

IPhO 1996

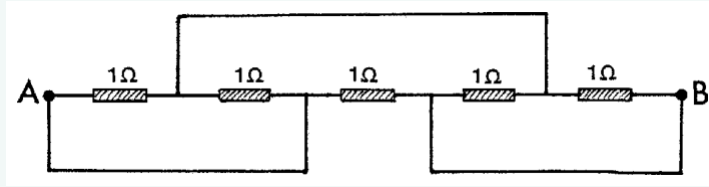
Teorik sorular ve çözümler · Oslo, Norveç · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1996/

Soru 1: Birbirinden bağımsız beş kısa soru (direnç ağı, bir yamaçtaki kayakçı, bir metalin ısı kapasitesi, ışınlama ısı aktarımına karşı kalkan, iki iletken arasındaki manyetik alan)

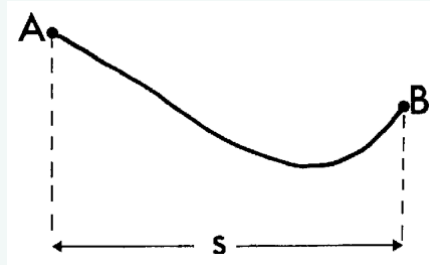
(Bu sorunun beş kısmı birbirinden bağımsızdır)

a) Her biri 1Ω olan beş direnç, şekilde gösterildiği gibi bağlanmıştır. İletken tellerin (kesintisiz çizgiler) direnci ihmal edilebilir.



A ile B arasındaki eşdeğer direnç R 'yi belirleyiniz. (1 puan)

b)



Bir kayakçı A noktasında durgun hâlden harekete başlar ve dönmeden ya da fren yapmadan yamaçtan aşağı kayar. Sürtünme katsayısı μ 'dür. B noktasında durduğunda yatay yer değiştirmesi s 'dir. A ve B noktaları arasındaki yükseklik farkı h nedir?

(Kayakçının hızı, eğrilik nedeniyle kar üzerinde oluşan ek basıncın ihmal edilebileceği kadar küçüktür. Hava direncini ve μ 'nün kayakçının hızına bağımlılığını da ihmal ediniz.) (1.5 puan)

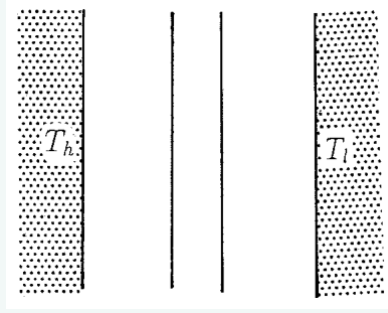
c) Isıl olarak yalıtılmış bir metal parçası, atmosfer basıncı altında elektrik akımıyla, sabit P gücünde elektrik enerjisi alacak şekilde ısıtılmaktadır. Bunun sonucunda metalin mutlak sıcaklığı T , t zamanına bağlı olarak aşağıdaki gibi artmaktadır:

$$T(t) = T_0[1 + a(t - t_0)]^{1/4}.$$

Burada a , t_0 ve T_0 sabitlerdir. Metalin (deneyin sıcaklık aralığında sıcaklığa bağlı olan) ısı kapasitesi $C_p(T)$ 'yi belirleyiniz. (2 puan)

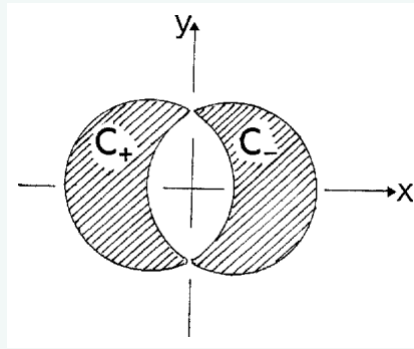
d) Sabit ve yüksek bir T_h sıcaklığındaki siyah düzlem yüzey, sabit ve daha düşük bir T_l sıcaklığındaki başka bir siyah düzlem yüzeye paraleldir. Levhalar arasında vakum vardır.

Işınım ile ısı aktarımını azaltmak amacıyla, birbirinden ısı olarak yalıtılmış iki ince siyah levhadan oluşan bir ısı kalkanı, sıcak ve soğuk yüzeylerin arasına ve bu yüzeylere paralel olarak yerleştirilir. Bir süre sonra kararlı duruma ulaşılır.



Isı kalkanının varlığı, kararlı durumdaki ısı aktarım hızını hangi ξ çarpanı kadar azaltır? Yüzeylerin sonlu boyutlarından kaynaklanan kenar etkilerini ihmal ediniz. (1.5 puan)

e) Birbirinden yalıtılmış, düz ve çok uzun iki manyetik olmayan iletken C_+ ve C_- , sırasıyla pozitif ve negatif z yönünde I akımı taşımaktadır. İletkenlerin (şekilde taralı olarak gösterilen) kesitleri, x - y düzleminde merkezleri arasındaki uzaklık $D/2$ olan, D çaplı çemberlerle sınırlanmıştır. Böylece oluşan kesitlerin her birinin alanı $\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3}\right)D^2$ 'dir. Her bir iletkendeki akım, kesit boyunca düzgün dağılmıştır.



