

IPhO 1997

Theorieaufgaben und Lösungen · Sudbury, Kanada · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1997/

Aufgabe 1: Skalierung

- (a) Eine kleine Masse hängt am Ende einer masselosen idealen Feder und schwingt mit ihrer Eigenfrequenz f auf und ab. Wenn die Feder halbiert und die Masse wieder am Ende befestigt wird, wie groß ist dann die neue Frequenz f' ? (1.5 Punkte)
- (b) Der Radius eines Wasserstoffatoms im Grundzustand beträgt $a_0 = 0.0529 \text{ nm}$ (der „Bohrsche Radius“). Wie groß ist der Radius a' eines „myonischen Wasserstoffatoms“, in dem das Elektron durch ein gleich geladenes Myon ersetzt ist, dessen Masse das 207-Fache der Elektronenmasse beträgt? Nehmen Sie an, dass die Protonenmasse viel größer als die Masse des Myons und des Elektrons ist. (2 Punkte)
- (c) Die mittlere Temperatur der Erde beträgt $T = 287 \text{ K}$. Wie groß wäre die neue mittlere Temperatur T' , wenn der mittlere Abstand zwischen Erde und Sonne um 1% verringert würde? (2 Punkte)
- (d) An einem bestimmten Tag ist die Luft trocken und hat eine Dichte von $\rho = 1.2500 \text{ kg/m}^3$. Am nächsten Tag ist die Luftfeuchtigkeit gestiegen, und der Massenanteil des Wasserdampfs in der Luft beträgt 2%. Druck und Temperatur sind dieselben wie am Vortag. Wie groß ist nun die Luftdichte ρ' ? (2 Punkte)
- Mittlere molare Masse trockener Luft: 28.8 (g/mol)
 Molare Masse von Wasser: 18 (g/mol)
- Nehmen Sie ideales Gasverhalten an.
- (e) Ein Hubschraubertyp kann schweben, wenn die mechanische Ausgangsleistung seines Motors P beträgt. Wenn ein weiterer Hubschrauber gebaut wird, der eine exakte Nachbildung des ersten im Maßstab $\frac{1}{2}$ (in allen linearen Abmessungen) ist, welche mechanische Leistung P' benötigt er zum Schweben? (2.5 Punkte)

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- (a) $f' = \sqrt{2} f$.
- (b) $a' = \frac{a_0}{207} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}$.
- (c) $T' = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K}$, ein Anstieg um ungefähr 1.4 K.

- (d) $\rho' = \frac{1.2500}{1.012} \text{ kg/m}^3 \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3$.
- (e) $P' = 2^{-7/2} P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884 P$.

Lösung

(a)

Die ursprüngliche Federkonstante sei k und die angehängte Masse m . Ihre Eigenfrequenz beträgt

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Bei einer gleichmäßigen Feder sind die beiden Hälften identische, in Reihe geschaltete Federn. Wenn jede Hälfte die Federkonstante k_h hat, gilt

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_h},$$

also $k_h = 2k$. Gleichbedeutend damit ist, dass sich jede Hälfte bei gleicher Zugkraft halb so weit dehnt wie die gesamte Feder.

Die Masse bleibt unverändert, sodass sich ergibt:

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2} f.$$

Die Schwerkraft verändert die Dehnung in der Gleichgewichtslage, beeinflusst aber nicht die Frequenz einer idealen Feder.

(b)

Unter der angegebenen Näherung kann das Proton als ortsfest betrachtet werden, sodass die Masse m des umlaufenden Teilchens die atomare Längenskala bestimmt.

Im Bohrschen Modell liefert die Coulomb-Anziehung die Zentripetalkraft, und der Drehimpuls im Grundzustand beträgt $\hbar$:

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad mva = \hbar.$$

Durch Eliminieren von v erhält man

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}.$$

Bei unveränderter Ladung ist der Radius somit umgekehrt proportional zur Masse des Teilchens. Da $m_\mu = 207m_e$, gilt

$$\frac{a'}{a_0} = \frac{m_e}{m_\mu} = \frac{1}{207}.$$

Daher ergibt sich

$$a' = \frac{0.0529}{207} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}.$$

(c)

Es werden Strahlungsgleichgewicht, eine konstante Sonnenleuchtkraft sowie eine unveränderte Albedo und unveränderte effektive Wärmestrahlungseigenschaften der Erde angenommen.

Beim Abstand r zwischen Erde und Sonne ist die einfallende solare Strahlungsflussdichte proportional zu r^{-2} . Die absorbierte Leistung beträgt daher

$$P_{\text{abs}} = (1 - \alpha) \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \pi R_{\oplus}^2,$$

wobei α die Albedo ist. Nach dem Stefan–Boltzmann-Gesetz lässt sich die abgestrahlte Leistung darstellen als

$$P_{\text{emit}} = 4\pi R_{\oplus}^2 \varepsilon_{\text{eff}} \sigma T^4,$$

mit einem konstanten effektiven Faktor ε_{eff} .

