

IPhO 1996

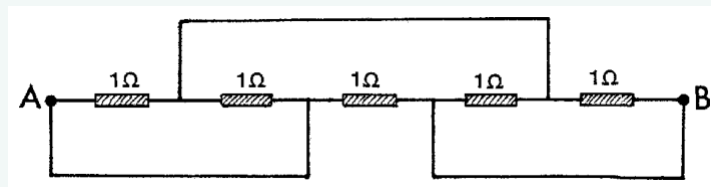
Теоретические задачи и решения · Осло, Норвегия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipro/1996/

Задача 1: Пять независимых коротких задач (цепь резисторов, лыжник на склоне, теплоёмкость металла, радиационный тепловой экран, магнитное поле между двумя проводниками)

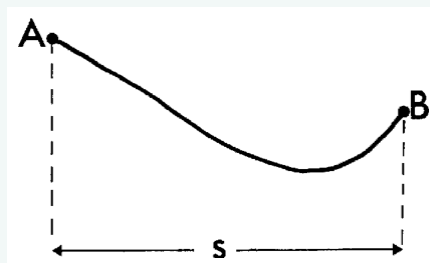
(Пять частей этой задачи не связаны между собой)

a) Пять резисторов сопротивлением 1Ω каждый соединены так, как показано на рисунке. Сопротивлением соединительных проводов (сплошные линии) можно пренебречь.



Определите эквивалентное сопротивление R между A и B. (1 балл)

b)



Лыжник начинает движение из состояния покоя в точке A и скользит вниз по склону, не поворачивая и не тормозя. Коэффициент трения равен μ . К моменту остановки в точке B его горизонтальное перемещение составляет s . Какова разность высот h между точками A и B?

(Скорость лыжника мала, поэтому дополнительным давлением на снег, обусловленным кривизной траектории, можно пренебречь. Пренебрегите также сопротивлением воздуха и зависимостью μ от скорости лыжника.) (1.5 балла)

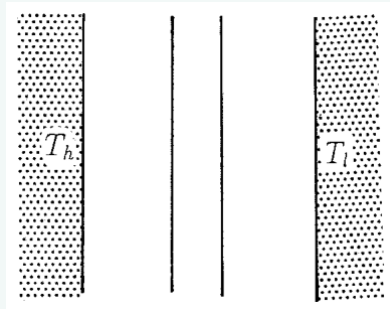
c) Теплоизолированный кусок металла нагревают при атмосферном давлении электрическим током, подводя к нему электрическую энергию с постоянной мощностью P . В результате абсолютная температура T металла возрастает со временем t по следующему закону:

$$T(t) = T_0[1 + a(t - t_0)]^{1/4}.$$

Здесь a , t_0 и T_0 — постоянные. Определите теплоёмкость $C_p(T)$ металла (зависящую от температуры в температурном диапазоне эксперимента). (2 балла)

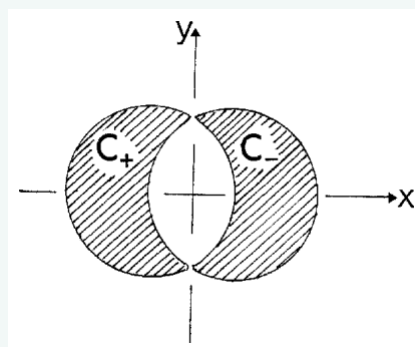
d) Плоская абсолютно чёрная поверхность с постоянной высокой температурой T_h параллельна другой плоской абсолютно чёрной поверхности с постоянной более низкой температурой T_l . Между пластинами — вакуум.

Для уменьшения теплового потока, передаваемого излучением, между горячей и холодной поверхностями параллельно им помещают тепловой экран, состоящий из двух тонких абсолютно чёрных пластин, теплоизолированных друг от друга. Через некоторое время устанавливается стационарный режим.



Во сколько раз ξ уменьшается стационарный тепловой поток благодаря наличию теплового экрана? Пренебрегите краевыми эффектами, связанными с конечными размерами поверхностей. (1.5 балла)

е) По двум прямым очень длинным немагнитным проводникам C_+ и C_- , изолированным друг от друга, течёт ток I соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси z . Поперечные сечения проводников (заштрихованные на рисунке) ограничены окружностями диаметра D в плоскости x - y , расстояние между центрами которых равно $D/2$. При этом площадь каждого из получающихся поперечных сечений равна $\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3}\right)D^2$. Ток в каждом проводнике равномерно распределён по поперечному сечению.



