se alarga el muelle completo.

La masa no cambia, de modo que

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2} f.$$

La gravedad modifica el alargamiento de equilibrio, pero no afecta a la frecuencia de un muelle ideal.

(b)

Con la aproximación indicada, el protón se considera efectivamente fijo, por lo que la masa  $m$  de la partícula que orbita determina la escala de longitud atómica.

En el modelo de Bohr, la atracción de Coulomb proporciona la fuerza centrípeta y el momento angular del estado fundamental es  $\hbar$ :

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad mva = \hbar.$$

Al eliminar  $v$ , se obtiene

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}.$$

Así, si la carga no cambia, el radio es inversamente proporcional a la masa de la partícula. Como  $m_\mu = 207m_e$ ,

$$\frac{a'}{a_0} = \frac{m_e}{m_\mu} = \frac{1}{207}.$$

Por tanto,

$$a' = \frac{0.0529}{207} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}.$$

(c)

Supongamos que hay equilibrio radiativo, que la luminosidad solar es constante y que el albedo terrestre y las propiedades efectivas de radiación térmica no cambian.

A una distancia Tierra–Sol  $r$ , el flujo solar incidente es proporcional a  $r^{-2}$ . Por tanto, la potencia absorbida es

$$P_{\text{abs}} = (1 - \alpha) \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \pi R_{\oplus}^2,$$

donde  $\alpha$  es el albedo. Según la ley de Stefan–Boltzmann, la potencia emitida puede representarse como

$$P_{\text{emit}} = 4\pi R_{\oplus}^2 \varepsilon_{\text{eff}} \sigma T^4,$$

con un factor efectivo fijo  $\varepsilon_{\text{eff}}$ .

Al igualar las potencias absorbida y emitida, se obtiene

$$T^4 \propto r^{-2}, \quad T \propto r^{-1/2}.$$

La nueva distancia es  $r' = 0.99r$ , de modo que

$$T' = T \left( \frac{r}{r'} \right)^{1/2} = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K}.$$

Como comprobación a primer orden,

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = 0.005,$$

lo que da  $\Delta T \approx 1.435 \text{ K}$ , próximo al resultado sin redondear  $1.446 \text{ K}$ .

(d)

Sean  $M_d = 28.8 \text{ g/mol}$  y  $M_w = 18 \text{ g/mol}$  las masas molares del aire seco y del agua. La **fracción másica** de agua es  $w = 0.02$ .

Una masa  $m$  de aire húmedo contiene una masa  $(1 - w)m$  de aire seco y una masa  $w m$  de vapor de agua. Utilizando unidades de masa coherentes, su número total de moles es

$$n = \frac{(1 - w)m}{M_d} + \frac{w m}{M_w}.$$

Como  $m/V = \rho'$ , la ley de los gases ideales da

$$\frac{p}{RT} = \frac{n}{V} = \rho' \left( \frac{1 - w}{M_d} + \frac{w}{M_w} \right).$$

Para el aire seco original, a la misma presión y temperatura,

$$\frac{p}{RT} = \frac{\rho}{M_d}.$$

Al igualar estas expresiones y reordenar,

$$\rho' = \frac{\rho}{(1 - w) + w M_d / M_w}.$$

Por consiguiente,

$$\rho' = \frac{1.2500}{0.98 + 0.02(28.8/18)} = \frac{1.2500}{1.012} \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3.$$

La densidad disminuye porque las moléculas de agua son más ligeras que la molécula media del aire seco, mientras que el número total de moléculas por unidad de volumen permanece fijo a presión y temperatura constantes.

**(e)**

Supongamos que la réplica utiliza materiales de las mismas densidades y se mantiene en vuelo estacionario en aire de la misma densidad. Utilicemos las leyes de escala ideales del flujo de cantidad de movimiento, con una eficiencia aerodinámica invariable; despreciemos los cambios en los efectos viscosos y en las pérdidas mecánicas.

Sea  $\lambda$  el factor de escala lineal. La masa  $m$  del helicóptero varía como el volumen, mientras que el área  $A$  barrida por el rotor varía como una superficie:

$$m' = \lambda^3 m, \quad A' = \lambda^2 A.$$

Sea  $v$  la velocidad característica del aire dirigido hacia abajo por el rotor. Para un flujo geoméricamente semejante, la masa de aire acelerada por unidad de tiempo varía según

$$\dot{m}_{\text{air}} \propto \rho_{\text{air}} A v.$$

Por conservación de la cantidad de movimiento, el empuje hacia arriba varía según

$$F \propto \dot{m}_{\text{air}} v \propto \rho_{\text{air}} A v^2.$$

El vuelo estacionario requiere  $F = mg$ , de modo que

$$v \propto \sqrt{\frac{mg}{\rho_{\text{air}} A}}.$$

En consecuencia,

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{\lambda^3}{\lambda^2}} = \lambda^{1/2}.$$

La potencia necesaria es proporcional al ritmo al que se transfiere energía cinética al aire:

$$P \propto \dot{m}_{\text{air}} v^2 \propto \rho_{\text{air}} A v^3.$$

Así,

$$\frac{P'}{P} = \lambda^2 \left( \lambda^{1/2} \right)^3 = \lambda^{7/2}.$$

Para  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,

$$P' = \left( \frac{1}{2} \right)^{7/2} P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884P.$$

---

La solución se comprobó con la solución oficial.