Durch Gleichsetzen der absorbierten und der abgestrahlten Leistung erhält man

$$T^4 \propto r^{-2}, \quad T \propto r^{-1/2}.$$

Der neue Abstand beträgt $r' = 0.99r$, also

$$T' = T \left(\frac{r}{r'} \right)^{1/2} = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K}.$$

Zur Überprüfung in erster Ordnung gilt

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = 0.005,$$

woraus $\Delta T \approx 1.435 \text{ K}$ folgt, nahe am ungerundeten Ergebnis 1.446 K .

(d)

Es seien $M_d = 28.8 \text{ g/mol}$ und $M_w = 18 \text{ g/mol}$ die molaren Massen von trockener Luft und Wasser. Der **Massenanteil** des Wassers beträgt $w = 0.02$.

Eine Masse m feuchter Luft enthält die Masse $(1 - w)m$ an trockener Luft und die Masse $w m$ an Wasserdampf. Bei Verwendung einheitlicher Masseneinheiten beträgt ihre gesamte Stoffmenge

$$n = \frac{(1 - w)m}{M_d} + \frac{w m}{M_w}.$$

Da $m/V = \rho'$, liefert das ideale Gasgesetz

$$\frac{p}{RT} = \frac{n}{V} = \rho' \left(\frac{1 - w}{M_d} + \frac{w}{M_w} \right).$$

Für die ursprüngliche trockene Luft bei gleichem Druck und gleicher Temperatur gilt

$$\frac{p}{RT} = \frac{\rho}{M_d}.$$

Durch Gleichsetzen dieser Ausdrücke und Umstellen erhält man

$$\rho' = \frac{\rho}{(1 - w) + w M_d / M_w}.$$

Somit ergibt sich

$$\rho' = \frac{1.2500}{0.98 + 0.02(28.8/18)} = \frac{1.2500}{1.012} \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3.$$

Die Dichte nimmt ab, weil Wassermoleküle leichter sind als das durchschnittliche Molekül trockener Luft, während die Gesamtzahldichte der Moleküle bei festem Druck und fester Temperatur konstant bleibt.

(e)

Es wird angenommen, dass die Nachbildung aus Materialien mit denselben Dichten besteht und in Luft derselben Dichte schwebt. Verwendet wird die Skalierung nach der idealen Impulsstromtheorie bei unverändertem aerodynamischem Wirkungsgrad; Änderungen viskoser Effekte und mechanischer Verluste werden vernachlässigt.

Der lineare Skalierungsfaktor sei λ . Die Masse m des Hubschraubers skaliert mit dem Volumen, während die vom Rotor überstrichene Fläche A mit der Fläche skaliert:

$$m' = \lambda^3 m, \quad A' = \lambda^2 A.$$

Es sei v die charakteristische, vom Rotor erzeugte abwärtsgerichtete Luftgeschwindigkeit. Bei geometrisch ähnlicher Strömung skaliert die pro Zeiteinheit beschleunigte Luftmasse gemäß

$$\dot{m}_{\text{air}} \propto \rho_{\text{air}} A v.$$

Nach der Impulserhaltung skaliert der aufwärtsgerichtete Schub gemäß

$$F \propto \dot{m}_{\text{air}} v \propto \rho_{\text{air}} A v^2.$$

Zum Schweben ist $F = mg$ erforderlich, also

$$v \propto \sqrt{\frac{mg}{\rho_{\text{air}} A}}.$$

Folglich gilt

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{\lambda^3}{\lambda^2}} = \lambda^{1/2}.$$

Die erforderliche Leistung ist proportional zur Rate, mit der der Luft kinetische Energie zugeführt wird:

$$P \propto \dot{m}_{\text{air}} v^2 \propto \rho_{\text{air}} A v^3.$$

Somit gilt

$$\frac{P'}{P} = \lambda^2 (\lambda^{1/2})^3 = \lambda^{7/2}.$$

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ ergibt sich

$$P' = \left(\frac{1}{2}\right)^{7/2} P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884P.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Kernmassen und Stabilität

Alle Energien in dieser Aufgabe werden in MeV angegeben – Millionen Elektronenvolt.

Ein MeV = 1.6×10^{-13} J; diese Umrechnung muss jedoch zur Lösung der Aufgabe nicht bekannt sein.