Определите магнитное поле $B(x, y)$ в пространстве между проводниками. (4 балла)

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **a)** $R = \frac{1}{2} \Omega = 0.5 \Omega$.
- **b)** $h = \mu s$, причём А расположена выше В.
- **c)** $C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4}$, в J K^{-1} при использовании единиц СИ.
- **d)** $\dot{Q}_{\text{shield}} = \frac{\dot{Q}_0}{3}$: уменьшение в три раза, $\xi = \frac{\dot{Q}_0}{\dot{Q}_{\text{shield}}} = 3$.
- **e)** Во всём линзообразном зазоре

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{6\mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3})D} \hat{\mathbf{y}}.$$

Поле однородно и направлено в положительном направлении оси y .

Решение

a)

Пусть сопротивление каждого резистора равно $r = 1 \Omega$; обозначим четыре внутренних узла слева направо через N_1, N_2, N_3, N_4 . Идеальные соединительные провода объединяют следующие узлы:

$$A = N_2, \quad N_1 = N_4 = X, \quad N_3 = B.$$

Следовательно, первый и второй резисторы соединяют А с Х и включены параллельно. Четвёртый и пятый соединяют Х с В и также включены параллельно:

$$R_{AX} = R_{XB} = \frac{r}{2}.$$

Эти два эквивалентных сопротивления образуют последовательную ветвь от А до В с сопротивлением $r/2 + r/2 = r$. Третий резистор соединяет А непосредственно с В, образуя ещё одну ветвь с сопротивлением r . Таким образом,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}, \quad R = \frac{r}{2} = 0.5 \Omega.$$

b)

Пусть θ — локальный угол наклона траектории лыжника к горизонтали, а $d\ell$ — элемент длины пути. Пренебрегая, согласно условию, дополнительной нормальной силой, обусловленной кривизной траектории, получаем

$$N = mg \cos \theta.$$

Сила трения имеет модуль μN и направлена против движения. Поэтому энергия, рассеиваемая на всём пути, равна

$$E_{\text{fr}} = \int_A^B \mu mg \cos \theta d\ell.$$

Для изображённой траектории горизонтальная координата возрастает на протяжении всего движения, причём

$$dx = \cos \theta d\ell.$$

Отсюда следует, что

$$E_{\text{fr}} = \mu mg \int_A^B dx = \mu mgs.$$

В начале и в конце движения лыжник находится в покое, поэтому уменьшение потенциальной энергии тяжести равно энергии, рассеянной вследствие трения. Обозначая $h = y_A - y_B$, получаем

$$mgh = \mu mgs, \quad \boxed{h = \mu s.}$$

В рамках указанного приближения результат зависит только от горизонтального перемещения.

с)

Металл теплоизолирован, однако работа электрического тока обеспечивает подвод энергии с мощностью P . При постоянном атмосферном давлении p первый закон термодинамики даёт

$$dU = P dt - p dV.$$

Поскольку энтальпия равна $H = U + pV$, а $dp = 0$,

$$dH = P dt.$$

Используя полную теплоёмкость куска металла при постоянном давлении,

$$C_p(T) = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p,$$

получаем

$$P = C_p(T) \frac{dT}{dt}.$$

Возведём заданный закон изменения температуры в четвёртую степень:

$$T^4 = T_0^4 [1 + a(t - t_0)].$$

Дифференцируя, получаем

$$4T^3 \frac{dT}{dt} = aT_0^4.$$

Следовательно,

$$\boxed{C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4} = \frac{4P}{aT_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3.}$$

Таким образом, в температурном диапазоне эксперимента теплоёмкость пропорциональна T^3 . Поскольку a имеет единицы s^{-1} , единицы полученного выражения — J K^{-1} .

d)

Для двух параллельных абсолютно чёрных поверхностей при пренебрежимо малых краевых эффектах закон Стефана–Больцмана даёт результирующую плотность теплового потока излучения

$$q_0 = \sigma (T_h^4 - T_l^4)$$

до установки экрана.