## Problema 2: Masas nucleares y estabilidad

Todas las energías de este problema se expresan en MeV: millones de electronvoltios.

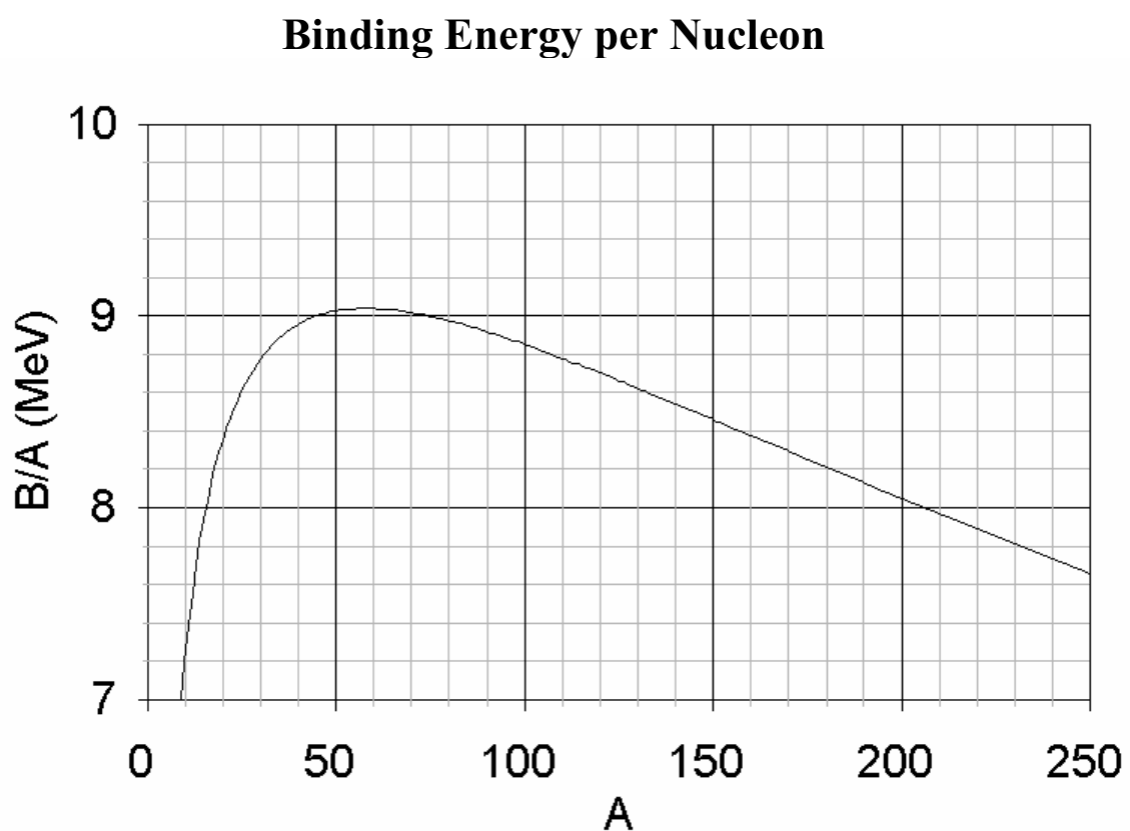
Un MeV =  $1.6 \times 10^{-13}$  J, pero no es necesario saberlo para resolver el problema.

La masa  $M$  de un núcleo atómico con  $Z$  protones y  $N$  neutrones (es decir, con número másico  $A = N + Z$ ) es la suma de las masas de los nucleones constituyentes libres (protones y neutrones) menos la energía de enlace  $B/c^2$ .

$$Mc^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

La gráfica que se muestra a continuación representa el valor máximo de  $B/A$  para un valor dado de  $A$ , en función de  $A$ .

En general, cuanto mayor es el valor de  $B/A$ , más estable es el núcleo.



