

IPhO 1997

المسائل النظرية والحلول · سدبري، كندا · 3 مسائل نظرية مع حلول كاملة

eulersolve.org/iphO/1997/

المسألة 1: قوانين التحجيم

(a) تُعلّق كتلة صغيرة بطرف نابض مثالي عديم الكتلة، فتتذبذب صعوداً وهبوطاً بتردها الطبيعي f . إذا قُطع النابض إلى نصفين وأُعيد تعليق الكتلة بطرف أحدهما، فما التردد الجديد f' ؟ (1.5 درجة)

(b) نصف قطر ذرة الهيدروجين في حالتها الأرضية هو $a_0 = 0.0529 \text{ nm}$ («نصف قطر بور»). ما نصف القطر a' لذرة «الهيدروجين الميوني» التي يُستبدل فيها الإلكترون بميون له الشحنة نفسها، وتبلغ كتلته 207 أمثال كتلة الإلكترون؟ افترض أن كتلة البروتون أكبر بكثير من كتلتي الميون والإلكترون. (درجتان)

(c) متوسط درجة حرارة الأرض هو $T = 287 \text{ K}$. ماذا يصبح متوسط درجة الحرارة الجديد T' إذا انخفض متوسط المسافة بين الأرض والشمس بنسبة 1%؟ (درجتان)

(d) في يوم معين، يكون الهواء جافاً وكثافته $\rho = 1.2500 \text{ kg/m}^3$. وفي اليوم التالي، تزداد الرطوبة ويصبح بخار الماء مكوّناً لنسبة 2% من كتلة الهواء. ويبقى الضغط ودرجة الحرارة كما كانا في اليوم السابق. فما كثافة الهواء ρ' الآن؟ (درجتان)

متوسط الكتلة المولية للهواء الجاف: 28.8 (g/mol)

الكتلة المولية للماء: 18 (g/mol)

افترض سلوك الغاز المثالي.

(e) يستطيع نوع من المروحيات التحويم عندما تكون القدرة الميكانيكية التي ينتجها محركه P . إذا صُنعت مروحية أخرى تكون نسخة مطابقة للأولى بمقياس $1/2$ (في جميع الأبعاد الخطية)، فما القدرة الميكانيكية P' اللازمة لتحويمها؟ (2.5 درجة)

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

$$f' = \sqrt{2} f. \text{ (a) } \bullet$$

$$a' = \frac{a_0}{207} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}. \text{ (b) } \bullet$$

$$T' = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K} \text{ (c) } \bullet$$

$$\rho' = \frac{1.2500}{1.012} \text{ kg/m}^3 \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3. \text{ (d) } \bullet$$

$$P' = 2^{-7/2} P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884P. \text{ (e) } \bullet$$

الحل

(a)

ليكن ثابت النابض الأصلي k ، ولتكن الكتلة المعلقة به m . تردده الطبيعي هو

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

في النابض المنتظم، يكون النصفان نابضين متماثلين موصولين على التوالي. إذا كان ثابت كل نصف k_h ، فإن

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_h} + \frac{1}{k_h},$$

ومن ثم $k_h = 2k$. وبعبارة مكافئة، تحت تأثير قوة الشد نفسها، يستطيل كل نصف بمقدار نصف استطالة النابض بأكمله.

تبقى الكتلة دون تغيير، فنحصل على

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2} f.$$

تغير الجاذبية الاستطالة عند الاتزان، لكنها لا تؤثر في تردد النابض المثالي.

(b)

وفق التقريب المذكور، يُعدّ البروتون ثابتاً عملياً، ولذلك تحدد كتلة الجسيم المداري m مقياس الطول الذري.

في نموذج بور، يوفر التجاذب الكولومي القوة المركزية، ويكون الزخم الزاوي في الحالة الأرضية $\hbar$:

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad mva = \hbar.$$

بحذف v نحصل على

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}.$$

إذن، عند ثبات الشحنة، يتناسب نصف القطر عكسياً مع كتلة الجسيم. وبما أن $m_\mu = 207m_e$ ، فإن

$$\frac{a'}{a_0} = \frac{m_e}{m_\mu} = \frac{1}{207}.$$

وعليه،

$$a' = \frac{0.0529}{207} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-4} \text{ nm} = 2.56 \times 10^{-13} \text{ m}.$$

(c)

نفترض الاتزان الإشعاعي، وثبات اللمعان الشمسي، وعدم تغير بياض الأرض وخصائصها الفعالة للإشعاع الحراري.

عندما تكون المسافة بين الأرض والشمس r ، يتناسب الفيض الشمسي الساقط مع r^{-2} . ولذلك تكون القدرة المتصلة

$$P_{\text{abs}} = (1 - \alpha) \frac{L_\odot}{4\pi r^2} \pi R_\oplus^2,$$

حيث α هو البياض. وفق قانون ستيفان-بولتزمان، يمكن تمثيل القدرة المنبعثة بالعلاقة

$$P_{\text{emit}} = 4\pi R_\oplus^2 \epsilon_{\text{eff}} \sigma T^4,$$

حيث ϵ_{eff} عامل فعال ثابت.