İletkenler arasındaki boşlukta manyetik alan $B(x, y)$ 'yi belirleyiniz. (4 puan)

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a) $R = \frac{1}{2} \Omega = 0.5 \Omega$.
- b) $h = \mu s$; A, B'den daha yüksektedir.
- c) $C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4}$; SI birimleri kullanıldığında birimi $J K^{-1}$ 'dir.
- d) $\dot{Q}_{\text{shield}} = \frac{\dot{Q}_0}{3}$: üç kat azalma, $\xi = \frac{\dot{Q}_0}{\dot{Q}_{\text{shield}}} = 3$.

- e) Mercek biçimindeki boşluğun tamamında,

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{6\mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3})D} \hat{\mathbf{y}}.$$

Alan düzgündür ve pozitif y yönündedir.

Çözüm

a)

Her bir direnç $r = 1 \Omega$ olsun ve içerideki dört bağlantı noktasını soldan sağa N_1, N_2, N_3, N_4 olarak adlandıralım. İdeal bağlantı telleri, aşağıdaki noktaları aynı düğüm hâline getirir:

$$A = N_2, \quad N_1 = N_4 = X, \quad N_3 = B.$$

Dolayısıyla birinci ve ikinci dirençlerin ikisi de A ile X arasına bağlıdır ve birbirine paraleldir. Dördüncü ve beşinci dirençlerin ikisi de X ile B arasına bağlıdır ve bunlar da birbirine paraleldir:

$$R_{AX} = R_{XB} = \frac{r}{2}.$$

Bu iki eşdeğer direnç, A'dan B'ye uzanan, direnci $r/2 + r/2 = r$ olan seri bir kol oluşturur. Üçüncü direnç, A'yı doğrudan B'ye bağlayarak direnci r olan başka bir kol oluşturur. Böylece

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}, \quad R = \frac{r}{2} = 0.5 \Omega.$$

b)

Kayakçının izlediği yolun yatayla yaptığı yerel açı θ , yol uzunluğunun bir elemanı ise $d\ell$ olsun. Soruda belirtildiği gibi eğrilikten kaynaklanan ek normal kuvvet ihmal edildiğinde

$$N = mg \cos \theta.$$

Sürtünme kuvvetinin büyüklüğü μN 'dir ve yönü harekete zıttır. Bu nedenle yol boyunca sürtünmeyle harcanan enerji

$$E_{\text{fr}} = \int_A^B \mu mg \cos \theta d\ell.$$

Gösterilen yol için yatay koordinat hareket boyunca artar ve

$$dx = \cos \theta d\ell.$$

Buradan

$$E_{\text{fr}} = \mu mg \int_A^B dx = \mu mgs.$$

Kayakçı harekete durgun hâlden başlayıp sonunda durduğundan, kütleçekim potansiyel enerjisindeki azalma sürtünmeyle harcanan enerjiye eşittir. $h = y_A - y_B$ yazılırsa,

$$mgh = \mu mgs, \quad h = \mu s.$$

Belirtilen yaklaşım çerçevesinde sonuç yalnızca yatay yer değiştirmeye bağlıdır.

c)

Metal ısı olarak yalıtılmıştır, ancak elektriksel iş yoluyla P hızında enerji sağlanır. Sabit atmosfer basıncı p altında, termodinamiğin birinci yasası

$$dU = P dt - p dV.$$

Entalpi $H = U + pV$ olduğundan ve $dp = 0$ olduğuna göre,

$$dH = P dt.$$

Parçanın sabit basınçtaki toplam ısı kapasitesi

$$C_p(T) = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p,$$

kullanılarak

$$P = C_p(T) \frac{dT}{dt}.$$

Verilen sıcaklık bağıntısının dördüncü kuvvetini alalım:

$$T^4 = T_0^4 [1 + a(t - t_0)].$$

Türev alındığında,

$$4T^3 \frac{dT}{dt} = aT_0^4.$$

Dolayısıyla

$$C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4} = \frac{4P}{aT_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3.$$

Böylece ısı kapasitesi, deneyin sıcaklık aralığında T^3 ile orantılıdır. a 'nın birimi s^{-1} olduğundan, ifadenin birimi $J K^{-1}$ 'dir.

d)

Kenar etkilerinin ihmal edilebildiği iki siyah paralel yüzey için Stefan–Boltzmann yasası, kalkan yerleştirilmeden önceki net ışınlama ısı akısını

$$q_0 = \sigma (T_h^4 - T_l^4)$$

olarak verir.