(a) Por encima de cierto número másico  $A_\alpha$ , los núcleos tienen energías de enlace que siempre son lo suficientemente pequeñas como para permitir la emisión de partículas alfa ( $A = 4$ ). Utilice una aproximación lineal de esta curva para  $A = 100$  en adelante a fin de estimar  $A_\alpha$ . (3 puntos)

Para este modelo, suponga lo siguiente:

- Tanto el núcleo inicial como el final están representados en esta curva.
- La energía de enlace total de la partícula alfa viene dada por  $B_4 = 25.0$  MeV (¡este valor no puede leerse en la gráfica!).

(b) La energía de enlace de un núcleo atómico con  $Z$  protones y  $N$  neutrones ( $A = N + Z$ ) viene dada por una fórmula semiempírica:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} - \delta$$

El valor de  $\delta$  viene dado por:

$+a_p A^{-3/4}$  para núcleos con  $N$  impar y  $Z$  impar

0 para núcleos con  $N$  par y  $Z$  impar o con  $N$  impar y  $Z$  par

$-a_p A^{-3/4}$  para núcleos con  $N$  par y  $Z$  par

Los valores de los coeficientes son:

$$a_v = 15.8 \text{ MeV}; \quad a_s = 16.8 \text{ MeV}; \quad a_c = 0.72 \text{ MeV}; \quad a_a = 23.5 \text{ MeV}; \quad a_p = 33.5 \text{ MeV}.$$

(i) Deduzca una expresión para el número de protones  $Z_{\max}$  del núcleo con la mayor energía de enlace para un número másico  $A$  dado. Ignore el término  $\delta$  únicamente en este apartado. (2 puntos)

(ii) ¿Cuál es el valor de  $Z$  para el núcleo con  $A = 200$  que tiene el mayor  $B/A$ ? Incluya el efecto del término  $\delta$ . (2 puntos)

(iii) Considere los tres núcleos con  $A = 128$  que figuran en la tabla de la hoja de respuestas. Determine cuáles son energéticamente estables y cuáles tienen energía suficiente para desintegrarse mediante los procesos que se enumeran a continuación. Determine  $Z_{\max}$  tal como se define en el apartado (i) y complete la tabla de la hoja de respuestas.

Al completar la tabla:

- Marque los procesos energéticamente permitidos así:  $\checkmark$
- Marque los procesos que NO están energéticamente permitidos así: 0
- Considere únicamente transiciones entre estos tres núcleos.

Procesos de desintegración:

- (1) Desintegración  $\beta^-$ ; emisión de un electrón por el núcleo
- (2) Desintegración  $\beta^+$ ; emisión de un positrón por el núcleo
- (3) Desintegración  $\beta^-\beta^-$ ; emisión simultánea de dos electrones por el núcleo
- (4) Captura electrónica; captura de un electrón atómico por el núcleo.

La energía en reposo de un electrón (y de un positrón) es  $m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ ; la de un protón es  $m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}$ ; la de un neutrón es  $m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}$ .

(3 puntos)

(b) (iii)

| Núcleo/Proceso         | Desintegración<br>$\beta^-$ | Desintegración<br>$\beta^+$ | Captura<br>electrónica | Desintegración<br>$\beta^-\beta^-$ |
|------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------|------------------------------------|
| $^{128}_{53}\text{I}$  |                             |                             |                        |                                    |
| $^{128}_{54}\text{Xe}$ |                             |                             |                        |                                    |
| $^{128}_{55}\text{Cs}$ |                             |                             |                        |                                    |

Notación:  ${}^A_ZX$

$X$  = Símbolo químico

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

## Respuestas

- (a)  $A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2$ . El ajuste mediante una recta utilizado a continuación da aproximadamente 215.
- (b)(i)  $Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}$ . Este es el máximo continuo; si se omite el apareamiento, se elige el entero más próximo.
- (b)(ii)  $Z = 80$ , con  $N = 120$  y  $B/A \approx 8.05$  MeV.
- (b)(iii) El resultado continuo es  $Z_{\max} \approx 53.58$ ; el máximo de la energía de enlace para valores enteros se alcanza en  $Z = 54$ . Entre las transiciones especificadas,  ${}^{128}\text{Xe}$  es estable, mientras que  ${}^{128}\text{I}$  y  ${}^{128}\text{Cs}$  pueden desintegrarse.

| Núcleo/Proceso           | Desintegración<br>$\beta^-$ | Desintegración<br>$\beta^+$ | Captura<br>electrónica | Desintegración<br>$\beta^- \beta^-$ |
|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------|-------------------------------------|
| ${}^{128}_{53}\text{I}$  | $\checkmark$                | 0                           | 0                      | $\checkmark$                        |
| ${}^{128}_{54}\text{Xe}$ | 0                           | 0                           | 0                      | 0                                   |
| ${}^{128}_{55}\text{Cs}$ | 0                           | $\checkmark$                | $\checkmark$           | 0                                   |

Las entradas cuyos núcleos hijos no se encuentran entre estos tres núcleos se marcan con 0, de acuerdo con la restricción indicada.