Пусть T_1 и T_2 — температуры тонких пластин экрана, пронумерованных от горячей стороны к холодной. Обе стороны каждой тонкой пластины имеют одинаковую температуру. В стационарном состоянии ни одна из пластин не накапливает энергию, поэтому результирующая плотность теплового потока q одинакова во всех трёх вакуумных промежутках:

$$q = \sigma(T_h^4 - T_1^4) = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = \sigma(T_2^4 - T_l^4).$$

Складывая три разности четвёртых степеней температур, получаем

$$3q = \sigma(T_h^4 - T_l^4) = q_0.$$

То же отношение справедливо для полного теплового потока:

$$\frac{\dot{Q}_{\text{shield}}}{\dot{Q}_0} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, тепловой поток уменьшается в число раз, равное

$$\xi = 3.$$

e)

Обозначим площадь поперечного сечения каждого из реальных проводников через

$$A_c = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) D^2.$$

Модуль однородной плотности тока равен

$$J = \frac{I}{A_c}.$$

Радиус окружностей равен $D/2$. При указанном на рисунке начале координат их центры находятся в точках

$$\mathbf{r}_+ = -\frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{r}_- = \frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}.$$

Воспользуемся принципом суперпозиции и представим реальное распределение тока в виде двух полных круговых цилиндров:

- левого цилиндра с однородной плотностью тока $+J\hat{\mathbf{z}}$;
- правого цилиндра с однородной плотностью тока $-J\hat{\mathbf{z}}$.

В области их перекрытия две плотности тока взаимно компенсируются. В каждой серповидной области оставшаяся плотность тока в точности совпадает с плотностью тока в реальном проводнике. Таким образом, это построение воспроизводит физическое распределение тока.

Для очень длинного кругового цилиндра с однородной плотностью тока $J\hat{\mathbf{z}}$ цилиндрическая симметрия и закон полного тока дают на расстоянии ρ от оси внутри цилиндра

$$B(\rho) 2\pi\rho = \mu_0 J \pi \rho^2, \quad B(\rho) = \frac{\mu_0 J \rho}{2}.$$

В векторной форме для цилиндра с центром поперечного сечения в точке $\mathbf{r}_c$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{2} \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c).$$

Каждая точка линзообразного зазора находится внутри обоих воображаемых цилиндров. Их поля в этой области равны

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_+(x, y) &= \frac{\mu_0 J}{2} \left[-y \hat{\mathbf{x}} + \left(x + \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right], \\ \mathbf{B}_-(x, y) &= \frac{\mu_0 J}{2} \left[y \hat{\mathbf{x}} - \left(x - \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right].\end{aligned}$$

При сложении все слагаемые, зависящие от координат, взаимно уничтожаются:

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 J D}{4} \hat{\mathbf{y}}.$$

Подставляя $J = I/A_c$, получаем

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 I D}{4 A_c} \hat{\mathbf{y}} = \frac{6 \mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3}) D} \hat{\mathbf{y}}.$$

Это однородное поле существует во всём зазоре, определяемом одновременным выполнением неравенств

$$\left(x + \frac{D}{4} \right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}, \quad \left(x - \frac{D}{4} \right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}.$$

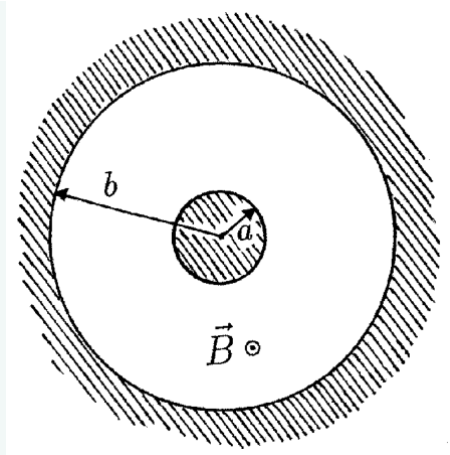
На рисунке оно направлено вверх, что согласуется с правилом правой руки для обоих токов.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Электроны между коаксиальными цилиндрами в магнитном поле (магнитное задержание)

Пространство между двумя коаксиальными цилиндрическими проводниками вакуумировано. Радиус внутреннего цилиндра равен a , а внутренний радиус внешнего цилиндра равен b , как показано на рисунке ниже. Внешнему цилиндру, называемому анодом, можно сообщить положительный потенциал V относительно внутреннего цилиндра. Имеется также постоянное однородное магнитное поле $\vec{B}$, параллельное оси цилиндров и направленное из плоскости рисунка к наблюдателю. Индуцированными зарядами в проводниках пренебрегают.