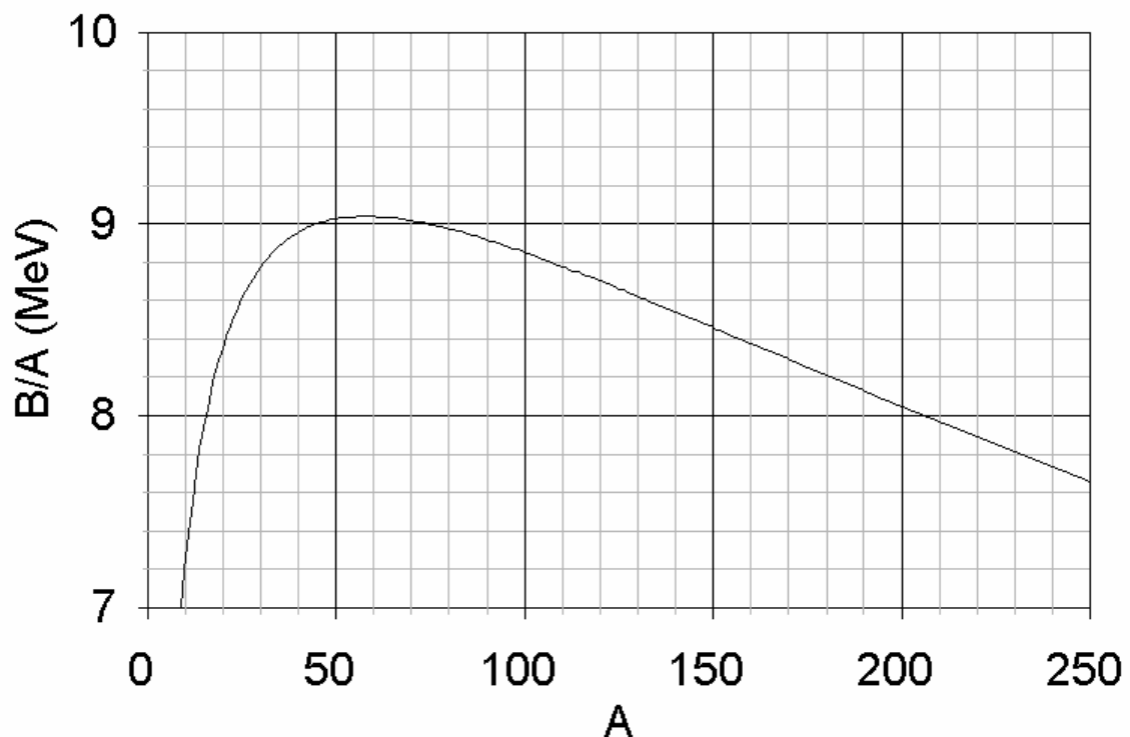
Die Masse M eines Atomkerns mit Z Protonen und N Neutronen (also der Massenzahl $A = N + Z$) ist die Summe der Massen seiner freien Nukleonen (Protonen und Neutronen) abzüglich der Bindungsenergie B/c^2 .

$$Mc^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

Das folgende Diagramm zeigt den Maximalwert von B/A für einen gegebenen Wert von A in Abhängigkeit von A .

Je größer der Wert von B/A , desto stabiler ist im Allgemeinen der Kern.

Binding Energy per Nucleon



(a) Oberhalb einer bestimmten Massenzahl A_α sind die Bindungsenergien der Kerne stets klein genug, um die Emission von Alphateilchen ($A = 4$) zu ermöglichen. Verwenden Sie eine lineare Näherung dieser Kurve oberhalb von $A = 100$, um A_α abzuschätzen. (3 Punkte)

Nehmen Sie für dieses Modell Folgendes an:

- Sowohl der Ausgangs- als auch der Endkern liegen auf dieser Kurve.
- Die gesamte Bindungsenergie des Alphateilchens beträgt $B_4 = 25.0$ MeV (dies lässt sich nicht aus dem Diagramm ablesen!).

(b) Die Bindungsenergie eines Atomkerns mit Z Protonen und N Neutronen ($A = N + Z$) wird durch eine semiempirische Formel beschrieben:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} - \delta$$

Der Wert von δ ist gegeben durch:

$+a_p A^{-3/4}$ für Kerne mit ungeradem N und ungeradem Z

0 für Kerne mit geradem N und ungeradem Z oder ungeradem N und geradem Z

$-a_p A^{-3/4}$ für Kerne mit geradem N und geradem Z

Die Koeffizienten haben die Werte:

$$a_v = 15.8 \text{ MeV}; \quad a_s = 16.8 \text{ MeV}; \quad a_c = 0.72 \text{ MeV}; \quad a_a = 23.5 \text{ MeV}; \quad a_p = 33.5 \text{ MeV}.$$

(i) Leiten Sie einen Ausdruck für die Protonenzahl $Z_{\max}$ des Kerns mit der größten Bindungsenergie bei gegebener Massenzahl A her. Vernachlässigen Sie den δ -Term nur in dieser Teilaufgabe. (2 Punkte)

(ii) Welchen Wert hat Z für den Kern mit $A = 200$, der das größte B/A besitzt? Berücksichtigen Sie den Einfluss des δ -Terms. (2 Punkte)

(iii) Betrachten Sie die drei Kerne mit $A = 128$, die in der Tabelle auf dem Antwortblatt aufgeführt sind. Bestimmen Sie, welche davon energetisch stabil sind und welche genügend Energie besitzen, um durch die unten aufgeführten Prozesse zu zerfallen. Bestimmen Sie $Z_{\max}$ gemäß der Definition in Teil (i) und füllen Sie die Tabelle auf Ihrem Antwortblatt aus.

Beachten Sie beim Ausfüllen der Tabelle bitte Folgendes:

- Kennzeichnen Sie energetisch erlaubte Prozesse mit: $\checkmark$
- Kennzeichnen Sie energetisch NICHT erlaubte Prozesse mit: 0
- Berücksichtigen Sie ausschließlich Übergänge zwischen diesen drei Kernen.

Zerfallsprozesse:

(1) β^- -Zerfall; Emission eines Elektrons aus dem Kern

(2) β^+ -Zerfall; Emission eines Positrons aus dem Kern

(3) $\beta^-\beta^-$ -Zerfall; gleichzeitige Emission zweier Elektronen aus dem Kern

(4) Elektroneneinfang; Einfang eines *Hüllenelektrons* durch den Kern.