## Solución

(a)

La desintegración alfa conserva el número total de protones y el de neutrones. Por consiguiente, las energías en reposo de los nucleones libres se cancelan al calcular la energía liberada:

$$Q_\alpha = [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M(4, 2)]c^2 = B(A - 4) + B_4 - B(A).$$

La desintegración está energéticamente permitida cuando  $Q_\alpha > 0$ .

Escribimos la aproximación lineal de la magnitud representada como

$$b(A) \equiv \frac{B(A)}{A} \simeq b_0 - kA.$$

Unos valores representativos leídos en la gráfica son

$$b(100) \simeq 8.85 \text{ MeV}, \quad b(200) \simeq 8.05 \text{ MeV}.$$

Por tanto,

$$k \simeq 8.0 \times 10^{-3} \text{ MeV}, \quad b_0 \simeq 9.65 \text{ MeV},$$

donde  $A$  es adimensional. La energía de enlace total es, por tanto,

$$B(A) \simeq b_0 A - kA^2.$$

Utilizando la variación finita de cuatro nucleones,

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= B_4 + b_0(A - 4) - k(A - 4)^2 - b_0 A + kA^2 \\ &= B_4 - 4b_0 + 8kA - 16k. \end{aligned}$$

En el umbral,  $Q_\alpha = 0$ , lo que da

$$A_\alpha = \frac{b_0 - B_4/4}{2k} + 2.$$

Numéricamente,

$$A_\alpha \simeq \frac{9.65 - 25.0/4}{0.016} + 2 = 214.5.$$

Dado que  $Q_\alpha$  aumenta con  $A$ , la emisión alfa es energéticamente posible por encima de este umbral. Teniendo en cuenta la precisión de la gráfica,

$$\boxed{A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2.}$$

**(b)(i)**

Para un  $A$  fijo, sustituimos  $N = A - Z$ , de modo que  $N - Z = A - 2Z$ . Omitiendo el apareamiento,

$$B(Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_a}{A} (A - 2Z)^2.$$

Tratando inicialmente  $Z$  como una variable continua, el máximo satisface

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_c Z A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} (A - 2Z) = 0.$$

Multiplicando por  $A$  y agrupando los términos en  $Z$ ,

$$(2a_c A^{2/3} + 8a_a)Z = 4a_a A.$$

De ahí,

$$\boxed{Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}.}$$

Este punto estacionario es un máximo porque

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_c A^{-1/3} - \frac{8a_a}{A} < 0.$$

Sin apareamiento, el máximo físico para valores enteros corresponde al entero más próximo a este valor.

**(b)(ii)**

Para  $A = 200$ , el máximo continuo sin apareamiento es

$$Z_0 = \frac{200}{2 + \frac{0.72}{47.0} 200^{2/3}} \simeq 79.242.$$

Como  $A$  es par, un  $Z$  par implica también un  $N$  par, mientras que un  $Z$  impar implica un  $N$  impar. La magnitud del término de apareamiento es

$$P = a_p A^{-3/4} = 33.5(200)^{-3/4} \simeq 0.6299 \text{ MeV}.$$

Dado que la fórmula contiene  $-\delta$ , el apareamiento **suma**  $P$  a la energía de enlace para  $Z$  par y **resta**  $P$  para  $Z$  impar.

La energía de enlace sin apareamiento puede escribirse como

$$B_0(Z) = B_0(Z_0) - \left( a_c A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} \right) (Z - Z_0)^2.$$

Por tanto, dentro de cada clase de paridad, el mejor entero es el más próximo a  $Z_0$ . La mejor elección impar es 79, y la mejor elección par es 80. La sustitución directa, incluido el apareamiento, da:

| $Z$ | $N$ | $\delta$ (MeV) | $B$ (MeV) |
|-----|-----|----------------|-----------|
| 78  | 122 | -0.630         | 1609.55   |
| 79  | 121 | +0.630         | 1609.17   |
| 80  | 120 | -0.630         | 1610.12   |

En particular,

$$B(80) - B(79) \simeq 0.954 \text{ MeV} > 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{Z = 80, \quad N = 120,}$$

con

$$\frac{B}{A} = \frac{1610.12}{200} \simeq 8.05 \text{ MeV}.$$

**(b)(iii)**

En primer lugar, el resultado del apartado (i) da

$$Z_{\max} = \frac{128}{2 + \frac{0.72}{47.0} 128^{2/3}} \simeq 53.577.$$

Por tanto, el entero más próximo es 54, que también se ve favorecido por el apareamiento.