Рассмотрим динамику электронов с массой покоя m и зарядом $-e$. Электроны испускаются с поверхности внутреннего цилиндра.



a) Сначала прикладывают напряжение V , но $\vec{B} = 0$. Электрон вылетает с поверхности внутреннего цилиндра с пренебрежимо малой скоростью. Определите его скорость v при попадании на анод. Дайте ответ как для случая, когда достаточно нерелятивистского рассмотрения, так и для случая, когда оно неприменимо. (1 балл)

В остальных пунктах этой задачи достаточно нерелятивистского рассмотрения.

b) Теперь $V = 0$, но имеется однородное магнитное поле $\vec{B}$. Электрон начинает движение с начальной скоростью $\vec{v}_0$, направленной по радиусу. При магнитных полях, превышающих критическое значение B_c , электрон не достигает анода. Изобразите схематически траекторию электрона, когда B немного больше B_c . Определите B_c . (2 балла)

Далее одновременно приложено напряжение V и имеется однородное магнитное поле $\vec{B}$.

c) Под действием магнитного поля электрон приобретает ненулевой момент импульса L относительно оси цилиндров. Запишите уравнение для скорости изменения dL/dt момента импульса. Покажите, что из этого уравнения следует, что величина

$$L - keBr^2$$

остаётся постоянной в ходе движения, где k — определённое безразмерное число. Здесь r — расстояние от оси цилиндров. Определите значение k . (3 балла)

d) Рассмотрим электрон, вылетевший с поверхности внутреннего цилиндра с пренебрежимо малой скоростью, который не достигает анода, а удаляется от оси цилиндров на максимальное расстояние r_m . Определите скорость v в точке максимального удаления от оси, выразив её через r_m . (1 балл)

e) Мы хотим использовать магнитное поле для регулирования электронного тока на анод. При B , превышающем критическое магнитное поле B_c , электрон, вылетевший с пренебрежимо малой скоростью, не достигает анода. Определите B_c . (1 балл)

f) Если электроны испускаются вследствие нагревания внутреннего цилиндра, то электрон на его поверхности в общем случае имеет ненулевую начальную скорость. Компонента начальной скорости, параллельная $\vec{B}$, равна v_B , а компоненты, перпендикулярные $\vec{B}$, равны v_r (в радиальном направлении) и v_φ (в азимутальном направлении, то есть перпендикулярно радиальному направлению).

Определите для этого случая критическое магнитное поле B_c , при котором электрон достигает анода. (2 балла)

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Здесь B — модуль магнитного поля, c — скорость света, а положительная азимутальная скорость соответствует движению против часовой стрелки на рисунке. Таким образом, v_φ в пункте (f) — величина со знаком.

- а) При $eV \ll mc^2$,

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

В релятивистском случае

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

- б)

$$B_c = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

Траектория представляет собой дугу окружности радиуса $R = mv_0/(eB)$, по которой электрон движется против часовой стрелки. При B , лишь немного превышающем B_c , максимальное расстояние от электрона до оси цилиндров чуть меньше b , и электрон возвращается на внутренний цилиндр.

- в)

$$\frac{dL}{dt} = eBr\dot{r}, \quad L - \frac{eB}{2}r^2 = \text{постоянная}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

- д)

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

Эквивалентное выражение:

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

- е)

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

- f) Для электрона, испущенного в зазор,

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}} - av_\varphi \right].$$

Эта величина не зависит от v_B .

Решение

Направим положительную ось z вдоль $\vec{B}$, из плоскости рисунка к наблюдателю. Тогда положительное азимутальное направление соответствует движению против часовой стрелки. Обозначим через L проекцию механического момента импульса электрона на ось z , учитываемую со знаком. После пункта (а) будем использовать нерелятивистскую механику, как указано в условии.

а)

При переходе от внутреннего цилиндра к аноду электрический потенциал возрастает на V . Поскольку заряд электрона равен $-e$, его потенциальная энергия уменьшается на eV . Поэтому закон сохранения энергии даёт

$$K_{\text{final}} = eV.$$

Когда эта энергия мала по сравнению с энергией покоя, $eV \ll mc^2$,

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV,$$

так что

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

При релятивистском рассмотрении

$$(\gamma - 1)mc^2 = eV, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Следовательно,

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{mc^2},$$

и

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

Разложение этого выражения при $eV/(mc^2) \ll 1$ приводит к нерелятивистскому результату.

