

IPhO 1996

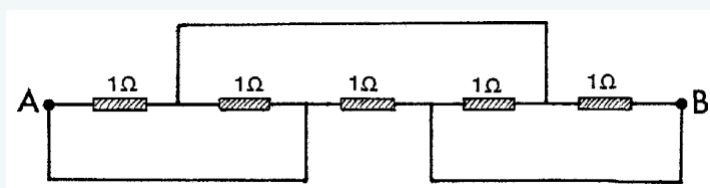
理论题与解答 · 挪威奥斯陆 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1996/

题目 1: 五道互不相关的短题（电阻网络、山坡上的滑雪者、金属的热容、辐射隔热屏、两导体之间的磁场）

（本题五个部分互不相关）

a) 五个阻值为 1Ω 的电阻如图所示连接。导线（实线）的电阻可以忽略不计。



求 A、B 之间的等效电阻 R 。（1 分）

b)



一名滑雪者从 A 点由静止开始沿山坡滑下，途中既不转弯也不制动。摩擦系数为 μ 。当他在 B 点停下时，水平位移为 s 。A、B 两点之间的高度差 h 是多少？

（滑雪者的速度很小，因此可以忽略轨迹弯曲引起的对雪面的附加压力。也忽略空气阻力以及 μ 随滑雪者速度的变化。）（1.5 分）

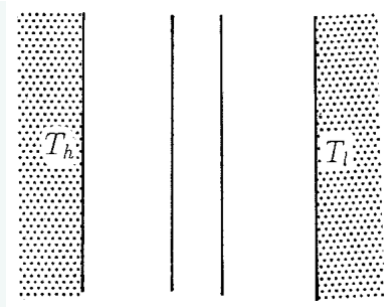
c) 一块与外界绝热的金属在大气压下由电流加热，以恒定功率 P 接收电能。这使金属的绝对温度 T 随时间 t 按下式升高：

$$T(t) = T_0[1 + a(t - t_0)]^{1/4}.$$

其中 a 、 t_0 和 T_0 为常量。求金属的热容 $C_p(T)$ （在实验温度范围内随温度变化）。（2 分）

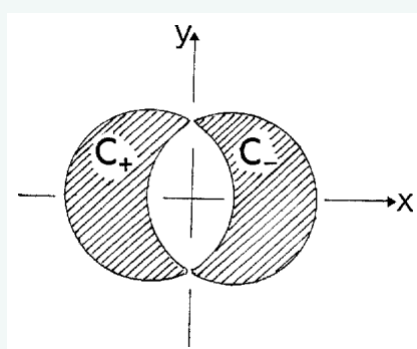
d) 一个保持恒定高温 T_h 的黑体平面与另一个保持恒定较低温度 T_l 的黑体平面相互平行。两板之间为真空。

为减少辐射传热，在热表面与冷表面之间放置一个由两块相互绝热的黑体薄板组成的隔热屏，使其与这两个表面平行。经过一段时间后，系统达到稳态。



由于隔热屏的存在，稳态热流率降至原来的几分之一，即减小因子 ξ 为多少？忽略表面尺寸有限所引起的边缘效应。（1.5 分）

e) 两根相互绝缘、很长的非磁性直导体 C_+ 和 C_- 分别沿 z 轴正方向和负方向通有电流 I 。导体的横截面（图中阴影部分）由 x - y 平面内直径为 D 的圆限定，两圆圆心的间距为 $D/2$ 。由此得到的两个横截面的面积均为 $\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3}\right)D^2$ 。每根导体中的电流均匀分布在其横截面上。



求两导体之间空间内的磁场 $B(x, y)$ 。（4 分）

题目译自官方英文原文。

答案

- a) $R = \frac{1}{2} \Omega = 0.5 \Omega$.
- b) $h = \mu s$, 其中 A 点高于 B 点。
- c) $C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4}$, 使用国际单位制时, 单位为 J K^{-1} 。
- d) $\dot{Q}_{\text{shield}} = \frac{\dot{Q}_0}{3}$: 减小至原来的三分之一, $\xi = \frac{\dot{Q}_0}{\dot{Q}_{\text{shield}}} = 3$.
- e) 在整个透镜形间隙内,

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{6\mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3})D} \hat{\mathbf{y}}.$$