Die Ruheenergie eines Elektrons (und eines Positrons) beträgt $m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$; die eines Protons beträgt $m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}$; die eines Neutrons beträgt $m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}$.

(3 Punkte)

(b) (iii)

Kern/Prozess	β^- -Zerfall	β^+ -Zerfall	Elektroneneinfang	$\beta^-\beta^-$ -Zerfall
$^{128}_{53}\text{I}$				
$^{128}_{54}\text{Xe}$				
$^{128}_{55}\text{Cs}$				

Schreibweise: $^A_Z X$

X = chemisches Symbol

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- (a) $A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2$. Die unten verwendete Geradennäherung ergibt ungefähr 215.
- (b)(i) $Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}$. Dies ist das Maximum bei kontinuierlicher Betrachtung; ohne Berücksichtigung der Paarung ist die nächstgelegene ganze Zahl zu wählen.
- (b)(ii) $Z = 80$, mit $N = 120$ und $B/A \approx 8.05$ MeV.
- (b)(iii) Das Ergebnis bei kontinuierlicher Betrachtung lautet $Z_{\max} \approx 53.58$; das ganzzahlige Bindungsenergiemaximum liegt bei $Z = 54$. Hinsichtlich der vorgegebenen Übergänge ist ^{128}Xe stabil, während ^{128}I und ^{128}Cs zerfallen können.

Kern/Prozess	β^- -Zerfall	β^+ -Zerfall	Elektroneneinfang	$\beta^-\beta^-$ -Zerfall
$^{128}_{53}\text{I}$	$\checkmark$	0	0	$\checkmark$
$^{128}_{54}\text{Xe}$	0	0	0	0
$^{128}_{55}\text{Cs}$	0	$\checkmark$	$\checkmark$	0

Einträge, deren Tochterkerne außerhalb dieser drei Kerne liegen, werden aufgrund der vorgegebenen Einschränkung mit 0 gekennzeichnet.

Lösung

(a)

Beim Alphazerfall bleiben die Gesamtzahlen der Protonen und Neutronen erhalten. Daher heben sich bei der Berechnung der frei werdenden Energie die Ruheenergien der freien Nukleonen auf:

$$Q_\alpha = [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M(4, 2)]c^2 = B(A - 4) + B_4 - B(A).$$

Der Zerfall ist energetisch erlaubt, wenn $Q_\alpha > 0$.

Wir schreiben die Geradennäherung für die aufgetragene Größe als

$$b(A) \equiv \frac{B(A)}{A} \simeq b_0 - kA.$$

Repräsentative, aus dem Diagramm abgelesene Werte sind

$$b(100) \simeq 8.85 \text{ MeV}, \quad b(200) \simeq 8.05 \text{ MeV}.$$

Somit gilt

$$k \simeq 8.0 \times 10^{-3} \text{ MeV}, \quad b_0 \simeq 9.65 \text{ MeV},$$

wobei A dimensionslos ist. Die gesamte Bindungsenergie beträgt daher

$$B(A) \simeq b_0 A - kA^2.$$

Für die endliche Änderung um vier Nukleonen ergibt sich

$$Q_\alpha = B_4 + b_0(A - 4) - k(A - 4)^2 - b_0A + kA^2 \\ = B_4 - 4b_0 + 8kA - 16k.$$

An der Schwelle gilt $Q_\alpha = 0$, woraus folgt:

$$A_\alpha = \frac{b_0 - B_4/4}{2k} + 2.$$

Numerisch ergibt sich

$$A_\alpha \simeq \frac{9.65 - 25.0/4}{0.016} + 2 = 214.5.$$

Da Q_α mit A zunimmt, ist die Alphaemission oberhalb dieser Schwelle energetisch möglich. Unter Berücksichtigung der Ablesegenauigkeit des Diagramms gilt

$$A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2.$$

(b)(i)

Bei festem A setzen wir $N = A - Z$ ein, sodass $N - Z = A - 2Z$ gilt. Ohne Berücksichtigung der Paarung ergibt sich

$$B(Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_a}{A} (A - 2Z)^2.$$

Behandeln wir Z zunächst als kontinuierliche Variable, so erfüllt das Maximum die Bedingung

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_c Z A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} (A - 2Z) = 0.$$

Multiplikation mit A und Zusammenfassen der Terme mit Z ergibt

$$(2a_c A^{2/3} + 8a_a)Z = 4a_a A.$$

Daraus folgt

$$Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}.$$

Diese stationäre Stelle ist ein Maximum, denn

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_c A^{-1/3} - \frac{8a_a}{A} < 0.$$

Ohne Paarung liegt das physikalische ganzzahlige Maximum bei der diesem Wert nächstgelegenen ganzen Zahl.

(b)(ii)

Für $A = 200$ liegt das Maximum bei kontinuierlicher Betrachtung ohne Paarung bei

$$Z_0 = \frac{200}{2 + \frac{0.72}{47.0} 200^{2/3}} \simeq 79.242.$$

Da A gerade ist, bedeutet ein gerades Z auch ein gerades N , während ein ungerades Z ein ungerades N bedeutet. Der Betrag des Paarungsterms ist

$$P = a_p A^{-3/4} = 33.5(200)^{-3/4} \simeq 0.6299 \text{ MeV}.$$

Da die Formel $-\delta$ enthält, wird durch die Paarung bei geradem Z zur Bindungsenergie P **addiert** und bei ungeradem Z von ihr P **subtrahiert**.