بمساواة القدرة المتصلة بالقدرة المنبعثة نحصل على

$$T^4 \propto r^{-2}, \quad T \propto r^{-1/2}.$$

المسافة الجديدة هي $r' = 0.99r$ ، ومن ثم

$$T' = T \left(\frac{r}{r'} \right)^{1/2} = \frac{287}{\sqrt{0.99}} \text{ K} \approx 288.4 \text{ K}.$$

للتحقق باستخدام تقريب من الرتبة الأولى،

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r} = 0.005,$$

ف نحصل على $\Delta T \approx 1.435 \text{ K}$ ، وهي قريبة من النتيجة قبل التقريب العددي 1.446 K .

(d)

لتكن $M_w = 18 \text{ g/mol}$ و $M_d = 28.8 \text{ g/mol}$ الكتلتين الموليتين للهواء الجاف والماء. الكسر الكتلي للماء هو $w = 0.02$. تحتوي كتلة m من الهواء الرطب على كتلة $(1 - w)m$ من الهواء الجاف وكتلة $w m$ من بخار الماء. وباستخدام وحدات كتلة متسقة، يكون العدد الكلي لمولاتها

$$n = \frac{(1 - w)m}{M_d} + \frac{w m}{M_w}.$$

بما أن $m/V = \rho'$ ، فإن قانون الغاز المثالي يعطي

$$\frac{p}{RT} = \frac{n}{V} = \rho' \left(\frac{1 - w}{M_d} + \frac{w}{M_w} \right).$$

بالنسبة إلى الهواء الجاف الأصلي عند الضغط ودرجة الحرارة نفسيهما،

$$\frac{p}{RT} = \frac{\rho}{M_d}.$$

بمساواة هذين التعبيرين وإعادة الترتيب،

$$\rho' = \frac{\rho}{(1 - w) + w M_d / M_w}.$$

وعليه

$$\rho' = \frac{1.2500}{0.98 + 0.02(28.8/18)} = \frac{1.2500}{1.012} \approx 1.2352 \text{ kg/m}^3.$$

تنخفض الكثافة لأن جزيئات الماء أخف من جزيء الهواء الجاف المتوسط، بينما تبقى الكثافة العددية الكلية للجزيئات ثابتة عند ثبات الضغط ودرجة الحرارة.

(e)

نفترض أن النسخة المصغرة تستخدم مواد بالكثافات نفسها، وتحوم في هواء له الكثافة نفسها. نستخدم قوانين التحجيم المثالية لتدفق الزخم، مع ثبات الكفاءة الديناميكية الهوائية؛ ونهمل التغيرات في تأثيرات اللزوجة والفواقد الميكانيكية.

ليكن عامل التحجيم الخطي λ . تتغير كتلة المروحية m وفقاً لتغير الحجم، بينما تتغير المساحة A التي تمسحها المروحة الدوارة وفقاً لتغير المساحة:

$$m' = \lambda^3 m, \quad A' = \lambda^2 A.$$

لتكن v السرعة المميزة للهواء المتجه إلى أسفل بفعل المروحة الدوارة. في الجريان المتشابه هندسياً، تتغير كتلة الهواء المسرع في وحدة الزمن وفقاً للعلاقة

$$\dot{m}_{\text{air}} \propto \rho_{\text{air}} A v.$$

وفقاً لحفظ الزخم، تتغير قوة الدفع إلى أعلى وفقاً للعلاقة

$$F \propto \dot{m}_{\text{air}} v \propto \rho_{\text{air}} A v^2.$$

يتطلب التحويم $F = mg$ ، ولذلك

$$v \propto \sqrt{\frac{mg}{\rho_{\text{air}} A}}.$$

وبالتالي،

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{\lambda^3}{\lambda^2}} = \lambda^{1/2}.$$

تتناسب القدرة المطلوبة مع معدل إكساب الهواء طاقة حركية:

$$P \propto \dot{m}_{\text{air}} v^2 \propto \rho_{\text{air}} A v^3.$$

إذن

$$\frac{P'}{P} = \lambda^2 (\lambda^{1/2})^3 = \lambda^{7/2}.$$

عند $\lambda = \frac{1}{2}$ ،

$$P' = \left(\frac{1}{2}\right)^{7/2} P = \frac{P}{8\sqrt{2}} \approx 0.0884P.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: الكتلة النووية والاستقرار

يُعبّر عن جميع الطاقات في هذه المسألة بوحدة MeV، أي مليون إلكترون فولت.