б)

Магнитная сила перпендикулярна скорости и потому не совершает работы. Модуль скорости электрона остаётся равным v_0 , а его движение в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю, происходит по окружности. Радиус орбиты R определяется из уравнения

$$\frac{mv_0^2}{R} = ev_0 B,$$

откуда

$$R = \frac{mv_0}{eB}.$$

Выберем точку вылета $P = (a, 0)$, а начальную скорость направим вдоль положительной оси x . Поскольку

$$\vec{F} = -e \vec{v} \times \vec{B},$$

начальная сила направлена вдоль положительной оси y . Поэтому центр окружности находится в точке

$$C = (a, R)$$

и её уравнение имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

Расстояние от оси цилиндров O до центра орбиты равно

$$OC = \sqrt{a^2 + R^2}.$$

Следовательно, максимальное достигаемое расстояние от оси равно

$$r_{\max} = \sqrt{a^2 + R^2} + R.$$

При критическом поле этот максимум равен b :

$$\sqrt{a^2 + R_c^2} + R_c = b.$$

После переноса слагаемого и возведения в квадрат получаем

$$a^2 + R_c^2 = (b - R_c)^2, \quad R_c = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Отсюда

$$B_c = \frac{mv_0}{eR_c} = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

Чтобы построить требуемый схематический рисунок, изобразим две концентрические границы цилиндров и поместим электрон на внутренней границе справа от центра, на горизонтальном радиусе. Начальная касательная к траектории направлена радиально наружу, а траектория изгибается вверх, следуя против часовой стрелки по окружности с центром $C = (a, R)$. Её наиболее удалённая от O точка лежит на луче OC . Когда B немного больше B_c , эта точка находится чуть ближе к оси, чем анод. Затем электрон движется внутрь и снова попадает на внутренний цилиндр. Полярный угол точки возвращения равен

$$\varphi_{\text{return}} = 2 \arctan(R/a).$$

с)

Электрическая сила направлена радиально и поэтому не создаёт момента сил относительно оси цилиндров.

Записывая скорость в виде

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r\dot{\varphi} \hat{\varphi} + v_z \hat{z},$$

получаем магнитную силу

$$-e \vec{v} \times \vec{B} = -eBr\dot{\varphi} \hat{r} + eB\dot{r} \hat{\varphi}.$$

Её азимутальная компонента равна $F_\varphi = eB\dot{r}$. Поэтому

$$\frac{dL}{dt} = rF_\varphi = eBr\dot{r}.$$

Поскольку B постоянно,

$$eBr\dot{r} = \frac{eB}{2} \frac{d(r^2)}{dt}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} \left(L - \frac{eB}{2} r^2 \right) = 0,$$

так что

$$L - \frac{eB}{2} r^2 = \text{постоянная}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

В частности, для точки вылета при $r = a$ и любого последующего положения имеем

$$L(r) = L(a) + \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

d)

Электрон начинает движение с пренебрежимо малой скоростью, поэтому $L(a) = 0$.

Следовательно,

$$L(r) = \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

Ни одно из полей не создаёт силы вдоль оси, поэтому первоначально равная нулю осевая скорость остаётся нулевой. При максимальном удалении от оси r_m радиальная скорость также обращается в нуль. Таким образом, скорость в этой точке направлена исключительно по азимуту, откуда

$$L(r_m) = mr_mv.$$

Следовательно,

$$mr_mv = \frac{eB}{2} (r_m^2 - a^2),$$

и

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

Эквивалентное выражение следует из закона сохранения энергии. В цилиндрическом зазоре, где отсутствует объёмный заряд, теорема Гаусса даёт $rE_r = \text{постоянная}$. Если потенциал внутреннего цилиндра равен нулю, а потенциал анода равен V , то потенциал в зазоре имеет вид

$$\Phi(r) = V \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

Поскольку магнитное поле не совершает работы,

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Phi(r_m),$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

При фактическом радиусе точки поворота r_m эти два выражения должны совпадать.

e)

При критическом поле максимальное расстояние от электрона до оси в точности равно b . Он достигает анода по касательной, с нулевой радиальной скоростью.