Die Bindungsenergie ohne Paarung lässt sich schreiben als

$$B_0(Z) = B_0(Z_0) - \left(a_c A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} \right) (Z - Z_0)^2.$$

Daher ist innerhalb jeder der beiden Paritätsklassen diejenige ganze Zahl optimal, die Z_0 am nächsten liegt. Die optimale ungerade Wahl ist 79, die optimale gerade Wahl ist 80. Direktes Einsetzen unter Berücksichtigung der Paarung ergibt:

Z	N	δ (MeV)	B (MeV)
78	122	-0.630	1609.55
79	121	+0.630	1609.17
80	120	-0.630	1610.12

Insbesondere gilt

$$B(80) - B(79) \simeq 0.954 \text{ MeV} > 0.$$

Somit ist

$$\boxed{Z = 80, \quad N = 120,}$$

mit

$$\frac{B}{A} = \frac{1610.12}{200} \simeq 8.05 \text{ MeV}.$$

(b)(iii)

Zunächst ergibt das Ergebnis aus Teil (i)

$$Z_{\max} = \frac{128}{2 + \frac{0.72}{47.0} 128^{2/3}} \simeq 53.577.$$

Die nächstgelegene ganze Zahl ist somit 54, die auch durch die Paarung begünstigt wird.

Für diese Kerne gilt

$$P = 33.5(128)^{-3/4} \simeq 0.880313 \text{ MeV}.$$

Iod und Caesium haben ein ungerades N und ein ungerades Z , also gilt $\delta = +P$. Xenon hat ein gerades N und ein gerades Z , also gilt $\delta = -P$.

Für die Energiebilanz der Zerfälle werden neben den Bindungsenergien auch die Kernmassen benötigt. Mit $E_Z = M_Z c^2$ gilt

$$E_Z = 128 m_n c^2 + Z(m_p - m_n) c^2 - B_Z = 128 m_n c^2 - (1.30 \text{ MeV}) Z - B_Z.$$

Einsetzen ergibt die folgenden Werte. Zusätzliche Stellen werden beibehalten, um die kleine Doppelbeta-Zerfallsenergie aufzulösen.

Kern	B_Z (MeV)	$E_Z - E_{54}$ (MeV)
$^{128}_{53}\text{I}$	1104.656	3.195830
$^{128}_{54}\text{Xe}$	1106.552	0
$^{128}_{55}\text{Cs}$	1103.172	2.079906

Unter Vernachlässigung der Bindungsenergien der Hüllenelektronen und der Neutrino Ruhmassen liefert die Energieerhaltung

$$\begin{aligned}Q_{\beta^-}(Z) &= E_Z - E_{Z+1} - m_e c^2, \\Q_{\beta^+}(Z) &= E_Z - E_{Z-1} - m_e c^2, \\Q_{\text{EC}}(Z) &= E_Z + m_e c^2 - E_{Z-1}, \\Q_{\beta^-\beta^-}(Z) &= E_Z - E_{Z+2} - 2m_e c^2.\end{aligned}$$

Die Ruheenergie des Elektrons wird bei der Emission subtrahiert und beim Einfang addiert. Ein Prozess ist energetisch erlaubt, wenn $Q > 0$.

Alle möglichen Übergänge innerhalb der vorgegebenen Menge sind:

Ausgangskern	Prozess	Tochterkern	Q (MeV)	Erlaubt?
^{128}I	β^-	^{128}Xe	+2.686	✓
^{128}Xe	β^-	^{128}Cs	-2.590	0
^{128}Xe	β^+	^{128}I	-3.706	0
^{128}Cs	β^+	^{128}Xe	+1.570	✓
^{128}Xe	Elektroneneinfang	^{128}I	-2.686	0
^{128}Cs	Elektroneneinfang	^{128}Xe	+2.590	✓
^{128}I	$\beta^-\beta^-$	^{128}Cs	+0.096	✓

Insbesondere gilt für die kleine Doppelbeta-Zerfallsenergie

$$\begin{aligned}Q_{\beta^-\beta^-} &= E_{53} - E_{55} - 2m_e c^2 \\&= 3.195830 - 2.079906 - 1.020 \\&\simeq 0.0959 \text{ MeV} > 0.\end{aligned}$$

Somit ist der gleichzeitige Doppelbetazerfall von Iod zu Caesium energetisch erlaubt, obwohl der zweite Schritt des aufeinanderfolgenden Zerfalls über Xenon verboten ist.

Xenon besitzt innerhalb der vorgegebenen Menge keinen energetisch erlaubten Übergang. Iod kann einen Beta-minus- oder einen Doppelbeta-minus-Zerfall durchlaufen; Caesium kann unter Positronenemission oder durch Elektroneneinfang zerfallen.