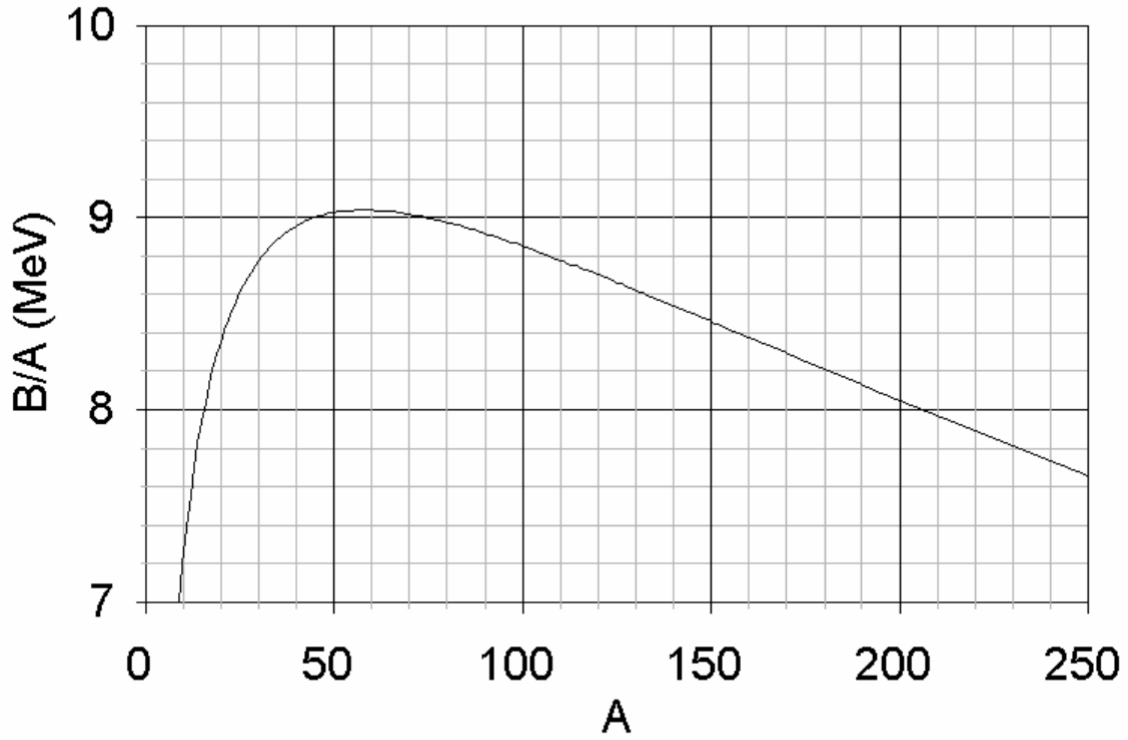
$$1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$$

كتلة M لنواة ذرية تحتوي على Z من البروتونات و N من النيوترونات (أي إن العدد الكتلي هو $A = N + Z$) هي مجموع كتل النوكليونات الحرة المكوّنة لها (البروتونات والنيوترونات) مطروحاً منه طاقة الربط B/c^2 .

$$Mc^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

يمثل الرسم البياني أدناه القيمة العظمى لـ B/A عند قيمة معيّنة لـ A ، بدلالة A .
بوجه عام، كلما زادت قيمة B/A ، كانت النواة أكثر استقراراً.

Binding Energy per Nucleon



(a) فوق عدد كتلي معين A_α ، تكون طاقات ربط النوى صغيرة دائماً بما يكفي للسماح بانبعاث جسيمات ألفا ($A = 4$). استخدم تقريباً خطياً لهذا المنحنى فوق $A = 100$ لتقدير A_α . (3 درجات)

في هذا النموذج، افترض ما يلي:

- تُمثّل كل من النواة الابتدائية والنواة النهائية على هذا المنحنى.
- تُعطى طاقة الربط الكلية لجسيم ألفا بالعلاقة $B_4 = 25.0 \text{ MeV}$ (لا يمكن قراءة هذه القيمة من الرسم البياني!).

(b) تُعطى طاقة الربط لنواة ذرية تحتوي على Z من البروتونات و N من النيوترونات ($A = N + Z$) بصيغة شبه تجريبية:

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} - \delta$$

تُعطى قيمة δ كما يلي:

$$+a_p A^{-3/4} \text{ للنوى ذات } N \text{ الفردية و } Z \text{ الفردية}$$

$$0 \text{ للنوى ذات } N \text{ الزوجية و } Z \text{ الفردية أو } N \text{ الفردية و } Z \text{ الزوجية}$$

$$-a_p A^{-3/4} \text{ للنوى ذات } N \text{ الزوجية و } Z \text{ الزوجية}$$

قيم المعاملات هي:

$$a_v = 15.8 \text{ MeV}; \quad a_s = 16.8 \text{ MeV}; \quad a_c = 0.72 \text{ MeV}; \quad a_a = 23.5 \text{ MeV}; \quad a_p = 33.5 \text{ MeV}.$$

(i) اشتق تعبيراً لعدد البروتونات $Z_{\max}$ في النواة ذات طاقة الربط الأكبر عند عدد كتلي معين A . أهمل الحد δ في هذا الجزء فقط. (درجتان)

(ii) ما قيمة Z للنواة ذات $A = 200$ التي تكون لها أكبر قيمة لـ B/A ؟ ضمّن تأثير الحد δ . (درجتان)

(iii) انظر إلى النوى الثلاث ذات $A = 128$ المدرجة في الجدول في ورقة الإجابة. حدّد أيّها مستقر من ناحية الطاقة، وأيّها يمتلك طاقة كافية للاضمحلال بالعمليات المذكورة أدناه. حدّد $Z_{\max}$ كما عُرّف في الجزء (i)، وأكمل الجدول في ورقة إجابتك. عند إكمال الجدول، يُرجى:

- وضع العلامة $\checkmark$ للعمليات المسموح بها من ناحية الطاقة.
- وضع العلامة 0 للعمليات غير المسموح بها من ناحية الطاقة.
- النظر فقط في الانتقالات بين هذه النوى الثلاث.

عمليات الاضمحلال:

- (1) اضمحلال β^- : انبعاث إلكترون من النواة
 - (2) اضمحلال β^+ : انبعاث بوزيترون من النواة
 - (3) اضمحلال $\beta^-\beta^-$: انبعاث إلكترونين من النواة في وقت واحد
 - (4) الأسر الإلكتروني: أسر النواة لإلكترون نري.
- طاقة السكون للإلكترون (والبوزيترون) هي $m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ ؛ وللبروتون هي $m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}$ ؛ وللنيوترون هي $m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}$.