Закон сохранения энергии определяет его скорость в этой точке:

$$v_b = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Используя пункт (d) при $r_m = b$, получаем

$$v_b = \frac{eB_c(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

Поэтому

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

При $B > B_c$ азимутальная кинетическая энергия, требуемая при $r = b$ законом сохранения для момента импульса, превышает полную кинетическую энергию, доступную в этой точке.

Электрон не может достичь анода.

f)

Пусть начальная радиальная компонента направлена в зазор, так что $v_r \geq 0$. Обозначим радиальную и азимутальную компоненты скорости в последующий момент через u_r и u_φ .

Сила вдоль оси отсутствует, поэтому

$$u_z = v_B$$

на протяжении всего движения. Начальный момент импульса равен

$$L(a) = mav_\varphi.$$

Закон сохранения из пункта (c) даёт

$$mru_\varphi = mav_\varphi + \frac{eB}{2}(r^2 - a^2).$$

На аноде

$$u_\varphi(b) = \frac{a}{b}v_\varphi + \frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

Закон сохранения энергии при движении между двумя цилиндрами даёт

$$\frac{1}{2}m [u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 + v_B^2] = \frac{1}{2}m [v_r^2 + v_\varphi^2 + v_B^2] + eV.$$

Кинетические энергии осевого движения сокращаются. Вводя обозначение

$$W = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}},$$

получаем

$$u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 = W^2.$$

Таким образом, условие достижения анода имеет вид

$$\left| av_\varphi + \frac{eB}{2m}(b^2 - a^2) \right| \leq bW.$$

При $B = 0$ имеем $|av_\varphi| < bW$. При увеличении положительного поля верхняя граница достигается, когда

$$av_\varphi + \frac{eB_c}{2m}(b^2 - a^2) = bW.$$

Решая это уравнение, получаем

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}} - av_\varphi \right].$$

Отсутствие v_B отражает тот факт, что осевое движение не изменяет расстояние до оси цилиндров и не обменивается энергией с поперечным движением.

Чтобы убедиться, что условие на аноде не упускает возможную более раннюю точку поворота радиального движения, положим

$$s = \ln(r/a), \quad \alpha = \frac{eBa}{2m}, \quad \beta = v_\varphi - \alpha.$$

Уравнения для момента импульса и энергии дают

$$u_r^2(s) = v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m \ln(b/a)} s - (\alpha e^s + \beta e^{-s})^2.$$

Вторая производная этой функции равна

$$\frac{d^2 u_r^2}{ds^2} = -4\alpha^2 e^{2s} - 4\beta^2 e^{-2s} \leq 0.$$

Таким образом, u_r^2 — вогнутая функция переменной s . Если она неотрицательна на обоих цилиндрах, то она неотрицательна во всём зазоре. Следовательно, использованное выше условие определяет действительный порог магнитного запираения.

Полагая $v_r = v_\varphi = 0$, получаем результат пункта (е). Полагая $V = 0$, $v_\varphi = 0$ и $v_r = v_0$, получаем результат пункта (b).

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Приливы в открытом океане в системе Земля–Луна

В этой задаче мы рассмотрим некоторые общие особенности величины приливов в открытом океане на Земле. Упростим задачу, приняв следующие допущения:

- (i) Земля и Луна рассматриваются как изолированная система,
- (ii) расстояние между Луной и Землёй считается постоянным,
- (iii) предполагается, что Земля полностью покрыта океаном,
- (iv) динамическими эффектами вращения Земли вокруг своей оси пренебрегаем, и
- (v) гравитационное притяжение Земли можно определять так, как если бы вся её масса была сосредоточена в центре Земли.