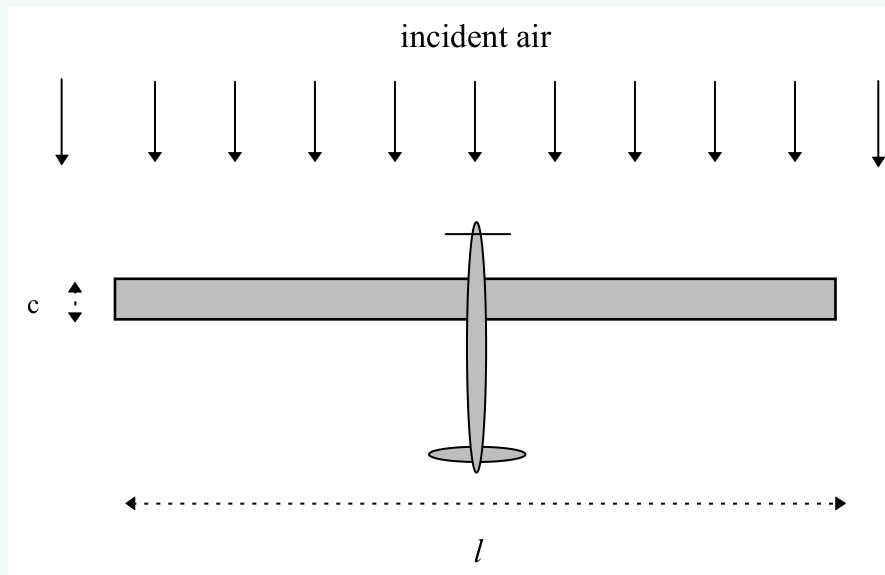
Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Solarbetriebenes Flugzeug

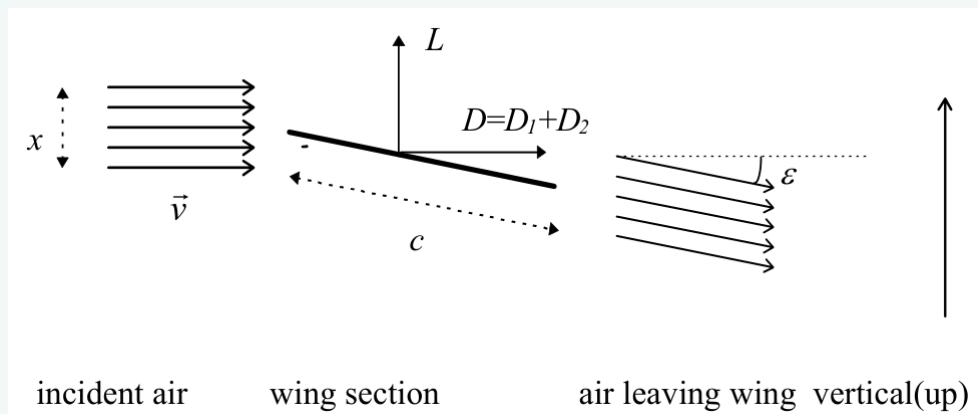
Wir möchten ein Flugzeug entwerfen, das allein mit Solarenergie in der Luft bleibt. Die effizienteste Bauform besitzt einen Tragflügel, dessen Oberseite vollständig mit Solarzellen bedeckt ist. Die Zellen liefern die elektrische Leistung, mit der der Motor den Propeller antreibt.

Betrachten Sie einen Tragflügel mit rechteckigem Grundriss, der Spannweite l und der Flügeltiefe (Breite) c ; die Flügelfläche beträgt $S = cl$, und die Flügelstreckung ist $A = l/c$. Eine ungefähre Vorstellung von den aerodynamischen Eigenschaften des Tragflügels erhalten wir, indem wir eine Luftschicht der Höhe x und der Länge l betrachten, die unter einem kleinen Winkel ε nach unten abgelenkt wird, wobei sich ihr Geschwindigkeitsbetrag nur sehr geringfügig ändert. Mithilfe von

Steuerflächen lässt sich ein für den Flug optimaler Wert von ε einstellen. Dieses einfache Modell stimmt gut mit der Wirklichkeit überein, wenn $x = \pi l/4$, und wir können annehmen, dass dies der Fall ist. Die Gesamtmasse des Flugzeugs beträgt M , und es fliegt horizontal mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zur umgebenden Luft. Berücksichtigen Sie bei den folgenden Berechnungen nur die Luftströmung um den Tragflügel.



Draufsicht auf das Flugzeug (in seinem eigenen Bezugssystem):



Seitenansicht des Tragflügels (in einem mit dem Flugzeug mitbewegten Bezugssystem):

Vernachlässigen Sie die Veränderung der Luftströmung durch den Propeller.

(a) Betrachten Sie die Impulsänderung der am Tragflügel vorbeiströmenden Luft, wobei sich ihr Geschwindigkeitsbetrag dabei *nicht* ändert. Leiten Sie Ausdrücke für die vertikale Auftriebskraft L und die horizontale Widerstandskraft D_1 am Tragflügel in Abhängigkeit von den Flügelabmessungen, v , ε und der Luftdichte ρ her. Nehmen Sie an, dass die Richtung der Luftströmung stets parallel zur Zeichenebene der Seitenansicht ist.

(3 Punkte)

(b) Durch die Reibung der über die Flügeloberfläche strömenden Luft entsteht eine zusätzliche horizontale Widerstandskraft D_2 . Die Luft wird geringfügig abgebremst, wobei die Änderung des Geschwindigkeitsbetrags Δv ($\ll 1\%$ von v) gegeben ist durch:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A}$$

Der Wert von f ist unabhängig von ε .