Para estos núcleos,

$$P = 33.5(128)^{-3/4} \simeq 0.880313 \text{ MeV}.$$

El yodo y el cesio tienen  $N$  impar y  $Z$  impar, por lo que  $\delta = +P$ . El xenón tiene  $N$  par y  $Z$  par, por lo que  $\delta = -P$ .

El análisis energético de las desintegraciones requiere las masas nucleares, además de las energías de enlace. Escribiendo  $E_Z = M_Z c^2$ ,

$$E_Z = 128m_n c^2 + Z(m_p - m_n)c^2 - B_Z = 128m_n c^2 - (1.30 \text{ MeV})Z - B_Z.$$

La sustitución da los siguientes valores. Se conservan cifras adicionales para resolver la pequeña energía de la desintegración beta doble.

| Núcleo                 | $B_Z$ (MeV) | $E_Z - E_{54}$ (MeV) |
|------------------------|-------------|----------------------|
| $^{128}_{53}\text{I}$  | 1104.656    | 3.195830             |
| $^{128}_{54}\text{Xe}$ | 1106.552    | 0                    |
| $^{128}_{55}\text{Cs}$ | 1103.172    | 2.079906             |

Despreciando las energías de enlace de los electrones atómicos y las masas en reposo de los neutrinos, la conservación de la energía da

$$\begin{aligned}Q_{\beta^-}(Z) &= E_Z - E_{Z+1} - m_e c^2, \\Q_{\beta^+}(Z) &= E_Z - E_{Z-1} - m_e c^2, \\Q_{\text{EC}}(Z) &= E_Z + m_e c^2 - E_{Z-1}, \\Q_{\beta^-\beta^-}(Z) &= E_Z - E_{Z+2} - 2m_e c^2.\end{aligned}$$

La energía en reposo del electrón se resta en la emisión y se suma en la captura. Un proceso está energéticamente permitido cuando  $Q > 0$ .

Todas las transiciones posibles dentro del conjunto especificado son:

| Núcleo inicial    | Proceso             | Núcleo hijo       | $Q$ (MeV) | ¿Permitido? |
|-------------------|---------------------|-------------------|-----------|-------------|
| $^{128}\text{I}$  | $\beta^-$           | $^{128}\text{Xe}$ | +2.686    | ✓           |
| $^{128}\text{Xe}$ | $\beta^-$           | $^{128}\text{Cs}$ | -2.590    | 0           |
| $^{128}\text{Xe}$ | $\beta^+$           | $^{128}\text{I}$  | -3.706    | 0           |
| $^{128}\text{Cs}$ | $\beta^+$           | $^{128}\text{Xe}$ | +1.570    | ✓           |
| $^{128}\text{Xe}$ | Captura electrónica | $^{128}\text{I}$  | -2.686    | 0           |
| $^{128}\text{Cs}$ | Captura electrónica | $^{128}\text{Xe}$ | +2.590    | ✓           |
| $^{128}\text{I}$  | $\beta^-\beta^-$    | $^{128}\text{Cs}$ | +0.096    | ✓           |

En concreto, para la pequeña energía de la desintegración beta doble,

$$\begin{aligned}Q_{\beta^-\beta^-} &= E_{53} - E_{55} - 2m_e c^2 \\&= 3.195830 - 2.079906 - 1.020 \\&\simeq 0.0959 \text{ MeV} > 0.\end{aligned}$$

Por tanto, la desintegración beta doble simultánea del yodo en cesio está energéticamente permitida, aunque el segundo paso de la vía secuencial a través del xenón está prohibido.

El xenón no tiene ninguna transición energéticamente permitida dentro del conjunto especificado. El yodo puede experimentar una desintegración beta menos o beta menos doble; el cesio puede experimentar emisión de positrones o captura electrónica.

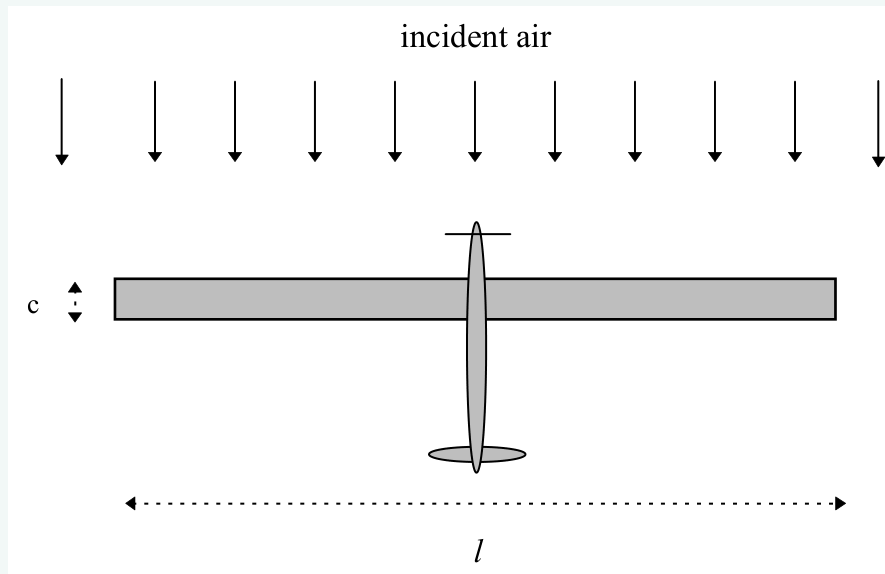
La solución se comprobó con la solución oficial.