(3 درجات)

(b) (iii)

النواة/العملية	اضمحلال β^-	اضمحلال β^+	الأسر الإلكتروني	اضمحلال $\beta^-\beta^-$
$^{128}_{53}\text{I}$				
$^{128}_{54}\text{Xe}$				
$^{128}_{55}\text{Cs}$				

الترميز: $^A_Z X$

X = الرمز الكيميائي

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- (a) $A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2$. تعطي الملاءمة بخط مستقيم المستخدمة أدناه قيمة تقارب 215.

- (b)(i) $Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}$. هذه هي القيمة التي يتحقق عندها الحد الأقصى عند اعتبار

المتغير متصلًا؛ وعند إهمال الاقتران، يُختار أقرب عدد صحيح.

- (b)(ii) $Z = 80$ ، مع $N = 120$ و $B/A \approx 8.05 \text{ MeV}$.

- (b)(iii) النتيجة عند اعتبار المتغير متصلًا هي $Z_{\max} \approx 53.58$ ؛ وتبلغ طاقة الربط أقصاها بين القيم الصحيحة عند $Z = 54$. ضمن الانتقالات المحددة، تكون ^{128}Xe مستقرة، بينما يمكن أن تضمحل كلٌّ من ^{128}I و ^{128}Cs .

النواة/العملية	اضمحلال β^-	اضمحلال β^+	الأسر الإلكتروني	اضمحلال $\beta^-\beta^-$
$^{128}_{53}\text{I}$	$\checkmark$	0	0	$\checkmark$
$^{128}_{54}\text{Xe}$	0	0	0	0
$^{128}_{55}\text{Cs}$	0	$\checkmark$	$\checkmark$	0

تُعلم الخانات التي تكون نواها الوليدة خارج هذه النوى الثلاث بالرمز 0، وفقاً للقيود المذكور.

الحل

(a)

يحفظ اضمحلال ألفا العدد الكلي لكل من البروتونات والنيوترونات. لذلك، تلغى طاقات سكون النوكليونات الحرة عند حساب الطاقة المنطلقة:

$$Q_\alpha = [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M(4, 2)]c^2 = B(A - 4) + B_4 - B(A).$$

يكون الاضمحلال مسموحاً به من ناحية الطاقة عندما $Q_\alpha > 0$.

نكتب التقريب الخطي للكمية الممتلئة في الرسم على الصورة

$$b(A) \equiv \frac{B(A)}{A} \simeq b_0 - kA.$$

من القراءات الممتلئة للمنحنى

$$b(100) \simeq 8.85 \text{ MeV}, \quad b(200) \simeq 8.05 \text{ MeV}.$$

إذاً،

$$k \simeq 8.0 \times 10^{-3} \text{ MeV}, \quad b_0 \simeq 9.65 \text{ MeV},$$

حيث إن A كمية بلا أبعاد. ومن ثم تكون طاقة الربط الكلية

$$B(A) \simeq b_0 A - kA^2.$$

باستخدام التغير المحدود بمقدار أربعة نوكليونات،

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= B_4 + b_0(A - 4) - k(A - 4)^2 - b_0 A + kA^2 \\ &= B_4 - 4b_0 + 8kA - 16k. \end{aligned}$$

عند العتبة، $Q_\alpha = 0$ ، مما يعطي

$$A_\alpha = \frac{b_0 - B_4/4}{2k} + 2.$$

عددياً،

$$A_\alpha \simeq \frac{9.65 - 25.0/4}{0.016} + 2 = 214.5.$$

بما أن Q_α تزداد مع A ، فإن انبعاث ألفا ممكن من ناحية الطاقة فوق هذه العتبة. وبمراعاة دقة الرسم البياني،

$$\boxed{A_\alpha \approx 2.1 \times 10^2.}$$

(i)(b)

عند ثبات A ، نعوض $N = A - Z$ ، بحيث يكون $N - Z = A - 2Z$. وبإهمال الاقتتران،

$$B(Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - \frac{a_a}{A} (A - 2Z)^2.$$

باعتبار Z متغيراً متصلًا في البداية، يتحقق شرط القيمة العظمى عندما

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -2a_c Z A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} (A - 2Z) = 0.$$

بالضرب في A وتجميع الحدود التي تحتوي على Z ،

$$(2a_c A^{2/3} + 8a_a)Z = 4a_a A.$$

ومن ثم،

$$Z_{\max} = \frac{2a_a A}{4a_a + a_c A^{2/3}} = \frac{A}{2 + \frac{a_c}{2a_a} A^{2/3}}.$$

هذه النقطة الساكنة هي نقطة عظمى لأن

$$\frac{\partial^2 B}{\partial Z^2} = -2a_c A^{-1/3} - \frac{8a_a}{A} < 0.$$

من دون الاقتران، تتحقق القيمة العظمى الفيزيائية بين القيم الصحيحة عند العدد الصحيح الأقرب إلى هذه القيمة.

(ii)(b)

عند $A = 200$ ، تتحقق القيمة العظمى، باعتبار المتغير متصلًا ومن دون الاقتران، عند

$$Z_0 = \frac{200}{2 + \frac{0.72}{47.0} 200^{2/3}} \simeq 79.242.$$

بما أن A زوجي، فإن كون Z زوجيًا يعني أيضًا أن N زوجي، بينما يعني كون Z فرديًا أن N فردي. مقدار حد الاقتران هو

$$P = a_p A^{-3/4} = 33.5(200)^{-3/4} \simeq 0.6299 \text{ MeV}.$$

بما أن الصيغة تحتوي على $-\delta$ ، فإن الاقتران **يضيف** P إلى طاقة الربط عندما يكون Z زوجيًا، و**يطرح** P عندما يكون Z فرديًا.