Bestimmen Sie einen Ausdruck (in Abhängigkeit von M, f, A, S, ρ und g , der Erdbeschleunigung) für die Fluggeschwindigkeit v_0 , bei der die zum Flug mit konstanter Höhe und Geschwindigkeit erforderliche Leistung minimal ist. Vernachlässigen Sie Terme der Ordnung ($\varepsilon^2 f$) oder höher.

(3 Punkte)

Die folgende Kleinwinkelnäherung kann hilfreich sein:

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\sin^2 \varepsilon}{2}$$

(c) Skizzieren Sie auf dem Antwortblatt ein Diagramm der Leistung P in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit v . Zeigen Sie die einzelnen Beiträge zur erforderlichen Leistung aufgrund der beiden Ursachen des Luftwiderstands. Bestimmen Sie einen Ausdruck (in Abhängigkeit von M, f, A, S, ρ und g) für die minimale Leistung $P_{\min}$.

(2 Punkte)

(d) Wenn die Solarzellen genügend Energie liefern können, sodass die Elektromotoren und Propeller eine mechanische Leistung von $I = 10$ Watt pro Quadratmeter Flügelfläche erzeugen, berechnen Sie für diese Leistung die maximale Flächenbelastung Mg/S (N/m²) und die Fluggeschwindigkeit v_0 (m/s). Nehmen Sie $\rho = 1.25$ kg/m³, $f = 0.004$, $A = 10$ an.

(2 Punkte)

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

• (a)

$$L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon, \quad D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

• (b)

$$v_0 = \left[\frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2} \right]^{1/4}.$$

• (c)

$$P(v) = \underbrace{\frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S v}}_{P_1} + \underbrace{\frac{\pi}{4} \rho f S v^3}_{P_2},$$

$$P_{\min} = \left(\frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

Der durch den induzierten Widerstand verursachte Leistungsanteil P_1 nimmt wie $1/v$ ab, während der Reibungsanteil P_2 wie v^3 zunimmt. Ihre Summe besitzt ein einziges Minimum bei v_0 , wo $P_1 = 3P_2$ gilt.

• (d)

$$\left(\frac{Mg}{S} \right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2, \quad v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}.$$

Lösung

(a)

Wir arbeiten im Bezugssystem des Flugzeugs. In einer Zeit dt beträgt das Luftvolumen, das den betroffenen Querschnitt xl durchströmt, $xl v dt$. Der Massenstrom ist somit

$$\dot{m} = \rho xlv.$$

Die Luft besitzt zunächst die horizontale Geschwindigkeit v . Nach der Ablenkung beträgt ihre horizontale Geschwindigkeitskomponente $v \cos \varepsilon$ und ihre nach unten gerichtete Geschwindigkeitskomponente $v \sin \varepsilon$.

Nach dem Impulssatz und dem dritten Newtonschen Gesetz ist die nach oben gerichtete Kraft auf den Tragflügel gleich der zeitlichen Zunahme des nach unten gerichteten Impulses der Luft:

$$L = \dot{m} v \sin \varepsilon = \rho xlv^2 \sin \varepsilon.$$

Ebenso verliert die Luft horizontalen Impuls, wodurch eine Widerstandskraft auf den Tragflügel entsteht:

$$D_1 = \dot{m} v (1 - \cos \varepsilon) = \rho xlv^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

Mit $x = \pi l/4$ folgt

$$L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon, \quad D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

Für kleine ε werden diese Ausdrücke zu

$$L \simeq \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \varepsilon, \quad D_1 \simeq \frac{\pi}{8} \rho l^2 v^2 \varepsilon^2.$$

(b)

Da $AS = l^2$ gilt, definieren wir

$$K = \rho xl = \frac{\pi}{4} \rho AS, \quad \dot{m} = Kv.$$

Der zusätzliche horizontale Impulsverlust infolge der Verringerung des Geschwindigkeitsbetrags ergibt

$$D_2 = \dot{m} \Delta v \cos \varepsilon.$$

Mit $\Delta v/v = f/A$ und unter Vernachlässigung der Korrektur der Ordnung $\varepsilon^2 f$ folgt

$$D_2 \simeq K v^2 \frac{f}{A} = \boxed{\frac{\pi}{4} \rho f S v^2}.$$

Die Abbremsung verringert auch den Auftrieb um den relativen Anteil f/A . Ihre Auswirkung auf den induzierten Widerstand, der proportional zu $\sin^2 \varepsilon$ ist, ist jedoch von der Ordnung $\varepsilon^2 f$. Daher dürfen wir mit der geforderten Genauigkeit das vertikale Kräftegleichgewicht mithilfe des Ausdrucks für den Auftrieb aus (a) ansetzen:

$$Mg = K v^2 \sin \varepsilon, \quad \sin \varepsilon = \frac{Mg}{K v^2}.$$

Die angegebene Kleinwinkelnäherung liefert dann

$$D_1 \simeq \frac{K v^2}{2} \sin^2 \varepsilon = \frac{(Mg)^2}{2 K v^2} = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S v^2}.$$