İnce kalkan levhalarının sıcaklıkları, sıcak taraftan soğuk tarafa doğru sırasıyla T_1 ve T_2 olsun. Her ince levhanın iki yüzü aynı sıcaklıktadır. Kararlı durumda levhaların hiçbirinde enerji birikmez; dolayısıyla net ısı akısı q , üç vakum aralığının tümünde aynıdır:

$$q = \sigma(T_h^4 - T_1^4) = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = \sigma(T_2^4 - T_l^4).$$

Üç sıcaklık farkı toplandığında

$$3q = \sigma(T_h^4 - T_l^4) = q_0.$$

Aynı oran, toplam ısı aktarım hızı için de geçerlidir:

$$\frac{\dot{Q}_{\text{shield}}}{\dot{Q}_0} = \frac{1}{3}.$$

Dolayısıyla ısı aktarım hızı şu çarpan kadar azalır:

$$\xi = 3.$$

e)

Gerçek iletkenlerden herhangi birinin kesit alanı

$$A_c = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) D^2.$$

Düzgün akım yoğunluğunun büyüklüğü

$$J = \frac{I}{A_c}.$$

Çemberlerin yarıçapı $D/2$ 'dir. Şekilde gösterilen koordinat başlangıcına göre merkezleri

$$\mathbf{r}_+ = -\frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{r}_- = \frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}.$$

Gerçek akım dağılımını, süperpozisyon ilkesini kullanarak iki tam dairesel silindirle temsil edelim:

- düzgün akım yoğunluğu $+J\hat{\mathbf{z}}$ olan bir sol silindir;
- düzgün akım yoğunluğu $-J\hat{\mathbf{z}}$ olan bir sağ silindir.

Örtüşme bölgelerinde iki akım yoğunluğu birbirini yok eder. Her hilal biçimli bölgede kalan akım yoğunluğu, gerçek iletkeninkiyle tam olarak aynıdır. Böylece bu kurgu, fiziksel akım dağılımını aynen verir.

Düzgün akım yoğunluğu $J\hat{\mathbf{z}}$ olan çok uzun bir dairesel silindir için silindirik simetri ve Ampère yasası, silindirin içindeki ρ yarıçapında

$$B(\rho) 2\pi\rho = \mu_0 J \pi \rho^2, \quad B(\rho) = \frac{\mu_0 J \rho}{2}.$$

Merkezi $\mathbf{r}_c$ olan bir silindir için vektörel biçimde,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{2} \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c).$$

Mercek biçimindeki boşluğun her noktası, her iki varsayımsal silindirin de içindedir. Bu bölgedeki alanları

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_+(x, y) &= \frac{\mu_0 J}{2} \left[-y \hat{\mathbf{x}} + \left(x + \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right], \\ \mathbf{B}_-(x, y) &= \frac{\mu_0 J}{2} \left[y \hat{\mathbf{x}} - \left(x - \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right]. \end{aligned}$$

Bu alanlar toplandığında koordinatlara bağlı tüm terimler birbirini götürür:

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 J D}{4} \hat{\mathbf{y}}.$$

$J = I/A_c$ yerine konulduğunda,

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 I D}{4 A_c} \hat{\mathbf{y}} = \frac{6 \mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3}) D} \hat{\mathbf{y}}.$$

Bu düzgün alan, aşağıdaki eşitsizliklerin aynı anda sağlandığı boşluğun tamamında geçerlidir:

$$\left(x + \frac{D}{4}\right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}, \quad \left(x - \frac{D}{4}\right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}.$$

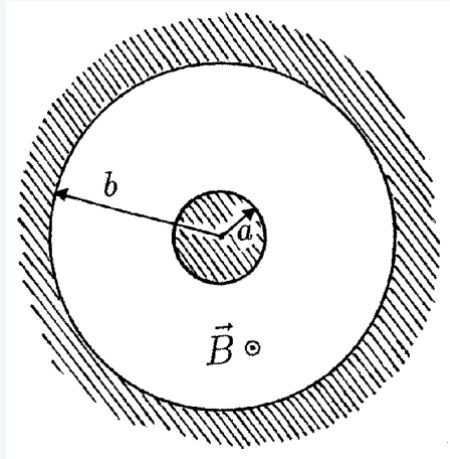
Alanın yönü, her iki akım için de sağ el kuralıyla uyumlu olarak, şekilde yukarı doğrudur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Manyetik alanda eş eksenli silindirler arasındaki elektronlar (manyetik kesim)

Eş eksenli iki silindirik iletken arasındaki boşluk vakumlanmıştır. Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, iç silindirin yarıçapı a , dış silindirin iç yarıçapı ise b 'dir. Anot adı verilen dış silindire, iç silindire göre pozitif bir V potansiyeli uygulanabilir. Ayrıca, silindir eksenine paralel, şekil düzleminden dışarıya doğru yönelmiş, zamana göre değişmeyen düzgün bir $\vec{B}$ manyetik alanı vardır. İletkenlerde indüklenen yükler ihmal edilmektedir.