磁场均匀, 方向沿 y 轴正方向。

解答

a)

设每个电阻的阻值为 $r = 1\ \Omega$ ，并将内部的四个连接点从左到右依次标为 N_1, N_2, N_3, N_4 。理想导线使下列各点分别归于同一节点：

$$A = N_2, \quad N_1 = N_4 = X, \quad N_3 = B.$$

因此，第一个和第二个电阻都连接在 A 与 X 之间，彼此并联。第四个和第五个电阻都连接在 X 与 B 之间，也彼此并联：

$$R_{AX} = R_{XB} = \frac{r}{2}.$$

这两个等效电阻构成从 A 到 B 的一条串联支路，其电阻为 $r/2 + r/2 = r$ 。第三个电阻直接连接 A 与 B，构成另一条电阻为 r 的支路。因此

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}, \quad \boxed{R = \frac{r}{2} = 0.5\ \Omega.}$$

b)

设 θ 为滑雪者轨迹在当与水平方向的夹角， $d\ell$ 为路程微元。按照题意，忽略轨迹弯曲引起的附加法向力，得到

$$N = mg \cos \theta.$$

摩擦力的大小为 μN ，方向与运动方向相反。因此，沿整个路径耗散的能量为

$$E_{\text{fr}} = \int_A^B \mu mg \cos \theta d\ell.$$

对于图示路径，水平坐标在整个运动过程中始终增大，且

$$dx = \cos \theta d\ell.$$

由此可得

$$E_{\text{fr}} = \mu mg \int_A^B dx = \mu mgs.$$

滑雪者在起点和终点均处于静止状态，因此减少的重力势能等于摩擦耗散的能量。令 $h = y_A - y_B$ ，则

$$mgh = \mu mgs, \quad \boxed{h = \mu s.}$$

在题设近似下，结果仅取决于水平位移。

c)

金属与外界绝热，但电功以功率 P 向其输入能量。在恒定大气压 p 下，由热力学第一定律可得

$$dU = P dt - p dV.$$

由于焓为 $H = U + pV$ ，且 $dp = 0$ ，因此

$$dH = P dt.$$

利用整块金属的定压热容

$$C_p(T) = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p,$$

得到

$$P = C_p(T) \frac{dT}{dt}.$$

将给定温度变化规律的两边取四次方：

$$T^4 = T_0^4 [1 + a(t - t_0)].$$

求导得

$$4T^3 \frac{dT}{dt} = aT_0^4.$$

因此

$$C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4} = \frac{4P}{aT_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3.$$

所以，在实验温度范围内，热容与 T^3 成正比。由于 a 的单位为 s^{-1} ，该表达式的单位为 $J K^{-1}$ 。

d)

对于边缘效应可忽略的两个平行黑体表面，由斯特藩-玻尔兹曼定律可得净辐射热流密度

$$q_0 = \sigma (T_h^4 - T_l^4)$$

这是插入隔热屏之前的情形。

设隔热屏的两块薄板从热侧到冷侧的温度依次为 T_1 和 T_2 。每块薄板的两个表面温度相同。在稳态下，两块板均不积累能量，因此通过三个真空间隙的净热流密度 q 均相同：

$$q = \sigma(T_h^4 - T_1^4) = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = \sigma(T_2^4 - T_l^4).$$

将三个温度四次方之差相加，得到

$$3q = \sigma(T_h^4 - T_l^4) = q_0.$$

总热流率也满足同样的比值关系：

$$\frac{\dot{Q}_{\text{shield}}}{\dot{Q}_0} = \frac{1}{3}.$$

因此，热流率的减小因子为

$$\xi = 3.$$

e)

设任一实际导体的横截面积为

$$A_c = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) D^2.$$

均匀电流密度的大小为

$$J = \frac{I}{A_c}.$$

两圆的半径均为 $D/2$ 。取图示原点，两圆的圆心位置为

$$\mathbf{r}_+ = -\frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{r}_- = \frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}.$$