Im stationären Horizontalflug gleicht der Propellerschub den gesamten Widerstand aus. Die erforderliche mechanische Leistung beträgt daher

$$P = (D_1 + D_2)v = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S v} + \frac{\pi}{4} \rho f S v^3.$$

Wir schreiben dies in der Form

$$P = \frac{\alpha}{v} + \beta v^3, \quad \alpha = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S}, \quad \beta = \frac{\pi}{4} \rho f S.$$

Die Ableitung nach der Fluggeschwindigkeit ergibt

$$\frac{dP}{dv} = -\frac{\alpha}{v^2} + 3\beta v^2.$$

Damit erfüllt die optimale Geschwindigkeit

$$v_0^4 = \frac{\alpha}{3\beta} = \frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2},$$

also

$$v_0 = \boxed{\left[\frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2} \right]^{1/4}}.$$

Dies ist das einzige Minimum für $v > 0$, denn

$$\frac{d^2P}{dv^2} = \frac{2\alpha}{v^3} + 6\beta v > 0.$$

(c)

Am Minimum folgt aus der Bedingung $\alpha = 3\beta v_0^4$

$$P_1(v_0) = \frac{\alpha}{v_0} = 3\beta v_0^3 = 3P_2(v_0).$$

Somit gilt

$$P_{\min} = 4\beta v_0^3 = \pi \rho f S v_0^3.$$

Einsetzen des Ausdrucks für v_0 ergibt

$$P_{\min} = \left(\frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

Das geforderte Diagramm weist folgende Eigenschaften auf:

- $P_1 = \alpha/v$ ist eine fallende Hyperbel. Formal divergiert sie für $v \rightarrow 0^+$ und nähert sich für $v \rightarrow \infty$ null.
- $P_2 = \beta v^3$ beginnt im Ursprung mit einer horizontalen Tangente und nimmt monoton zu.
- Ihre Summe liegt oberhalb beider Kurven, fällt bis zu ihrem einzigen Minimum $(v_0, P_{\min})$ und steigt danach an. Sie divergiert an beiden Enden des Bereichs positiver Geschwindigkeiten und besitzt keinen Achsenschnittpunkt.
- Die beiden Beiträge schneiden sich bei $v = 3^{1/4}v_0 \approx 1.316v_0$, rechts vom Minimum der Gesamtleistung.

Eine genaue dimensionslose Beschreibung erhält man mit $u = v/v_0$:

$$\frac{P_1}{P_{\min}} = \frac{3}{4u}, \quad \frac{P_2}{P_{\min}} = \frac{u^3}{4}, \quad \frac{P}{P_{\min}} = \frac{3}{4u} + \frac{u^3}{4}.$$

Nützliche Punkte für die Skizze sind:

v/v_0	$P_1/P_{\min}$	$P_2/P_{\min}$	$P/P_{\min}$
0.500	1.500	0.031	1.531
1.000	0.750	0.250	1.000
1.316	0.570	0.570	1.140
2.000	0.375	2.000	2.375

Der Grenzfall $v \rightarrow 0^+$ ist eine formale Extrapolation dieser Gleichungen: Bei hinreichend niedrigen Geschwindigkeiten wäre ein Ablenkwinkel außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Kleinwinkelnäherung erforderlich.

(d)

Die Flächenbelastung sei

$$w = \frac{Mg}{S}.$$

Die verfügbare mechanische Leistung beträgt IS . Die maximale Flächenbelastung wird erreicht, wenn diese gerade der minimal erforderlichen Leistung entspricht:

$$IS = P_{\min} = \pi \rho f S v_0^3.$$

Folglich gilt

$$v_0 = \left(\frac{I}{\pi \rho f} \right)^{1/3}.$$

Numerisch ergibt sich

$$v_0 = \left(\frac{10}{\pi(1.25)(0.004)} \right)^{1/3} = 8.6025 \dots \text{ m/s},$$

also

$$\boxed{v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}}.$$

Durch Umstellen der Beziehung für die optimale Geschwindigkeit aus (b),

$$v_0^4 = \frac{8w^2}{3\pi^2\rho^2 f A},$$

erhalten wir

$$w_{\max} = \pi\rho v_0^2 \sqrt{\frac{3fA}{8}} = \pi\rho \sqrt{\frac{3fA}{8}} \left(\frac{I}{\pi\rho f} \right)^{2/3}.$$

Einsetzen ergibt

$$w_{\max} = \pi(1.25)(8.6025 \dots)^2 \sqrt{\frac{3(0.004)(10)}{8}} = 35.5925 \dots \text{ N/m}^2.$$

Daher ist

$$\boxed{\left(\frac{Mg}{S} \right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2}.$$

Dies ist das Maximum, weil $P_{\min}/S$ wie $w^{3/2}$ zunimmt; eine größere Flächenbelastung würde bei jeder Geschwindigkeit mehr als die verfügbaren 10 W/m^2 erfordern.

Zur Konsistenzprüfung gilt an diesem Betriebspunkt

$$\sin \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{6f}{A}}, \quad \varepsilon_0 \simeq 0.049 \text{ rad} \simeq 2.8^\circ,$$

und

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A} = 0.0004 = 0.04\%.$$

Beide Näherungen sind mit den gegebenen Daten vereinbar.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.