Durgun kütlesi m , yükü $-e$ olan elektronların dinamiğini inceliyoruz. Elektronlar iç silindirin yüzeyinden serbest bırakılmaktadır.



a) Önce V potansiyeli uygulanır, ancak $\vec{B} = 0$ 'dır. Bir elektron, iç silindirin yüzeyinden ihmal edilebilir bir hızla serbest bırakılır. Anoda çarptığı andaki v süratini bulunuz. Cevabı hem görelî olmayan bir yaklaşımın yeterli olduğu hem de yeterli olmadığı durum için veriniz. (1 puan)

Bu sorunun geri kalan kısımlarında görelî olmayan bir yaklaşım yeterlidir.

b) Şimdi $V = 0$ 'dır, ancak düzgün $\vec{B}$ manyetik alanı vardır. Bir elektron, radyal yönde bir $\vec{v}_0$ ilk hızıyla harekete başlar. Manyetik alanın kritik bir B_c değerinden büyük olması durumunda elektron anoda ulaşamaz. B 'nin B_c 'den biraz büyük olduğu durumda elektronun yörüngesini kabaca çiziniz. B_c 'yi bulunuz. (2 puan)

Bundan sonraki kısımlarda hem V potansiyeli hem de düzgün $\vec{B}$ manyetik alanı vardır.

c) Manyetik alan, elektrona silindir eksenine göre sıfırdan farklı bir L açısal momentumu kazandıracaktır. Açısal momentumun değişim hızı dL/dt için bir denklem yazınız. Bu denklemin, hareket boyunca

$$L - keBr^2$$

ifadesinin sabit kaldığını gösterdiğini kanıtlayınız; burada k , belirli bir boyutsuz sayıdır. r ise silindir ekseninden olan uzaklıktır. k 'nın değerini bulunuz. (3 puan)

d) İç silindirden ihmal edilebilir bir hızla serbest bırakılan, anoda ulaşamayan ve silindir ekseninden en büyük uzaklığı r_m olan bir elektronu ele alınız. Radyal uzaklığın en büyük olduğu noktadaki v süratini r_m cinsinden bulunuz. (1 puan)

e) Anoda giden elektron akımını düzenlemek için manyetik alanı kullanmak istiyoruz. B , kritik bir B_c manyetik alanından büyük olduğunda, ihmal edilebilir bir hızla serbest bırakılan bir elektron anoda ulaşamaz. B_c 'yi bulunuz.

(1 puan)

f) Elektronlar iç silindir ısıtılarak serbest bırakılırsa, bir elektronun iç silindirin yüzeyinde genellikle sıfırdan farklı bir ilk hızı olur. İlk hızın $\vec{B}$ 'ye paralel bileşeni v_B , $\vec{B}$ 'ye dik bileşenleri ise v_r (radyal yönde) ve v_φ (azimutal yönde, yani radyal yöne dik) olsun.

Bu durum için anoda ulaşmanın sınırını belirleyen kritik B_c manyetik alanını bulunuz. (2 puan)

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Burada B manyetik alanın büyüklüğü, c ışık hızıdır; pozitif azimutal hız ise şekilde saat yönünün tersine hareket anlamına gelir. Dolayısıyla (f) kısmındaki v_φ işaretli bir büyüklüktür.

- **a)** $eV \ll mc^2$ için,

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Görelî durumda,

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

- **b)**

$$B_c = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

Yörünge, yarıçapı $R = mv_0/(eB)$ olan ve saat yönünün tersine izlenen bir çember yayıdır. B , B_c 'nin hemen üzerindeyken elektronun silindir ekseninden en büyük uzaklığı b 'nin hemen altında olur ve elektron iç silindire geri döner.

- **c)**

$$\frac{dL}{dt} = eBr\dot{r}, \quad L - \frac{eB}{2}r^2 = \text{sabit}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

• d)

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

Eşdeğer olarak,

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

• e)

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

• f) Boşluğa doğru salınan bir elektron için,

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} + \frac{2eV}{m} - av_\varphi \right].$$

Bu değer v_B 'den bağımsızdır.

Çözüm

Pozitif z eksenini, şekil düzleminden dışarıya doğru, $\vec{B}$ yönünde seçelim. Bu durumda pozitif azimutal yön, saat yönünün tersidir. L , elektronun mekanik açısal momentumunun işaretli z bileşenini gösterebilir. (a) kısmından sonra, belirtildiği üzere göreceli olmayan mekaniği kullanıyoruz.

a)

Elektrik potansiyeli, iç silindirden anoda giderken V kadar artar. Elektronun yükü $-e$ olduğundan, potansiyel enerjisi eV kadar azalır. Dolayısıyla enerji korunumu

$$K_{\text{final}} = eV.$$

sonucunu verir. Bu enerji durgunluk enerjisine kıyasla küçük olduğunda, $eV \ll mc^2$,

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV,$$

olduğundan

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Göreceli bir yaklaşım için,

$$(\gamma - 1)mc^2 = eV, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Böylece

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{mc^2},$$

ve

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

Bu ifade $eV/(mc^2) \ll 1$ için seriye açıldığında görelili olmayan sonuç yeniden elde edilir.