Даны следующие величины:

Масса Земли: $M = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Масса Луны: $M_m = 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

Радиус Земли: $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$

Расстояние между центром Земли и центром Луны:

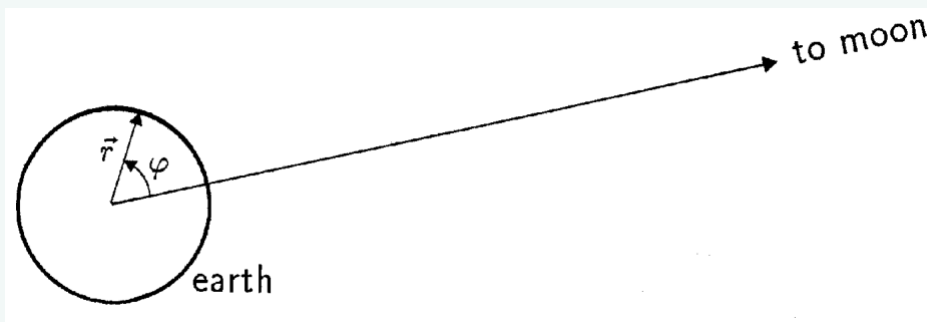
$$L = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Гравитационная постоянная: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

a) Луна и Земля вращаются с угловой скоростью ω вокруг своего общего центра масс C . На каком расстоянии от центра Земли находится C ? (Обозначьте это расстояние через l .)

Определите численное значение ω . (2 балла)

Теперь воспользуемся системой отсчёта, вращающейся вместе с Луной и центром Земли вокруг C . В этой системе отсчёта форма жидкой поверхности Земли не меняется со временем.



В плоскости P , проходящей через C перпендикулярно оси вращения, положение материальной точки на жидкой поверхности Земли можно описать полярными координатами r, φ , как показано на рисунке. Здесь r — расстояние от центра Земли.

Мы будем исследовать форму

$$r(\varphi) = R + h(\varphi)$$

жидкой поверхности Земли в плоскости P .

b) Рассмотрим материальную точку (массой m) на жидкой поверхности Земли (в плоскости P). В нашей системе отсчёта на неё действуют центробежная сила и силы гравитационного притяжения со стороны Луны и Земли. Запишите выражение для потенциальной энергии,

соответствующей этим трём силам.

Примечание: Любая сила $F(r)$, направленная радиально относительно некоторого начала координат, равна взятой с обратным знаком производной сферически симметричной потенциальной энергии $V(r)$:

$$F(r) = -V'(r). \text{ (3 балла)}$$

с) Найдите приближённую форму $h(\varphi)$ приливного горба через заданные величины M, M_m и т. д. Какова в этой модели разность уровней воды при приливе и отливе в метрах?

Можно воспользоваться приближённым выражением

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \theta}} \approx 1 + a \cos \theta + \frac{1}{2}a^2(3 \cos^2 \theta - 1),$$

справедливым при a , значительно меньшем единицы.

При анализе используйте упрощающие приближения везде, где они обоснованы. (5 баллов)

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- a)** Центр масс расположен в направлении Луны на расстоянии

$$l = \frac{M_m L}{M + M_m} \approx 4.6 \times 10^6 \text{ m}$$

от центра Земли. Угловая скорость равна

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M + M_m)}{L^3}} \approx 2.67 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

- b)** С точностью до аддитивной постоянной

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2}m\omega^2 (r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi).$$

- **с)** В главном приближении форма приливного горба имеет вид

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi,$$

где постоянная $h_{\min}$ задаёт исходный уровень моря. Эквивалентная запись относительно средней высоты $\bar{h}_P$ по контуру сечения:

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi \approx (0.27 \text{ м}) \cos 2\varphi.$$

Приливы наблюдаются при $\varphi = 0, \pi$, а отливы — при $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$. Разность их уровней равна

$$\Delta h = \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \approx 0.53 \text{ м}.$$

Решение

а)

Центр масс лежит на прямой, соединяющей Землю и Луну. Отсчитывая расстояния от него, получаем

$$Ml = M_m(L - l),$$

и, следовательно,

$$l = \frac{M_m}{M + M_m} L = \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22}} (3.84 \times 10^8) = 4.631 \dots \times 10^6 \text{ м}.$$

Таким образом, C находится внутри Земли, поскольку $l < R$.

Земля движется по окружности радиуса l вокруг C . Сила гравитационного притяжения к Луне служит центростремительной силой:

$$M\omega^2 l = \frac{GM M_m}{L^2}.$$

Подставляя выражение для l , получаем

$$\omega^2 = \frac{G(M + M_m)}{L^3}.$$

Численно

$$\omega = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22})}{(3.84 \times 10^8)^3}} = 2.67 \times 10^{-6} \text{ рад с}^{-1}.$$

Нам также понадобится точное соотношение

$$\omega^2 l = \frac{GM_m}{L^2}.$$

b)

Поместим начало координат в центр Земли и выберем направление $\varphi = 0$ в сторону Луны. Тогда Луна и C находятся на расстояниях L и l в этом направлении.