利用叠加原理，将实际电流分布表示为两个完整圆柱体中电流分布的叠加：

- 左侧圆柱体内通有均匀电流密度 $+J\hat{\mathbf{z}}$;
- 右侧圆柱体内通有均匀电流密度 $-J\hat{\mathbf{z}}$ 。

在两圆柱体的重叠区域内，两电流密度相互抵消。在每个月牙形区域内，剩余的电流密度恰好等于实际导体中的电流密度。因此，这一构造重现了实际的电流分布。

对于通有均匀电流密度 $J\hat{\mathbf{z}}$ 的很长圆柱体，利用圆柱对称性和安培环路定律，在内部距轴线 ρ 处可得

$$B(\rho) 2\pi\rho = \mu_0 J \pi \rho^2, \quad B(\rho) = \frac{\mu_0 J \rho}{2}.$$

对于中心位于 $\mathbf{r}_c$ 的圆柱体，其矢量形式为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{2} \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c).$$

透镜形间隙内的每一点都位于两个假想圆柱体的内部。它们在该处产生的磁场分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_+(x, y) &= \frac{\mu_0 J}{2} \left[-y \hat{\mathbf{x}} + \left(x + \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right], \\ \mathbf{B}_-(x, y) &= \frac{\mu_0 J}{2} \left[y \hat{\mathbf{x}} - \left(x - \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right]. \end{aligned}$$

将两者相加，所有与坐标有关的项均相互抵消：

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 J D}{4} \hat{\mathbf{y}}.$$

代入 $J = I/A_c$ ，得

$$\boxed{\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 I D}{4 A_c} \hat{\mathbf{y}} = \frac{6\mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3})D} \hat{\mathbf{y}}.}$$

这一均匀磁场适用于同时满足以下两个不等式所定义的整个间隙：

$$\left(x + \frac{D}{4} \right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}, \quad \left(x - \frac{D}{4} \right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}.$$

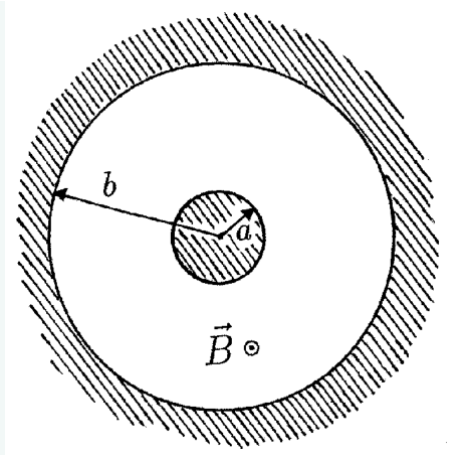
其方向在图中向上，与对两股电流分别应用右手定则所得的方向一致。

解答已与官方解答核对。

题目 2：磁场中同轴圆柱导体之间的电子（磁截止）

一对同轴圆柱导体之间的空间被抽成真空。内圆柱的半径为 a ，外圆柱的内半径为 b ，如下图所示。外圆柱称为阳极，可以使其相对于内圆柱具有正电势 V 。此外，还有一个平行于圆柱轴线、方向垂直于图面向外的静态匀强磁场 $\vec{B}$ 。忽略导体中的感应电荷。

我们研究静止质量为 m 、电荷为 $-e$ 的电子的动力学。电子从内圆柱表面释放。



a) 首先施加电势 V ，但 $\vec{B} = 0$ 。一个电子以可忽略的初速度从内圆柱表面释放。求它撞击阳极时的速率 v 。分别给出可以采用非相对论处理和必须采用相对论处理时的答案。(1 分)

本题其余各部分均可采用非相对论处理。

b) 现在 $V = 0$ ，但存在匀强磁场 $\vec{B}$ 。一个电子以沿径向的初速度 $\vec{v}_0$ 出发。当磁场大于某个临界值 B_c 时，电子将无法到达阳极。画出 B 略大于 B_c 时电子轨迹的示意图。求 B_c 。(2 分)

从现在起，电势 V 和匀强磁场 $\vec{B}$ 同时存在。

c) 磁场会使电子获得相对于圆柱轴线的非零角动量 L 。写出角动量变化率 dL/dt 的方程。证明由此方程可知

$$L = keBr^2$$

在运动过程中保持不变，其中 k 是一个确定的无量纲数。这里 r 是到圆柱轴线的距离。求 k 的值。(3 分)

d) 考虑一个以可忽略的初速度从内圆柱释放的电子，它未到达阳极，而是到圆柱轴线的最大距离为 r_m 。用 r_m 表示电子在径向距离最大处的速率 v 。(1 分)

e) 我们希望利用磁场调节流向阳极的电子电流。当 B 大于某个临界磁场 B_c 时，以可忽略的初速度释放的电子将无法到达阳极。求 B_c 。(1 分)

f) 如果通过加热内圆柱来释放电子，则电子在内圆柱表面通常具有非零初速度。初速度平行于 $\vec{B}$ 的分量为 v_B ，垂直于 $\vec{B}$ 的分量为 v_r (沿径向) 和 v_φ (沿方位角方向，即垂直于径向)。