b)

Manyetik kuvvet hıza diktir, dolayısıyla iş yapmaz. Elektronun sürati v_0 olarak kalır ve düzgün manyetik alana dik düzlemdeki hareketi çemberseldir. Yörünge yarıçapı R ,

$$\frac{mv_0^2}{R} = ev_0B,$$

bağıntısından

$$R = \frac{mv_0}{eB}.$$

olarak bulunur. Serbest bırakılma noktasını $P = (a, 0)$, ilk hızın yönünü ise pozitif x eksen yönünde seçelim.

$$\vec{F} = -e \vec{v} \times \vec{B},$$

olduğundan başlangıçtaki kuvvet pozitif y eksen yönündedir. Dolayısıyla çemberin merkezi

$$C = (a, R)$$

ve denklemi

$$(x - a)^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

olur. Silindir eksen O 'dan yörünge merkezinin uzaklığı

$$OC = \sqrt{a^2 + R^2}.$$

şeklinde. Buna göre ulaşılan en büyük radyal uzaklık

$$r_{\max} = \sqrt{a^2 + R^2} + R.$$

olur. Kritik alanda bu en büyük uzaklık b 'ye eşittir:

$$\sqrt{a^2 + R_c^2} + R_c = b.$$

Düzenleyip karesini aldığımızda

$$a^2 + R_c^2 = (b - R_c)^2, \quad R_c = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$B_c = \frac{mv_0}{eR_c} = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

İstenen çizim için eş merkezli iki silindirin sınırlarını çizin ve elektronu, sağa doğru uzanan radyal doğru üzerinde, iç sınırdan başlatınız. Yörünge başlangıçtaki teğeti doğrudan dışarıya yönelir; yörünge yukarıya doğru kıvrılarak merkezi $C = (a, R)$ olan çemberi saat yönünün tersine izler. Yörünge O 'dan en uzak noktası OC ışını üzerindedir. B, B_c 'den biraz büyük olduğunda bu nokta anodun hemen iç tarafında kalır. Elektron daha sonra içeriye doğru hareket eder ve yeniden iç silindire çarpar. Geri dönüş noktasının kutupsal açısı

$$\varphi_{\text{return}} = 2 \arctan(R/a).$$

şeklindedir.

c)

Elektrik kuvveti radyaldır ve bu nedenle silindir eksenine göre tork oluşturmaz.

Hızı

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r\dot{\varphi} \hat{\varphi} + v_z \hat{z},$$

şeklinde yazarsak manyetik kuvvet

$$-e \vec{v} \times \vec{B} = -eBr\dot{\varphi} \hat{r} + eB\dot{r} \hat{\varphi}.$$

olur. Bu kuvvetin azimutal bileşeni $F_{\varphi} = eB\dot{r}$ 'dir. Dolayısıyla,

$$\frac{dL}{dt} = rF_{\varphi} = eBr\dot{r}.$$

B sabit olduğundan,

$$eBr\dot{r} = \frac{eB}{2} \frac{d(r^2)}{dt}.$$

Buradan

$$\frac{d}{dt} \left(L - \frac{eB}{2} r^2 \right) = 0,$$

olduğu ve dolayısıyla

$$\boxed{L - \frac{eB}{2} r^2 = \text{sabit}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

sonucu çıkar. Özel olarak, $r = a$ 'daki serbest bırakılma anı ile daha sonraki herhangi bir konum arasında,

$$L(r) = L(a) + \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

d)

Elektron ihmal edilebilir bir hızla harekete başladığından $L(a) = 0$ 'dır. Böylece

$$L(r) = \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

Her iki alan da eksenel bir kuvvet oluşturmadığından, başlangıçta sıfır olan eksenel hız sıfır kalır. En büyük radyal uzaklık r_m 'de radyal hız da sıfır olur. Dolayısıyla bu noktadaki hız bütünüyle azimutaldır ve

$$L(r_m) = mr_mv.$$

olur. Buna göre,

$$mr_mv = \frac{eB}{2} (r_m^2 - a^2),$$

ve

$$\boxed{v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

Eşdeğer bir ifade enerji korunumundan elde edilir. Yük bulunmayan silindirik boşlukta Gauss yasası $rE_r = \text{sabit}$ sonucunu verir. İç silindirin potansiyeli sıfır, anodunki V olduğunda potansiyel

$$\Phi(r) = V \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

şeklindedir. Manyetik alan iş yapmadığından,

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Phi(r_m),$$

olur ve buradan

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

elde edilir. Bu iki ifade, gerçek dönüm yarıçapı r_m 'de aynı değeri vermelidir.

e)

Kritik alanda elektronun en büyük radyal uzaklığı tam olarak b 'dir. Elektron anoda, radyal hızı sıfır olacak şekilde teğetsel olarak ulaşır.