### Problema 3: Avión propulsado por energía solar

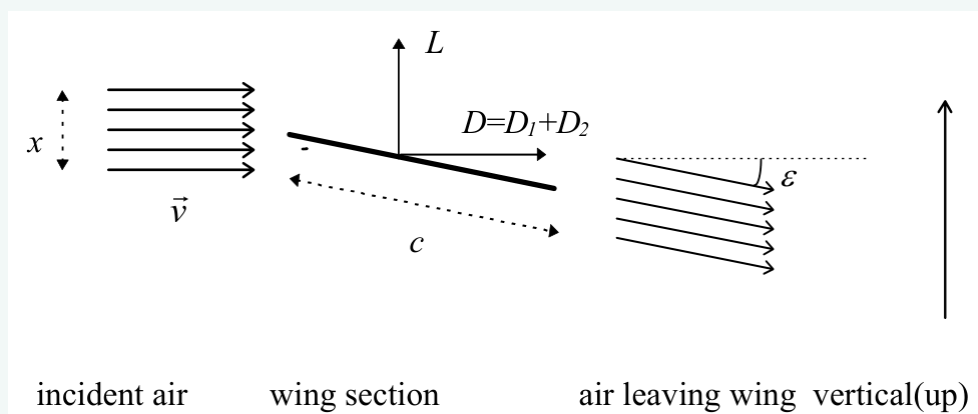
Deseamos diseñar un avión que se mantenga en vuelo utilizando únicamente energía solar. La configuración más eficiente es aquella en la que la superficie superior del ala está completamente cubierta de células solares. Estas células suministran la energía eléctrica con la que el motor acciona la hélice.

Consideremos un ala de planta rectangular con envergadura  $l$  y cuerda (anchura)  $c$ ; la superficie alar es  $S = cl$ , y el alargamiento del ala es  $A = l/c$ . Podemos obtener una idea aproximada del comportamiento del ala considerando una capa de aire de altura  $x$  y longitud  $l$  que se desvía hacia abajo un ángulo pequeño  $\varepsilon$ , con una variación muy pequeña de su rapidez. Las superficies

de control permiten seleccionar un valor óptimo de  $\varepsilon$  para el vuelo. Este modelo sencillo se ajusta bien a la realidad si  $x = \pi l/4$ , y podemos suponer que así ocurre. La masa total del avión es  $M$  y este vuela horizontalmente con velocidad  $\vec{v}$  respecto al aire circundante. En los cálculos siguientes, considere únicamente el flujo de aire alrededor del ala.



Vista superior del avión (en su propio sistema de referencia):



Vista lateral del ala (en un sistema de referencia que se mueve con el avión):

Ignore la modificación del flujo de aire debida a la hélice.

(a) Considere la variación de la cantidad de movimiento del aire que pasa junto al ala, *sin* que cambie su rapidez durante el proceso. Deduzca expresiones para la fuerza de sustentación vertical  $L$  y la fuerza de resistencia horizontal  $D_1$  que actúan sobre el ala, en función de las dimensiones del ala,  $v$ ,  $\varepsilon$  y la densidad del aire  $\rho$ . Suponga que la dirección del flujo de aire es siempre paralela al plano del diagrama de la vista lateral.

(3 puntos)

(b) Existe una fuerza de resistencia horizontal adicional  $D_2$ , causada por el rozamiento del aire que fluye sobre la superficie del ala. El aire se frena ligeramente, con una variación de rapidez  $\Delta v$  ( $\ll 1\%$  de  $v$ ) dada por:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A}$$

El valor de  $f$  es independiente de  $\varepsilon$ .

Obtenga una expresión (en función de  $M, f, A, S, \rho$  y  $g$ , la aceleración de la gravedad) para la rapidez de vuelo  $v_0$  que corresponde a la potencia mínima necesaria para mantener este avión en vuelo a altitud y velocidad constantes. Desprecie los términos de orden  $(\varepsilon^2 f)$  o superior.