يمكن كتابة طاقة الربط من دون الاقتران على الصورة

$$B_0(Z) = B_0(Z_0) - \left(a_c A^{-1/3} + \frac{4a_a}{A} \right) (Z - Z_0)^2.$$

لذلك، ضمن كل من فئتي الأعداد الزوجية والفردية، يكون أفضل عدد صحيح هو الأقرب إلى Z_0 . أفضل اختيار فردي هو 79، وأفضل اختيار زوجي هو 80. يعطي التعويض المباشر، مع تضمين الاقتران:

$(\text{MeV}) B$	$(\text{MeV}) \delta$	N	Z
1609.55	-0.630	122	78
1609.17	+0.630	121	79
1610.12	-0.630	120	80

وعلى وجه الخصوص،

$$B(80) - B(79) \simeq 0.954 \text{ MeV} > 0.$$

إذًا،

$$Z = 80, \quad N = 120,$$

مع

$$\frac{B}{A} = \frac{1610.12}{200} \simeq 8.05 \text{ MeV}.$$

(iii)(b)

أولًا، تعطي نتيجة الجزء (i)

$$Z_{\max} = \frac{128}{2 + \frac{0.72}{47.0} 128^{2/3}} \simeq 53.577.$$

إذًا، أقرب عدد صحيح هو 54، وهو ما يرجّحه الاقتران أيضًا.

لهذه النوى،

$$P = 33.5(128)^{-3/4} \simeq 0.880313 \text{ MeV}.$$

لليود والسييزيوم N فردي و Z فردي، لذا $\delta = +P$. وللزنيون N زوجي و Z زوجي، لذا $\delta = -P$.

يتطلب تحليل طاقة الاضمحلال معرفة الكتل النووية إلى جانب طاقات الربط. وبكتابة $E_Z = M_Z c^2$ ،

$$E_Z = 128m_n c^2 + Z(m_p - m_n)c^2 - B_Z = 128m_n c^2 - (1.30 \text{ MeV})Z - B_Z.$$

يعطي التعويض القيم التالية. احتفظ بخانات إضافية لتحديد طاقة اضمحلال بيتا المزدوج الصغيرة بدقة.

النواة	(MeV) B_Z	(MeV) $E_Z - E_{54}$
$^{128}_{53}\text{I}$	1104.656	3.195830
$^{128}_{54}\text{Xe}$	1106.552	0
$^{128}_{55}\text{Cs}$	1103.172	2.079906

بإهمال طاقات ربط الإلكترونات الذرية وكتل سكون النيوتريونات، يعطي حفظ الطاقة

$$Q_{\beta^-}(Z) = E_Z - E_{Z+1} - m_e c^2,$$

$$Q_{\beta^+}(Z) = E_Z - E_{Z-1} - m_e c^2,$$

$$Q_{\text{EC}}(Z) = E_Z + m_e c^2 - E_{Z-1},$$

$$Q_{\beta^-\beta^-}(Z) = E_Z - E_{Z+2} - 2m_e c^2.$$

تُطرح طاقة سكون الإلكترون في حالة الانبعاث، وتُضاف في حالة الأسر. تكون العملية مسموحًا بها من ناحية الطاقة عندما $Q > 0$.

جميع الانتقالات الممكنة ضمن المجموعة المحددة هي:

النواة الابتدائية	العملية	النواة الوليدة	Q (MeV)	مسموح بها؟
^{128}I	β^-	^{128}Xe	+2.686	√
^{128}Xe	β^-	^{128}Cs	-2.590	0
^{128}Xe	β^+	^{128}I	-3.706	0
^{128}Cs	β^+	^{128}Xe	+1.570	√
^{128}Xe	الأسر الإلكتروني	^{128}I	-2.686	0
^{128}Cs	الأسر الإلكتروني	^{128}Xe	+2.590	√
^{128}I	$\beta^-\beta^-$	^{128}Cs	+0.096	√

وبالنسبة إلى طاقة اضمحلال بيتا المزدوج الصغيرة تحديداً،

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-\beta^-} &= E_{53} - E_{55} - 2m_e c^2 \\ &= 3.195830 - 2.079906 - 1.020 \\ &\simeq 0.0959 \text{ MeV} > 0. \end{aligned}$$

إذاً، فإن اضمحلال بيتا المزدوج المتزامن من اليود إلى السيزيوم مسموح به من ناحية الطاقة، على الرغم من أن الخطوة الثانية من المسار المتتابع عبر الزنيون ممنوعة.