Enerji korunumu, elektronun buradaki süratini belirler:

$$v_b = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

(d) kısmını $r_m = b$ için kullanırsak,

$$v_b = \frac{eB_c(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

Dolayısıyla,

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

$B > B_c$ için, açısal momentum korunumunun $r = b$ 'de gerektirdiği azimutal kinetik enerji, o konumda mevcut olan toplam kinetik enerjiyi aşar. Elektron anoda ulaşamaz.

f)

İlk hızın radyal bileşeninin boşluğa doğru yöneldiğini alalım; dolayısıyla $v_r \geq 0$ olsun. Daha sonraki radyal ve azimutal hız bileşenlerini u_r ve u_φ ile gösterelim.

Eksenel kuvvet olmadığından, hareket boyunca

$$u_z = v_B$$

olur. Başlangıçtaki açısal momentum

$$L(a) = mav_\varphi.$$

şeklindedir. (c) kısmındaki korunum yasası

$$mru_\varphi = mav_\varphi + \frac{eB}{2}(r^2 - a^2).$$

sonucunu verir. Anotta,

$$u_\varphi(b) = \frac{a}{b}v_\varphi + \frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

İki silindir arasındaki enerji korunumu

$$\frac{1}{2}m [u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 + v_B^2] = \frac{1}{2}m [v_r^2 + v_\varphi^2 + v_B^2] + eV.$$

bağıntısını verir. Eksenel kinetik enerji terimleri birbirini götürür.

$$W = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}},$$

tanımını yaparsak

$$u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 = W^2.$$

elde ederiz. Dolayısıyla anoda ulaşma koşulu

$$\left| av_\varphi + \frac{eB}{2m}(b^2 - a^2) \right| \leq bW.$$

şeklindedir. $B = 0$ iken $|av_\varphi| < bW$ 'dir. Pozitif alan artırıldıkça üst sınıra

$$av_\varphi + \frac{eB_c}{2m}(b^2 - a^2) = bW.$$

olduğunda ulaşılır. Buradan çözülürse,

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b\sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}} - av_\varphi \right].$$

Sonuçta v_B 'nin bulunmaması, eksenel hareketin silindir ekseninden uzaklığı değiştirmemesini ve enine hareketle enerji alışverişinde bulunmamasını yansıtır.

Anottaki koşulun daha önceki bir radyal dönüm noktasını gözden kaçırmadığını doğrulamak için

$$s = \ln(r/a), \quad \alpha = \frac{eBa}{2m}, \quad \beta = v_\varphi - \alpha.$$

tanımlarını yapalım. Açısal momentum ve enerji denklemleri

$$u_r^2(s) = v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m \ln(b/a)} s - (\alpha e^s + \beta e^{-s})^2.$$

sonucunu verir. Bunun ikinci türevi

$$\frac{d^2 u_r^2}{ds^2} = -4\alpha^2 e^{2s} - 4\beta^2 e^{-2s} \leq 0.$$

şeklindedir. Dolayısıyla u_r^2 , s 'nin bir fonksiyonu olarak konkavdır. Her iki silindirde de negatif değilse, boşluğun tamamında negatif değildir. Bu nedenle yukarıda kullanılan koşul gerçek kesim sınırını belirler.

$v_r = v_\varphi = 0$ alınırsa (e) kısmı yeniden elde edilir. $V = 0$, $v_\varphi = 0$ ve $v_r = v_0$ alınırsa (b) kısmı yeniden elde edilir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Dünya–Ay sisteminde açık okyanus gelgitleri

Bu soruda, Dünya üzerindeki açık okyanus gelgitlerinin büyüklüğüne ilişkin bazı genel özellikleri ele alıyoruz. Aşağıdaki varsayımları yaparak problemi basitleştiriyoruz:

- (i) Dünya ve Ay yalıtılmış bir sistem olarak kabul edilmektedir,
- (ii) Ay ile Dünya arasındaki uzaklığın sabit olduğu varsayılmaktadır,
- (iii) Dünya'nın bütünüyle bir okyanusla kaplı olduğu varsayılmaktadır,
- (iv) Dünya'nın kendi eksenini etrafındaki dönüşünün dinamik etkileri ihmal edilmektedir ve
- (v) Dünya'nın kütleçekim kuvveti, tüm kütlesi Dünya'nın merkezinde toplanmış gibi hesaplanabilmektedir.

Aşağıdaki veriler verilmiştir:

Dünya'nın kütlesi: $M = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Ay'ın kütlesi: $M_m = 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

Dünya'nın yarıçapı: $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$

Dünya'nın merkezi ile Ay'ın merkezi arasındaki uzaklık:

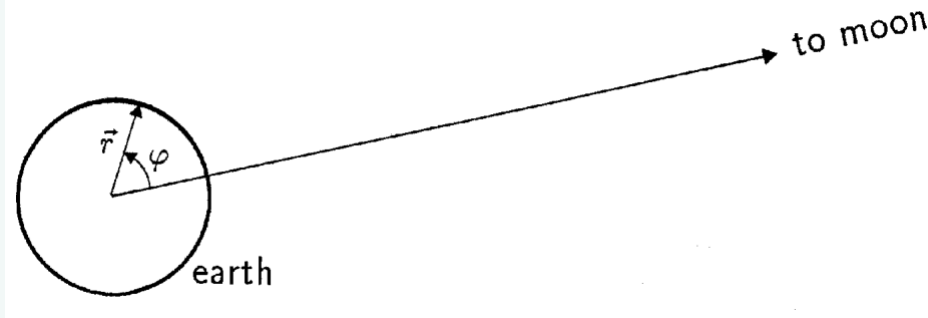
$L = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$

Kütleçekim sabiti: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

a) Ay ve Dünya, ortak kütle merkezleri C etrafında ω açısal hızıyla dönmektedir. C , Dünya'nın merkezinden ne kadar uzaktadır? (Bu uzaklığı l ile gösteriniz.)

ω 'nın sayısal değerini belirleyiniz. (2 puan)

Şimdi, Ay ve Dünya'nın merkeziyle birlikte C etrafında dönen bir referans sistemi kullanıyoruz. Bu referans sisteminde Dünya'nın sıvı yüzeyinin şekli zamanla değişmez.



C 'den geçen ve dönme eksenine dik olan P düzleminde, Dünya'nın sıvı yüzeyi üzerindeki bir noktasal kütle konumu, şekilde gösterildiği gibi r, φ kutupsal koordinatlarıyla tanımlanabilir. Burada r , Dünya'nın merkezinden olan uzaklıktır.

Dünya'nın sıvı yüzeyinin P düzlemindeki

$$r(\varphi) = R + h(\varphi)$$

şeklini inceleyeceğiz.

b) Dünya'nın sıvı yüzeyi üzerinde (P düzleminde) bir noktasal kütle (kütlesi m) ele alınız. Referans sistemimizde bu kütleye bir merkezkaç kuvveti ile Ay ve Dünya'nın kütleçekim kuvvetleri etki eder. Bu üç kuvvete karşılık gelen potansiyel enerji için bir ifade yazınız.

Not: Herhangi bir başlangıç noktasına göre radyal doğrultuda yönelmiş herhangi bir $F(r)$ kuvveti, küresel simetrik bir $V(r)$ potansiyel enerjisinin türevinin negatfidir:

$$F(r) = -V'(r). \text{ (3 puan)}$$

c) Gelgit kabarmasının yaklaşık $h(\varphi)$ biçimini, verilen M, M_m vb. nicelikler cinsinden bulunuz. Bu modelde yüksek su ile alçak su seviyeleri arasındaki fark kaç metredir?

a 'nın birden çok küçük olduğu durumlarda geçerli olan

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \theta}} \approx 1 + a \cos \theta + \frac{1}{2}a^2(3 \cos^2 \theta - 1),$$

yaklaşık ifadesini kullanabilirsiniz.

Bu analizde, makul olduğu her durumda basitleştirici yaklaşımlar yapınız. (5 puan)

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- a)** Kütle merkezi, Dünya'nın merkezinden Ay yönünde

$$l = \frac{M_m L}{M + M_m} \approx 4.6 \times 10^6 \text{ m}$$

uzaklıkta bulunur. Açısal hız

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M + M_m)}{L^3}} \approx 2.67 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

olarak bulunur.

- b)** Toplamsal bir sabit dışında,

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2}m\omega^2 (r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi).$$

- c) Başat mertebede gelgit şekli

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi,$$

olup, burada $h_{\min}$ sabiti referans deniz seviyesini belirler. Eşdeğer olarak, kesit boyunca ortalama yükseklik $\bar{h}_P$ 'ye göre,

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi \approx (0.27 \text{ m}) \cos 2\varphi.$$

Yüksek su seviyeleri $\varphi = 0, \pi$ konumlarında, alçak su seviyeleri ise $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ konumlarında oluşur. Aralarındaki yükseklik farkı

$$\Delta h = \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \approx 0.53 \text{ m}.$$

olarak bulunur.

Çözüm

a)

Kütle merkezi, Dünya ile Ay'ı birleştiren doğru üzerinde bulunur. Uzaklıkları kütle merkezinden ölçersek

$$Ml = M_m(L - l),$$

ve dolayısıyla

$$l = \frac{M_m}{M + M_m} L = \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22}} (3.84 \times 10^8) = 4.631 \dots \times 10^6 \text{ m}.$$

elde edilir. Böylece, $l < R$ olduğundan C Dünya'nın içinde yer alır.

Dünya, C etrafında l yarıçaplı bir çember üzerinde hareket eder. Ay ile arasındaki kütleçekim kuvveti, merkezci kuvveti sağlar:

$$M\omega^2 l = \frac{GM M_m}{L^2}.$$

l için bulunan ifadeyi yerine koyarsak,

$$\omega^2 = \frac{G(M + M_m)}{L^3}.$$

Sayısal olarak,

$$\omega = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22})}{(3.84 \times 10^8)^3}} = 2.67 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

Ayrıca şu kesin bağıntıyı da kullanacağız:

$$\omega^2 l = \frac{GM_m}{L^2}.$$

b)

Koordinat başlangıcını Dünya'nın merkezine yerleştirelim ve $\varphi = 0$ yönünü Ay'a doğru seçelim. Bu durumda Ay ve C , bu yönde sırasıyla L ve l uzaklıklarında bulunur.