求这种情况下电子能够到达阳极的临界磁场 B_c 。(2 分)

题目译自官方英文原文。

答案

这里 B 是磁场的大小， c 是光速，方位角速度分量为正表示沿图中的逆时针方向运动。因此，(f) 中的 v_φ 是带符号的量。

- a) 当 $eV \ll mc^2$ 时,

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

采用相对论处理时,

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

- b)

$$B_c = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

轨迹是半径为 $R = mv_0/(eB)$ 的逆时针圆弧。当 B 略大于 B_c 时, 电子到圆柱轴线的最大距离略小于 b , 随后返回内圆柱。

- c)

$$\frac{dL}{dt} = eBr\dot{r}, \quad L - \frac{eB}{2}r^2 = \text{常量}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

- d)

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

等价地,

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

- e)

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

- f) 对于向间隙内发射的电子,

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}} - av_\varphi \right].$$

该结果与 v_B 无关。

解答

取 z 轴正方向沿 $\vec{B}$, 即垂直于图面向外。于是方位角正方向为逆时针方向。用 L 表示电子机械角动量带符号的 z 分量。在 (a) 之后, 我们按题目要求采用非相对论力学。

a)

从内圆柱到阳极, 电势升高 V 。由于电子的电荷为 $-e$, 其电势能减少 eV 。因此, 由能量守恒可得

$$K_{\text{final}} = eV.$$

当这一能量远小于静止能量，即 $eV \ll mc^2$ 时，

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV,$$

所以

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

采用相对论处理时，

$$(\gamma - 1)mc^2 = eV, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

因此

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{mc^2},$$

从而

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

在 $eV/(mc^2) \ll 1$ 时展开此表达式，即可得到非相对论结果。

b)

磁场力垂直于速度，因此不做功。电子的速率保持为 v_0 ，其在垂直于匀强磁场的平面内做圆周运动。轨道半径 R 由下式确定：

$$\frac{mv_0^2}{R} = ev_0B,$$

得到

$$R = \frac{mv_0}{eB}.$$

选取释放点为 $P = (a, 0)$ ，初速度沿 x 轴正方向。由于

$$\vec{F} = -e \vec{v} \times \vec{B},$$

初始时的力沿 y 轴正方向。因此，圆心为

$$C = (a, R)$$

且圆的方程为

$$(x - a)^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

圆柱轴线 O 到轨道圆心的距离为

$$OC = \sqrt{a^2 + R^2}.$$

因此，电子所能达到的最大径向距离为

$$r_{\max} = \sqrt{a^2 + R^2} + R.$$

在临界磁场下，这一最大值等于 b ：

$$\sqrt{a^2 + R_c^2} + R_c = b.$$

移项后平方，得到

$$a^2 + R_c^2 = (b - R_c)^2, \quad R_c = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

因此

$$B_c = \frac{mv_0}{eR_c} = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

绘制所要求的示意图时，画出两个同心的圆柱边界，并将电子的出发点取在向右的径向线与内边界的交点处。其初始切线方向沿径向向外，轨迹向上弯曲，沿以 $C = (a, R)$ 为圆心的圆逆时针运动。轨迹上距 O 最远的点位于射线 OC 上。当 B 略大于 B_c 时，该点恰好位于阳极内侧附近。随后电子向内运动，再次撞击内圆柱。返回点的极角为

$$\varphi_{\text{return}} = 2 \arctan(R/a).$$

c)

电场力沿径向，因此对圆柱轴线的力矩为零。

将速度写为

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r\dot{\varphi} \hat{\varphi} + v_z \hat{z},$$

则磁场力为

$$-e \vec{v} \times \vec{B} = -eBr\dot{\varphi} \hat{r} + eB\dot{r} \hat{\varphi}.$$