По теореме косинусов расстояние от материальной точки до Луны равно

$$d = \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}.$$

Поскольку точка лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, проходящей через C , её расстояние до этой оси равно

$$s = \sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi}.$$

Потенциальные энергии гравитационного взаимодействия равны

$$V_E = -\frac{GMm}{r}, \quad V_m = -\frac{GM_m m}{d}.$$

Центробежная сила направлена от оси вращения и имеет величину $m\omega^2 s$. Поэтому

$$-\frac{dV_{cf}}{ds} = m\omega^2 s \implies V_{cf} = -\frac{1}{2}m\omega^2 s^2.$$

Складывая три вклада, получаем

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2}m\omega^2(r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) + \text{постоянная}.$$

c)

Для покоящейся жидкости условие гидростатического равновесия имеет вид

$$\nabla p = -\rho \nabla \Phi, \quad \Phi = \frac{V}{m}.$$

Давление вдоль свободной поверхности постоянно, поэтому эта поверхность должна быть эквипотенциальной поверхностью потенциала Φ .

Поскольку

$$\frac{R}{L} = 0.0166 \ll 1,$$

разложим потенциал Луны до второго порядка по r/L :

$$-\frac{GM_m}{d} \approx -\frac{GM_m}{L} - \frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

Центробежная потенциальная энергия на единицу массы равна

$$-\frac{1}{2}\omega^2(r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}\omega^2 l^2 + \omega^2 lr \cos \varphi.$$

Используя соотношение, найденное в пункте **a)**, получаем

$$-\frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi + \omega^2 lr \cos \varphi = 0.$$

Таким образом, однородная составляющая гравитационного поля Луны компенсируется соответствующим центробежным членом. Включая не зависящие от положения члены в постоянную, получаем

$$\Phi(r, \varphi) \approx -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{GM_m r^2}{2L^3}(3\cos^2 \varphi - 1) + \text{постоянная}.$$

Теперь положим $r = R + h(\varphi)$, где $|h| \ll R$. Потенциал Земли принимает вид

$$-\frac{GM}{R+h} \approx -\frac{GM}{R} + \frac{GM}{R^2}h = -\frac{GM}{R} + gh,$$

где

$$g = \frac{GM}{R^2} = 9.83 \text{ м с}^{-2}.$$

В меньших по величине центробежном и лунном членах можно положить $r = R$. Например, отношение центробежной поправки к коэффициенту при h к величине g составляет всего

$$\frac{\omega^2 R}{g} = 4.62 \times 10^{-6}.$$

Центробежный потенциал, вычисленный при R , не зависит от φ в плоскости P , поэтому он даёт вклад только в постоянный уровень поверхности. Таким образом, условие эквипотенциальности сводится к

$$gh(\varphi) - \frac{GM_m R^2}{2L^3}(3\cos^2 \varphi - 1) = \text{постоянная}.$$

Следовательно,

$$h(\varphi) = H + \frac{M_m R^4}{2ML^3}(3\cos^2 \varphi - 1),$$

где H не зависит от φ . Эта постоянная определяется выбором исходного уровня моря или условием нормировки объёма; угловая зависимость приливного изменения уровня от неё не зависит.

Записывая результат относительно минимального уровня, получаем

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi.$$

Другой вариант записи получается с использованием $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$:

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi.$$

Таким образом, поверхность имеет два одинаковых максимума вдоль линии Земля–Луна: один обращён к Луне, а другой расположен на противоположной стороне. Два минимума находятся на перпендикуляре к этой линии в плоскости P . Равенство двух приливных горбов справедливо в пределах сохраняемого порядка по R/L .

Разность между максимальным и минимальным уровнями равна

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \\ &= \frac{3}{2} \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24}} \frac{(6.37 \times 10^6)^4}{(3.84 \times 10^8)^3} \text{ м} \\ &= 0.532447 \dots \text{ м}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta h \approx 0.53 \text{ m.}$$

Амплитуда относительно среднего уровня в P равна половине этой величины, приблизительно 0.27 m . Эта малая деформация подтверждает применимость линейного разложения по h/R .

Решение проверено по официальному решению.