Kosinüs teoremine göre, noktasal kütlelerin Ay'a uzaklığı

$$d = \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}.$$

Nokta, C 'den geçen dönme eksenine dik düzlemde bulunduğundan, bu eksene olan uzaklığı

$$s = \sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi}.$$

Kütleçekim potansiyel enerjileri

$$V_E = -\frac{GMm}{r}, \quad V_m = -\frac{GM_m m}{d}.$$

Merkezkaç kuvveti dönme ekseninden dışarı doğru yönelir ve büyüklüğü $m\omega^2 s$ 'dir. Dolayısıyla

$$-\frac{dV_{cf}}{ds} = m\omega^2 s \implies V_{cf} = -\frac{1}{2}m\omega^2 s^2.$$

Üç katkının toplamı şu ifadeyi verir:

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2}m\omega^2 (r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) + \text{sabit}.$$

c)

Durgun bir akışkan için hidrostatik denge koşulu

$$\nabla p = -\rho \nabla \Phi, \quad \Phi = \frac{V}{m}.$$

Serbest yüzey boyunca basınç sabittir; dolayısıyla bu yüzey, Φ 'nin bir eşpotansiyel yüzeyi olmalıdır.

$$\frac{R}{L} = 0.0166 \ll 1,$$

olduğundan, Ay'ın potansiyelini r/L 'nin ikinci mertebesine kadar açarız:

$$-\frac{GM_m}{d} \approx -\frac{GM_m}{L} - \frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

Birim kütle başına merkezkaç potansiyeli

$$-\frac{1}{2}\omega^2 (r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}\omega^2 l^2 + \omega^2 lr \cos \varphi.$$

a) kısmında bulunan bağıntıyı kullanarak,

$$-\frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi + \omega^2 lr \cos \varphi = 0.$$

Böylece Ay'ın kütleçekim alanının düzgün kısmı, karşılık gelen merkezkaç terimiyle birbirini götürür. Konumdan bağımsız terimler bir sabit içinde toplandıktan sonra,

$$\Phi(r, \varphi) \approx -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1) + \text{sabit}.$$

Şimdi $|h| \ll R$ olmak üzere $r = R + h(\varphi)$ yazalım. Dünya'nın potansiyeli

$$-\frac{GM}{R+h} \approx -\frac{GM}{R} + \frac{GM}{R^2}h = -\frac{GM}{R} + gh,$$

haline gelir; burada

$$g = \frac{GM}{R^2} = 9.83 \text{ m s}^{-2}.$$

Daha küçük olan merkezkaç ve Ay'a ait terimlerde $r = R$ alabiliriz. Örneğin, h 'nin katsayısındaki merkezkaç düzeltmesinin g 'ye oranı yalnızca

$$\frac{\omega^2 R}{g} = 4.62 \times 10^{-6}.$$

R 'de hesaplanan merkezkaç potansiyeli, P içinde φ 'den bağımsızdır; dolayısıyla yalnızca sabit yüzey seviyesine katkıda bulunur. Bu nedenle eşpotansiyel koşulu şu biçime indirgenir:

$$gh(\varphi) - \frac{GM_m R^2}{2L^3}(3 \cos^2 \varphi - 1) = \text{sabit}.$$

Sonuç olarak,

$$h(\varphi) = H + \frac{M_m R^4}{2ML^3}(3 \cos^2 \varphi - 1),$$

burada H , φ 'den bağımsızdır. Bu sabit, referans deniz seviyesi veya hacim normalizasyonu ile belirlenir; gelgitin açısal değişimi bu sabite bağlı değildir.

Sonucu minimum değerine göre yazarsak

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi.$$

Alternatif olarak, $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$ kullanılarak,

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi.$$

Dolayısıyla yüzeyin Dünya–Ay doğrusu boyunca iki eşit maksimumu vardır: biri Ay'a bakan tarafta, diğeri karşı taraftadır. İki minimumu ise P içinde bu doğruya dik yönde bulunur. İki kabarmanın eşitliği, R/L açılımında korunan mertebeye kadar geçerlidir.

Maksimum ile minimum arasındaki fark

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \\ &= \frac{3}{2} \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24}} \frac{(6.37 \times 10^6)^4}{(3.84 \times 10^8)^3} \text{ m} \\ &= 0.532447 \dots \text{ m}. \end{aligned}$$

Böylece

$$\Delta h \approx 0.53 \text{ m}.$$

P 'deki ortalamaya göre genlik bu değer yarısıdır ve yaklaşık 0.27 m'dir. Bu küçük şekil değişimi, h/R cinsinden doğrusal açılımın geçerliliğini doğrular.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.