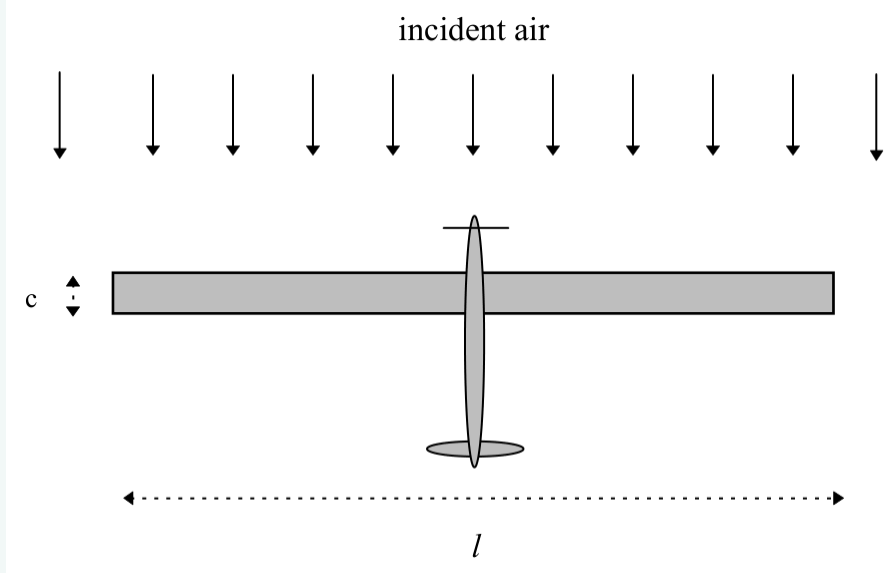
ليس للزنيون أي انتقال مسموح به من ناحية الطاقة ضمن المجموعة المحددة. يمكن لليود أن يخضع لاضمحلال بيتا السالب أو اضمحلال بيتا السالب المزدوج؛ ويمكن للسيزيوم أن يخضع لانبعاث بوزيترون أو للأسر الإلكتروني.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

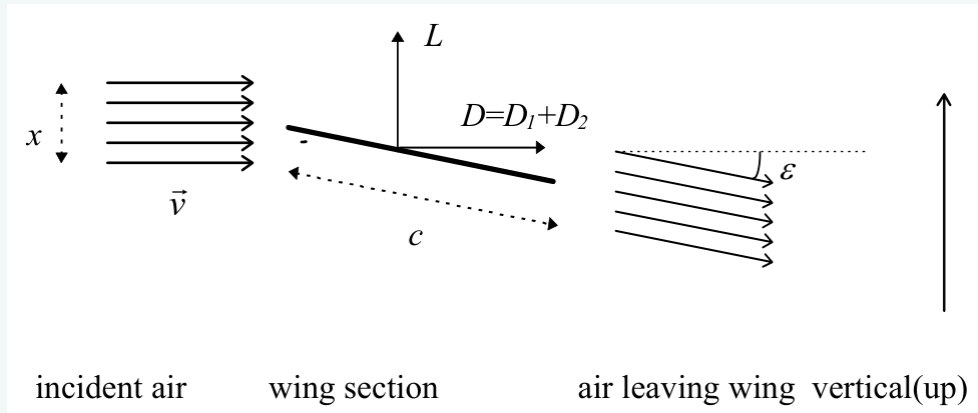
المسألة 3: طائرة تعمل بالطاقة الشمسية

نرغب في تصميم طائرة تبقى محلقة باستخدام الطاقة الشمسية وحدها. وأكثر التصميم كفاءة هو تصميم ذو جناح تغطي الخلايا الشمسية سطحه العلوي بالكامل. وتوفر هذه الخلايا القدرة الكهربائية التي يستخدمها المحرك لتدوير المروحة.

لننظر في جناح مستطيل الشكل عند النظر إليه من أعلى، باعه l ووتره (عرضه) c ؛ مساحة الجناح هي $S = cl$ ، ونسبة استطالته هي $A = l/c$. يمكننا تكوين فكرة تقريبية عن أداء الجناح بالنظر في شريحة من الهواء ارتفاعها x وطولها l ، تنحرف إلى أسفل بزاوية صغيرة ε ، مع تغير ضئيل جداً في مقدار سرعتها. ويمكن استخدام أسطح التحكم لاختيار قيمة مثلى للزاوية ε أثناء الطيران. يتوافق هذا النموذج البسيط مع الواقع بدرجة كبيرة إذا كان $x = \pi l/4$ ، ويمكننا افتراض تحقق ذلك. الكتلة الكلية للطائرة هي M ، وهي تطير أفقياً بسرعة متجهة $\vec{v}$ بالنسبة إلى الهواء المحيط بها. في الحسابات الآتية، اقتصر على النظر في جريان الهواء حول الجناح.



منظر علوي للطائرة (في إطارها المرجعي الخاص):



منظر جانبي للجناح (في إطار مرجعي يتحرك مع الطائرة):

أهمل التغير في جريان الهواء الناتج عن المروحة.

(a) انظر في تغير كمية حركة الهواء المار بالجناح، دون أن يتغير مقدار سرعته أثناء مروره. اشتق تعبيرين لقوة الرفع الرأسية L وقوة السحب الأفقية D_1 المؤثرتين في الجناح، بدلالة أبعاد الجناح، v ، و ε ، وكثافة الهواء ρ . افترض أن اتجاه جريان الهواء يوازي دائماً مستوى رسم المنظر الجانبي.

(3 درجات)

(b) توجد قوة سحب أفقية إضافية D_2 ناتجة عن احتكاك الهواء المناسب على سطح الجناح. يتباطأ الهواء قليلاً، بمقدار تغير في السرعة Δv ($1\% \ll$ من v) يُعطى بالعلاقة:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A}$$

قيمة f مستقلة عن ε .