(3 puntos)

Puede resultar útil la siguiente aproximación para ángulos pequeños:

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\sin^2 \varepsilon}{2}$$

(c) En la hoja de respuestas, esboce una gráfica de la potencia  $P$  en función de la rapidez de vuelo  $v$ . Muestre por separado las contribuciones a la potencia necesaria debidas a las dos fuentes de resistencia. Obtenga una expresión (en función de  $M, f, A, S, \rho$  y  $g$ ) para la potencia mínima,  $P_{\min}$ .

(2 puntos)

(d) Si las células solares pueden suministrar suficiente energía para que los motores eléctricos y las hélices generen una potencia mecánica de  $I = 10$  vatios por metro cuadrado de superficie alar, calcule la carga alar máxima  $Mg/S$  ( $\text{N/m}^2$ ) para esta potencia y la rapidez de vuelo  $v_0$  ( $\text{m/s}$ ). Suponga que  $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$ ,  $f = 0.004$ ,  $A = 10$ .

(2 puntos)

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

## Respuestas

• (a)

$$L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon, \quad D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

• (b)

$$v_0 = \left[ \frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2} \right]^{1/4}.$$

• (c)

$$P(v) = \underbrace{\frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S v}}_{P_1} + \underbrace{\frac{\pi}{4} \rho f S v^3}_{P_2},$$

$$P_{\min} = \left( \frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

La contribución de potencia debida a la resistencia inducida  $P_1$  disminuye como  $1/v$ , mientras que la contribución del rozamiento  $P_2$  aumenta como  $v^3$ . Su suma tiene un único mínimo, en  $v_0$ , donde  $P_1 = 3P_2$ .

• (d)

$$\left( \frac{Mg}{S} \right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2, \quad v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}.$$

## Solución

(a)

Trabajamos en el sistema de referencia del avión. En un tiempo  $dt$ , el volumen de aire que atraviesa la sección transversal afectada  $xl$  es  $xl v dt$ . Por tanto, el caudal másico es

$$\dot{m} = \rho xlv.$$

Inicialmente, el aire tiene una rapidez horizontal  $v$ . Tras la desviación, su velocidad horizontal es  $v \cos \varepsilon$  y su velocidad hacia abajo es  $v \sin \varepsilon$ .

Por el principio de la cantidad de movimiento y la tercera ley de Newton, la fuerza hacia arriba sobre el ala es igual a la tasa a la que el aire adquiere cantidad de movimiento hacia abajo:

$$L = \dot{m} v \sin \varepsilon = \rho xlv^2 \sin \varepsilon.$$

Análogamente, el aire pierde cantidad de movimiento horizontal, lo que produce una fuerza de resistencia sobre el ala:

$$D_1 = \dot{m} v (1 - \cos \varepsilon) = \rho xlv^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

Utilizando  $x = \pi l/4$ ,

$$L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon, \quad D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

Para  $\varepsilon$  pequeño, estas expresiones se convierten en

$$L \simeq \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \varepsilon, \quad D_1 \simeq \frac{\pi}{8} \rho l^2 v^2 \varepsilon^2.$$

(b)

Como  $AS = l^2$ , definimos

$$K = \rho xl = \frac{\pi}{4} \rho AS, \quad \dot{m} = Kv.$$

La pérdida adicional de cantidad de movimiento horizontal causada por la reducción de la rapidez da

$$D_2 = \dot{m} \Delta v \cos \varepsilon.$$

Utilizando  $\Delta v/v = f/A$  y despreciando la corrección de orden  $\varepsilon^2 f$ ,

$$D_2 \simeq Kv^2 \frac{f}{A} = \left[ \frac{\pi}{4} \rho f S v^2 \right].$$

La disminución de la rapidez también reduce la sustentación en una fracción  $f/A$ . Sin embargo, su efecto sobre la resistencia inducida, que es proporcional a  $\sin^2 \varepsilon$ , es de orden  $\varepsilon^2 f$ . Por tanto, con la precisión requerida, podemos imponer el equilibrio vertical utilizando la expresión de la sustentación de (a):

$$Mg = Kv^2 \sin \varepsilon, \quad \sin \varepsilon = \frac{Mg}{Kv^2}.$$

La aproximación para ángulos pequeños proporcionada da entonces

$$D_1 \simeq \frac{Kv^2}{2} \sin^2 \varepsilon = \frac{(Mg)^2}{2Kv^2} = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S v^2}.$$

En vuelo horizontal uniforme, el empuje de la hélice equilibra la resistencia total. Por tanto, la potencia mecánica necesaria es

$$P = (D_1 + D_2)v = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S v} + \frac{\pi}{4} \rho f S v^3.$$

Escribimos esta expresión como

$$P = \frac{\alpha}{v} + \beta v^3, \quad \alpha = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S}, \quad \beta = \frac{\pi}{4} \rho f S.$$