其方位角分量为 $F_\varphi = eB\dot{r}$ 。因此，

$$\frac{dL}{dt} = rF_\varphi = eBr\dot{r}.$$

由于 B 为常量，

$$eBr\dot{r} = \frac{eB}{2} \frac{d(r^2)}{dt}.$$

于是

$$\frac{d}{dt} \left(L - \frac{eB}{2} r^2 \right) = 0,$$

所以

$$L - \frac{eB}{2} r^2 = \text{常量}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

特别地，从 $r = a$ 处释放到之后任意位置，有

$$L(r) = L(a) + \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

d)

电子的初速度可忽略，因此 $L(a) = 0$ 。于是

$$L(r) = \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

电场和磁场均不产生轴向力，因此初始为零的轴向速度始终为零。在最大径向距离 r_m 处，径向速度也为零。因此，该处的速度完全沿方位角方向，从而

$$L(r_m) = mr_mv.$$

因此,

$$mr_mv = \frac{eB}{2}(r_m^2 - a^2),$$

从而

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

由能量守恒可得到一个等价的表达式。在无电荷的圆柱形间隙内, 高斯定律给出 $rE_r = \text{常量}$ 。取内圆柱电势为零、阳极电势为 V , 则电势为

$$\Phi(r) = V \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

由于磁场不做功,

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Phi(r_m),$$

由此得到

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

在实际的径向转折半径 r_m 处, 这两个表达式必须一致。

e)

在临界磁场下, 电子的最大径向距离恰好为 b 。它沿切向到达阳极, 径向速度为零。

由能量守恒确定其在该处的速率:

$$v_b = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

在 (d) 的结果中取 $r_m = b$, 得到

$$v_b = \frac{eB_c(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

因此,

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

当 $B > B_c$ 时, 角动量守恒所要求的 $r = b$ 处的方位角方向动能超过了电子在该处可具有的总动能。电子无法到达阳极。

f)

取初始径向速度分量指向间隙内, 因此 $v_r \geq 0$ 。用 u_r 和 u_φ 分别表示之后的径向和方位角方向的速度分量。

由于没有轴向力,

$$u_z = v_B$$

在整个运动过程中成立。初始角动量为

$$L(a) = mav_\varphi.$$

由 (c) 中的守恒定律可得

$$mru_\varphi = mav_\varphi + \frac{eB}{2}(r^2 - a^2).$$

在阳极处,

$$u_\varphi(b) = \frac{a}{b}v_\varphi + \frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

由两个圆柱之间的能量守恒可得

$$\frac{1}{2}m[u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 + v_B^2] = \frac{1}{2}m[v_r^2 + v_\varphi^2 + v_B^2] + eV.$$

轴向动能相互抵消。定义

$$W = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}},$$

得到

$$u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 = W^2.$$

因此, 到达阳极的条件为

$$\left| av_\varphi + \frac{eB}{2m}(b^2 - a^2) \right| \leq bW.$$

当 $B = 0$ 时, $|av_\varphi| < bW$ 。随着正向磁场增大, 达到上限时满足

$$av_\varphi + \frac{eB_c}{2m}(b^2 - a^2) = bW.$$

解得

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}} - av_\varphi \right].$$

结果中不含 v_B , 反映了轴向运动既不改变到圆柱轴线的距离, 也不与横向运动交换能量。

为了验证阳极处的条件没有遗漏更早出现的径向转折点, 令

$$s = \ln(r/a), \quad \alpha = \frac{eBa}{2m}, \quad \beta = v_\varphi - \alpha.$$

由角动量方程和能量方程可得

$$u_r^2(s) = v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m \ln(b/a)} s - (\alpha e^s + \beta e^{-s})^2.$$

其二阶导数为

$$\frac{d^2 u_r^2}{ds^2} = -4\alpha^2 e^{2s} - 4\beta^2 e^{-2s} \leq 0.$$

因此, u_r^2 是 s 的凹函数。如果它在两个圆柱处均非负, 那么它在整个间隙内均非负。因此, 上述条件确定的就是实际的截止条件。

令 $v_r = v_\varphi = 0$, 即可得到 (e) 的结果。令 $V = 0$ 、 $v_\varphi = 0$ 且 $v_r = v_0$, 即可得到 (b) 的结果。