أوجد تعبيراً (بدلالة g, M, f, A, S, ρ) وهو تسارع الجاذبية) لسرعة الطيران v_0 التي تقابل أقل قدرة لازمة لإبقاء هذه الطائرة محلقة على ارتفاع ثابت وبسرعة متجهة ثابتة. أهمل الحدود من الرتبة $(\varepsilon^2 f)$ أو أعلى.

(3 درجات)

قد تجد التقريب الآتي للزوايا الصغيرة مفيداً:

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\sin^2 \varepsilon}{2}$$

(c) ارسم على ورقة الإجابة رسماً بيانياً تقريبياً للقدرة P بدلالة سرعة الطيران v . بين المساهمة المنفصلة لكل من مصدري السحب في القدرة المطلوبة. أوجد تعبيراً (بدلالة g, M, f, A, S, ρ) للقدرة الدنيا، $P_{\min}$.

(درجتان)

(d) إذا كانت الخلايا الشمسية تستطيع توفير طاقة كافية بحيث تولد المحركات الكهربائية والمراوح قدرة ميكانيكية مقدارها $I = 10$ واط لكل متر مربع من مساحة الجناح، فاحسب أقصى تحميل للجناح Mg/S (N/m^2) لهذه القدرة، وسرعة الطيران v_0 (m/s). افترض أن $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$ ، و $f = 0.004$ ، و $A = 10$.

(درجتان)

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

(a) •

$$L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon, \quad D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

(b) •

$$v_0 = \left[\frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2} \right]^{1/4}.$$

(c) •

$$P(v) = \underbrace{\frac{2(Mg)^2}{\pi \rho A S v}}_{P_1} + \underbrace{\frac{\pi}{4} \rho f S v^3}_{P_2},$$

$$P_{\min} = \left(\frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

تتناقص مساهمة القدرة الناتجة عن السحب المستحث P_1 وفق $1/v$ ، بينما تزايد مساهمة الاحتكاك P_2 وفق v^3 . ولجميعهما قيمة دنيا واحدة، عند v_0 ، حيث $P_1 = 3P_2$.

(d) •

$$\left(\frac{Mg}{S} \right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2, \quad v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}.$$

الحل

(a)

نعمل في الإطار المرجعي للطائرة. خلال زمن dt ، يكون حجم الهواء المار عبر مساحة المقطع العرضي المتأثر xl هو $xlv dt$. ومن ثم يكون معدل تدفق الكتلة

$$\dot{m} = \rho xlv.$$

تكون سرعة الهواء في البداية أفقية ومقدارها v . وبعد انحرافه، تكون مركبة سرعته الأفقية $v \cos \varepsilon$ ، ومركبة سرعته نحو الأسفل $v \sin \varepsilon$. وفقاً لمبدأ كمية الحركة وقانون نيوتن الثالث، تساوي القوة المؤثرة في الجناح نحو الأعلى معدل اكتساب الهواء لكمية الحركة نحو الأسفل:

$$L = \dot{m} v \sin \varepsilon = \rho xlv^2 \sin \varepsilon.$$

وبالمثل، يفقد الهواء كمية حركة أفقية، مما يولد قوة سحب تؤثر في الجناح:

$$D_1 = \dot{m} v(1 - \cos \varepsilon) = \rho xlv^2(1 - \cos \varepsilon).$$

باستخدام $x = \pi l/4$ ،

$$\boxed{L = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \sin \varepsilon}, \quad \boxed{D_1 = \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 (1 - \cos \varepsilon)}.$$

عندما تكون ε صغيرة، تصبح هاتان العلاقتان

$$L \simeq \frac{\pi}{4} \rho l^2 v^2 \varepsilon, \quad D_1 \simeq \frac{\pi}{8} \rho l^2 v^2 \varepsilon^2.$$

(b)

بما أن $AS = l^2$ ، نعرّف

$$K = \rho xl = \frac{\pi}{4} \rho AS, \quad \dot{m} = Kv.$$

يعطي الفقد الإضافي في كمية الحركة الأفقية الناتج عن انخفاض السرعة

$$D_2 = \dot{m} \Delta v \cos \varepsilon.$$

باستخدام $\Delta v/v = f/A$ وإهمال التصحيح من الرتبة ε^2 ،

$$D_2 \simeq Kv^2 \frac{f}{A} = \boxed{\frac{\pi}{4} \rho f S v^2}.$$

يقلل التباطؤ أيضاً قوة الرفع بمقدار نسبي f/A . إلا أن تأثيره في السحب المستحث، الذي يتناسب مع $\sin^2 \varepsilon$ ، هو من الرتبة ε^2 . ولذلك، ضمن الدقة المطلوبة، يمكننا فرض الاتزان الرأسي باستخدام تعبير قوة الرفع الوارد في (a):

$$Mg = Kv^2 \sin \varepsilon, \quad \sin \varepsilon = \frac{Mg}{Kv^2}.$$

وعندئذ يعطي تقريب الزوايا الصغيرة المعطى

$$D_1 \simeq \frac{Kv^2}{2} \sin^2 \varepsilon = \frac{(Mg)^2}{2Kv^2} = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho AS v^2}.$$

في الطيران الأفقي المنتظم، تعادل قوة دفع المروحة قوة السحب الكلية. ومن ثم تكون القدرة الميكانيكية المطلوبة

$$P = (D_1 + D_2)v = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho AS v} + \frac{\pi}{4} \rho f S v^3.$$