Derivando respecto a la rapidez de vuelo,

$$\frac{dP}{dv} = -\frac{\alpha}{v^2} + 3\beta v^2.$$

Por consiguiente, la rapidez óptima satisface

$$v_0^4 = \frac{\alpha}{3\beta} = \frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2},$$

de modo que

$$v_0 = \left[ \frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2} \right]^{1/4}.$$

Este es el único mínimo para  $v > 0$ , ya que

$$\frac{d^2P}{dv^2} = \frac{2\alpha}{v^3} + 6\beta v > 0.$$

**(c)**

En el mínimo, la condición  $\alpha = 3\beta v_0^4$  implica

$$P_1(v_0) = \frac{\alpha}{v_0} = 3\beta v_0^3 = 3P_2(v_0).$$

Así,

$$P_{\min} = 4\beta v_0^3 = \pi \rho f S v_0^3.$$

Sustituyendo la expresión de  $v_0$ ,

$$P_{\min} = \left( \frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

La gráfica solicitada presenta las siguientes características:

- $P_1 = \alpha/v$  es una hipérbola decreciente. Formalmente, diverge cuando  $v \rightarrow 0^+$  y tiende a cero cuando  $v \rightarrow \infty$ .
- $P_2 = \beta v^3$  parte del origen con tangente horizontal y aumenta monótonamente.
- Su suma se sitúa por encima de ambas curvas, disminuye hasta su único mínimo  $(v_0, P_{\min})$  y después aumenta. Diverge en ambos extremos del intervalo de rapidezces positivas y no corta

ningún eje.

- Las dos contribuciones se cruzan en  $v = 3^{1/4}v_0 \approx 1.316v_0$ , a la derecha del mínimo de la potencia total.

Se obtiene una descripción adimensional precisa definiendo  $u = v/v_0$ :

$$\frac{P_1}{P_{\min}} = \frac{3}{4u}, \quad \frac{P_2}{P_{\min}} = \frac{u^3}{4}, \quad \frac{P}{P_{\min}} = \frac{3}{4u} + \frac{u^3}{4}.$$

Algunos puntos útiles para el esbozo son:

| $v/v_0$ | $P_1/P_{\min}$ | $P_2/P_{\min}$ | $P/P_{\min}$ |
|---------|----------------|----------------|--------------|
| 0.500   | 1.500          | 0.031          | 1.531        |
| 1.000   | 0.750          | 0.250          | 1.000        |
| 1.316   | 0.570          | 0.570          | 1.140        |
| 2.000   | 0.375          | 2.000          | 2.375        |

El límite  $v \rightarrow 0^+$  es una extrapolación formal de estas ecuaciones: unas rapidezces suficientemente bajas requerirían un ángulo de desviación fuera del ámbito de validez de la aproximación para ángulos pequeños.

**(d)**

Sea la carga alar

$$w = \frac{Mg}{S}.$$

La potencia mecánica disponible es  $IS$ . La carga máxima se alcanza cuando esta es exactamente igual a la potencia mínima necesaria:

$$IS = P_{\min} = \pi \rho f S v_0^3.$$

En consecuencia,

$$v_0 = \left( \frac{I}{\pi \rho f} \right)^{1/3}.$$

Numéricamente,

$$v_0 = \left( \frac{10}{\pi(1.25)(0.004)} \right)^{1/3} = 8.6025 \dots \text{ m/s},$$

lo que da

$$\boxed{v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}}.$$

Reordenando la relación para la rapidez óptima de (b),

$$v_0^4 = \frac{8w^2}{3\pi^2 \rho^2 f A},$$

obtenemos

$$w_{\max} = \pi \rho v_0^2 \sqrt{\frac{3fA}{8}} = \pi \rho \sqrt{\frac{3fA}{8}} \left( \frac{I}{\pi \rho f} \right)^{2/3}.$$

La sustitución da

$$w_{\max} = \pi(1.25)(8.6025\dots)^2 \sqrt{\frac{3(0.004)(10)}{8}} = 35.5925\dots \text{ N/m}^2.$$

Por tanto,

$$\boxed{\left(\frac{Mg}{S}\right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2}.$$

Este es el máximo porque  $P_{\min}/S$  aumenta como  $w^{3/2}$ ; una carga mayor requeriría más de los  $10 \text{ W/m}^2$  disponibles a cualquier rapidez.

Como comprobación de consistencia, en este punto de funcionamiento,

$$\sin \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{6f}{A}}, \quad \varepsilon_0 \simeq 0.049 \text{ rad} \simeq 2.8^\circ,$$

y

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A} = 0.0004 = 0.04\%.$$

Ambas aproximaciones son consistentes con los datos proporcionados.

---

La solución se comprobó con la solución oficial.