解答已与官方解答核对。

题目 3：地月系统中的大洋潮汐

本题研究地球上大洋潮汐幅度的一些总体特征。我们作如下假设，以简化问题：

- (i) 将地球和月球视为一个孤立系统，
- (ii) 假设月球与地球之间的距离保持不变，
- (iii) 假设地球完全被海洋覆盖，
- (iv) 忽略地球自转的动力学效应，以及
- (v) 计算地球的引力时，可视为其全部质量都集中在地心。

已知下列数据：

地球质量： $M = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

月球质量： $M_m = 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

地球半径： $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$

地心与月心之间的距离：

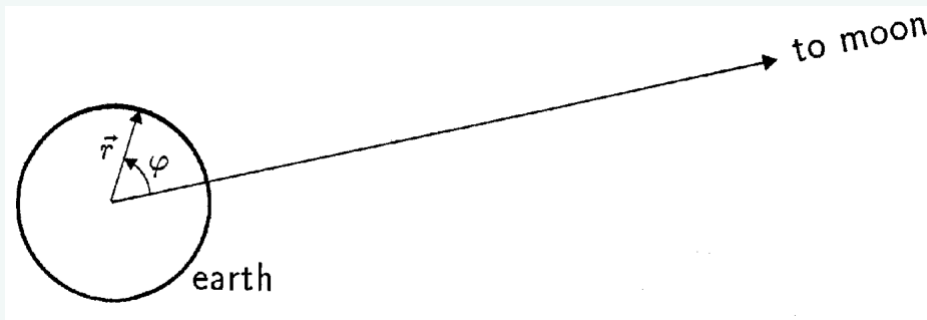
$L = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$

万有引力常量： $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 。

a) 月球和地球以角速度 ω 绕它们的共同质心 C 转动。 C 距地心多远？（将此距离记为 l 。）

求 ω 的数值。（2 分）

现在采用一个随月球和地心一起绕 C 转动的参考系。在此参考系中，地球液面的形状保持不变。



在通过 C 且垂直于转轴的平面 P 内，地球液面上一个质点的位置可用图中所示的极坐标 r, φ 描述。其中， r 是该质点到地心的距离。

我们将研究平面 P 内地球液面的形状

$$r(\varphi) = R + h(\varphi).$$

b) 考虑地球液面上（位于平面 P 内）的一个质点（质量为 m ）。在我们采用的参考系中，它受到离心力以及月球和地球的引力作用。写出与这三个力对应的势能表达式。

注：任何相对于某一原点沿径向的力 $F(r)$ ，都等于某个球对称势能 $V(r)$ 的负导数：

$$F(r) = -V'(r). \quad (3 \text{ 分})$$

c) 用给定的量 M, M_m 等，求潮汐隆起形状 $h(\varphi)$ 的近似表达式。在此模型中，高潮与低潮之间的高度差是多少米？

可以使用近似表达式

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \theta}} \approx 1 + a \cos \theta + \frac{1}{2} a^2 (3 \cos^2 \theta - 1),$$

该式适用于 a 远小于 1 的情况。

在分析过程中，只要合理，就可以作简化近似。（5 分）

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 质心位于从地心指向月球的方向上，距地心

$$l = \frac{M_m L}{M + M_m} \approx 4.6 \times 10^6 \text{ m}.$$

角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M + M_m)}{L^3}} \approx 2.67 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

- b) 略去一个加性常数后，

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2}m\omega^2 (r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi).$$

- c) 潮汐形状的首阶近似为

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi,$$

其中常数 $h_{\min}$ 确定基准海平面。等价地，相对于沿该截面一周的平均高度 $\bar{h}_P$ ，有

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi \approx (0.27 \text{ m}) \cos 2\varphi.$$

高潮出现在 $\varphi = 0, \pi$ 处，低潮出现在 $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ 处。两者的高度差为

$$\Delta h = \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \approx 0.53 \text{ m}.$$

解答

a)

质心位于地球与月球的连线上。以到质心的距离计算，有

$$Ml = M_m(L - l),$$

因此

$$l = \frac{M_m}{M + M_m} L = \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22}} (3.84 \times 10^8) = 4.631 \dots \times 10^6 \text{ m}.$$