نكتب هذه العلاقة على الصورة

$$P = \frac{\alpha}{v} + \beta v^3, \quad \alpha = \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho AS}, \quad \beta = \frac{\pi}{4} \rho f S.$$

بالتفاضل بالنسبة إلى سرعة الطيران،

$$\frac{dP}{dv} = -\frac{\alpha}{v^2} + 3\beta v^2.$$

إذن تحقق السرعة المثلى

$$v_0^4 = \frac{\alpha}{3\beta} = \frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2},$$

ومن ثم

$$v_0 = \left[\frac{8(Mg)^2}{3\pi^2 \rho^2 f A S^2} \right]^{1/4}.$$

وهذه هي القيمة الدنيا الوحيدة عندما $v > 0$ ، لأن

$$\frac{d^2 P}{dv^2} = \frac{2\alpha}{v^3} + 6\beta v > 0.$$

(c)

عند القيمة الدنيا، يستلزم الشرط $\alpha = 3\beta v_0^4$ أن

$$P_1(v_0) = \frac{\alpha}{v_0} = 3\beta v_0^3 = 3P_2(v_0).$$

وبالتالي

$$P_{\min} = 4\beta v_0^3 = \pi \rho f S v_0^3.$$

بالتعويض عن v_0 بتعبيرها،

$$P_{\min} = \left(\frac{512f}{27\pi^2 A^3} \right)^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho S}}.$$

يتصف الرسم البياني المطلوب بالخصائص الآتية:

- منحنى $P_1 = \alpha/v$ قطع زائد متناقص. ومن الناحية الرياضية، يتباعد عندما $v \rightarrow 0^+$ ، ويقترب من الصفر عندما $v \rightarrow \infty$.
- يبدأ منحنى $P_2 = \beta v^3$ من نقطة الأصل بمماس أفقي، ويزداد رتيباً.
- يقع منحنى مجموعهما فوق كلا المنحنيين، ويتناقص حتى يبلغ قيمته الدنيا الوحيدة $(v_0, P_{\min})$ ، ثم يزداد. ويتباعد عند طرفي مجال السرعات الموجبة، ولا يتقاطع مع أي من المحورين.
- يتقاطع منحنياً المساهمتين عند $v = 3^{1/4} v_0 \approx 1.316 v_0$ ، إلى يمين موضع القيمة الدنيا للقدرة الكلية.

نحصل على وصف دقيق لا بُدّي بوضع $u = v/v_0$:

$$\frac{P_1}{P_{\min}} = \frac{3}{4u}, \quad \frac{P_2}{P_{\min}} = \frac{u^3}{4}, \quad \frac{P}{P_{\min}} = \frac{3}{4u} + \frac{u^3}{4}.$$

فيما يأتي نقاط مفيدة للرسم التقريبي:

$P/P_{\min}$	$P_2/P_{\min}$	$P_1/P_{\min}$	v/v_0
1.531	0.031	1.500	0.500
1.000	0.250	0.750	1.000
1.140	0.570	0.570	1.316
2.375	2.000	0.375	2.000

النهاية $v \rightarrow 0^+$ هي استقراء رياضي صوري لهذه المعادلات: فالسرعات المنخفضة بما يكفي تتطلب زاوية انحراف تقع خارج نطاق تقريب الزوايا الصغيرة.

(d)

ليكن تحميل الجناح

$$w = \frac{Mg}{S}.$$

القدرة الميكانيكية المتاحة هي IS . ويتحقق التحميل الأقصى عندما تساوي هذه القدرة تمامًا القدرة الدنيا المطلوبة:

$$IS = P_{\min} = \pi \rho f S v_0^3.$$

وعليه،

$$v_0 = \left(\frac{I}{\pi \rho f} \right)^{1/3}.$$

عدديًا،

$$v_0 = \left(\frac{10}{\pi(1.25)(0.004)} \right)^{1/3} = 8.6025 \dots \text{ m/s},$$

مما يعطي

$$\boxed{v_0 \approx 8.6 \text{ m/s}}.$$

بإعادة ترتيب علاقة السرعة المثلى الواردة في (b)،

$$v_0^4 = \frac{8w^2}{3\pi^2 \rho^2 f A},$$

نحصل على

$$w_{\max} = \pi \rho v_0^2 \sqrt{\frac{3fA}{8}} = \pi \rho \sqrt{\frac{3fA}{8}} \left(\frac{I}{\pi \rho f} \right)^{2/3}.$$

يعطي التعويض

$$w_{\max} = \pi(1.25)(8.6025 \dots)^2 \sqrt{\frac{3(0.004)(10)}{8}} = 35.5925 \dots \text{ N/m}^2.$$

إذن،

$$\boxed{\left(\frac{Mg}{S} \right)_{\max} \approx 36 \text{ N/m}^2}.$$

هذا هو التحميل الأقصى لأن $P_{\min}/S$ تتزايد وفق $w^{3/2}$ ؛ فالتحميل الأكبر يتطلب قدرة تتجاوز القدرة المتاحة البالغة 10 W/m^2 عند كل سرعة.

للتحقق من الاتساق، عند نقطة التشغيل هذه،

$$\sin \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{6f}{A}}, \quad \varepsilon_0 \simeq 0.049 \text{ rad} \simeq 2.8^\circ,$$

وكذلك

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A} = 0.0004 = 0.04\%.$$

كلا التقريبين متسق مع المعطيات.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.