由于 $l < R$ ，所以 C 位于地球内部。

地球绕 C 做半径为 l 的圆周运动。月球对地球的引力提供向心力：

$$M\omega^2 l = \frac{GM M_m}{L^2}.$$

代入 l 的表达式，得

$$\omega^2 = \frac{G(M + M_m)}{L^3}.$$

代入数值，

$$\omega = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22})}{(3.84 \times 10^8)^3}} = 2.67 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

后面还将用到精确关系

$$\omega^2 l = \frac{GM_m}{L^2}.$$

b)

将原点设在地心，并取指向月球的方向为 $\varphi = 0$ 。于是，月球和 C 分别位于沿此方向距地心 L 和 l 处。

由余弦定理，质点到月球的距离为

$$d = \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}.$$

由于该点位于通过 C 且垂直于转轴的平面内，它到转轴的距离为

$$s = \sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi}.$$

引力势能分别为

$$V_E = -\frac{GMm}{r}, \quad V_m = -\frac{GM_m m}{d}.$$

离心力的方向背离转轴，大小为 $m\omega^2 s$ 。因此

$$-\frac{dV_{\text{cf}}}{ds} = m\omega^2 s \implies V_{\text{cf}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 s^2.$$

将这三项相加，得

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2}m\omega^2(r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) + \text{常数}.$$

c)

对于静止流体，流体静力学平衡要求

$$\nabla p = -\rho \nabla \Phi, \quad \Phi = \frac{V}{m}.$$

自由表面上的压强处处相同，因此该表面必须是 Φ 的等势面。

由于

$$\frac{R}{L} = 0.0166 \ll 1,$$

我们将月球的引力势按 r/L 展开至二阶：

$$-\frac{GM_m}{d} \approx -\frac{GM_m}{L} - \frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

单位质量的离心势能为

$$-\frac{1}{2}\omega^2(r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}\omega^2 l^2 + \omega^2 lr \cos \varphi.$$

利用 **a)** 部分求得的关系,

$$-\frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi + \omega^2 lr \cos \varphi = 0.$$

因此, 月球引力场中的均匀部分被相应的离心项抵消。将与位置无关的项并入常数后,

$$\Phi(r, \varphi) \approx -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1) + \text{常数}.$$

现在令 $r = R + h(\varphi)$, 其中 $|h| \ll R$ 。地球的引力势变为

$$-\frac{GM}{R+h} \approx -\frac{GM}{R} + \frac{GM}{R^2} h = -\frac{GM}{R} + gh,$$

其中

$$g = \frac{GM}{R^2} = 9.83 \text{ m s}^{-2}.$$

在较小的离心项和月球引力项中, 可以取 $r = R$ 。例如, 离心项对 h 的系数的修正与 g 之比仅为

$$\frac{\omega^2 R}{g} = 4.62 \times 10^{-6}.$$

在 R 处计算的离心势在平面 P 内与 φ 无关, 因此它只影响液面高度中的常数项。于是等势条件化为

$$gh(\varphi) - \frac{GM_m R^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1) = \text{常数}.$$

因此,

$$h(\varphi) = H + \frac{M_m R^4}{2ML^3} (3 \cos^2 \varphi - 1),$$

其中 H 与 φ 无关。该常数由基准海平面或体积归一化条件确定; 潮汐高度随角度的变化不依赖于该常数。

将结果写成相对于最小值的形式, 得

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi.$$

或者, 利用 $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$, 得

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi.$$

因此, 液面沿地月连线有两个相等的极大值: 一个位于朝向月球的一侧, 另一个位于背向月球的一侧。两个极小值位于平面 P 内垂直于该连线的方向上。在所保留的 R/L 展开阶数下, 这两个隆起的高度相等。

最大值与最小值之差为

$$\begin{aligned}
 \Delta h &= \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \\
 &= \frac{3}{2} \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24}} \frac{(6.37 \times 10^6)^4}{(3.84 \times 10^8)^3} \text{ m} \\
 &= 0.532447 \dots \text{ m}.
 \end{aligned}$$

所以

$$\boxed{\Delta h \approx 0.53 \text{ m}.}$$

相对于平面 P 内平均高度的振幅为该值的一半，约为 0.27 m。这一微小形变证实了对 h/R 作线性展开的有效性。

解答已与官方解答核对。