

IPhO 1996

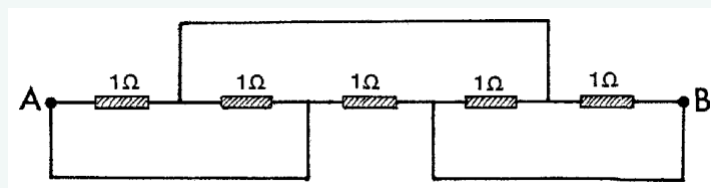
Problemas teóricos y soluciones · Oslo, Noruega · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1996/

Problema 1: Cinco problemas breves independientes (red de resistencias, esquiador en una colina, capacidad calorífica de un metal, pantalla térmica contra la radiación, campo magnético entre dos conductores)

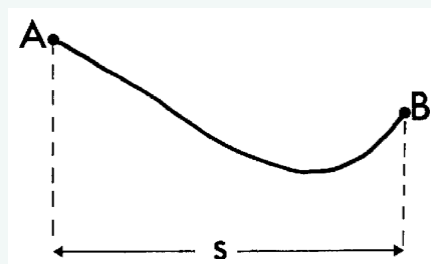
(Las cinco partes de este problema son independientes)

a) Se conectan cinco resistencias de 1Ω como se muestra en la figura. La resistencia de los cables conductores (líneas continuas) es despreciable.



Determine la resistencia equivalente R entre A y B. (1 punto)

b)



Un esquiador parte del reposo en el punto A y se desliza colina abajo, sin girar ni frenar. El coeficiente de rozamiento es μ . Cuando se detiene en el punto B, su desplazamiento horizontal es s . ¿Cuál es la diferencia de altura h entre los puntos A y B?

(La velocidad del esquiador es pequeña, de modo que puede despreciarse la presión adicional sobre la nieve debida a la curvatura. Desprecie también la resistencia del aire y la dependencia de μ respecto de la velocidad del esquiador.) (1.5 puntos)

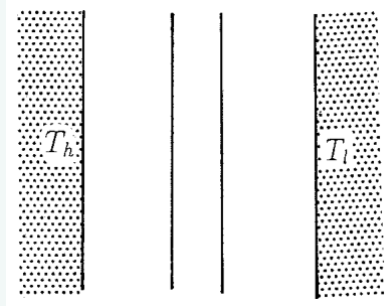
c) Una pieza de metal térmicamente aislada se calienta a presión atmosférica mediante una corriente eléctrica, de modo que recibe energía eléctrica a una potencia constante P . Esto provoca un aumento de la temperatura absoluta T del metal con el tiempo t de la siguiente forma:

$$T(t) = T_0[1 + a(t - t_0)]^{1/4}.$$

Aquí a , t_0 y T_0 son constantes. Determine la capacidad calorífica $C_p(T)$ del metal (dependiente de la temperatura en el intervalo de temperaturas del experimento). (2 puntos)

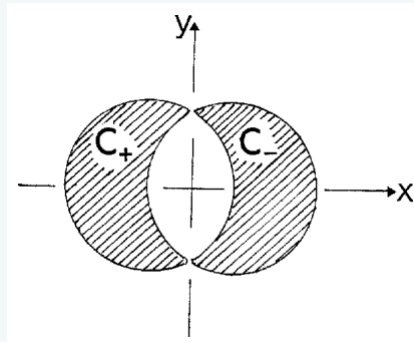
d) Una superficie plana negra a una temperatura alta constante T_h es paralela a otra superficie plana negra a una temperatura inferior constante T_l . Entre las placas hay vacío.

Para reducir el flujo de calor por radiación, se coloca entre las superficies caliente y fría, y paralelamente a ellas, una pantalla térmica formada por dos placas negras delgadas, térmicamente aisladas entre sí. Transcurrido cierto tiempo, se alcanza un estado estacionario.



¿Por qué factor ξ se reduce el flujo de calor estacionario debido a la presencia de la pantalla térmica? Desprecie los efectos de borde debidos al tamaño finito de las superficies. (1.5 puntos)

e) Dos conductores rectos, muy largos y no magnéticos, C_+ y C_- , aislados entre sí, transportan una corriente I en los sentidos positivo y negativo del eje z , respectivamente. Las secciones transversales de los conductores (rayadas en la figura) están delimitadas por circunferencias de diámetro D en el plano x - y , con una distancia $D/2$ entre sus centros. Así, cada una de las secciones transversales resultantes tiene un área $\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3}\right)D^2$. La corriente en cada conductor está distribuida uniformemente por la sección transversal.



Determine el campo magnético $B(x, y)$ en el espacio entre los conductores. (4 puntos)

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- a)** $R = \frac{1}{2} \Omega = 0.5 \Omega$.
- b)** $h = \mu s$, con A más alto que B.
- c)** $C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4}$, en $J K^{-1}$ cuando se utilizan unidades del SI.

- d) $\dot{Q}_{\text{shield}} = \frac{\dot{Q}_0}{3}$: una reducción por un factor de tres, $\xi = \frac{\dot{Q}_0}{\dot{Q}_{\text{shield}}} = 3$.

- e) En todo el hueco en forma de lente,

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{6\mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3})D} \hat{\mathbf{y}}.$$

El campo es uniforme y apunta en el sentido positivo del eje y .

Solución

a)

Sea cada resistencia $r = 1 \Omega$, y designemos las cuatro uniones interiores como N_1, N_2, N_3, N_4 , de izquierda a derecha. Los cables de conexión ideales hacen que los siguientes puntos correspondan a los mismos nodos:

$$A = N_2, \quad N_1 = N_4 = X, \quad N_3 = B.$$

Por consiguiente, la primera y la segunda resistencia conectan ambas A con X y están en paralelo. La cuarta y la quinta conectan ambas X con B y también están en paralelo:

$$R_{AX} = R_{XB} = \frac{r}{2}.$$

Estas dos resistencias equivalentes forman una rama en serie de A a B, de resistencia $r/2 + r/2 = r$. La tercera resistencia conecta A directamente con B, proporcionando otra rama de resistencia r . Por tanto,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}, \quad \boxed{R = \frac{r}{2} = 0.5 \Omega.}$$

b)

Sea θ el ángulo local de la trayectoria del esquiador con la horizontal y $d\ell$ un elemento de longitud de la trayectoria. Al despreciar la fuerza normal adicional debida a la curvatura, como se indica, se obtiene

$$N = mg \cos \theta.$$

La fuerza de rozamiento tiene módulo μN y se opone al movimiento. Por tanto, la energía disipada a lo largo de la trayectoria es

$$E_{\text{fr}} = \int_A^B \mu mg \cos \theta d\ell.$$

Para la trayectoria mostrada, la coordenada horizontal aumenta durante todo el movimiento, y

$$dx = \cos \theta d\ell.$$

De ello se deduce que

$$E_{\text{fr}} = \mu mg \int_A^B dx = \mu mgs.$$

El esquiador comienza y termina en reposo, por lo que la pérdida de energía potencial gravitatoria es igual a la energía disipada por rozamiento. Escribiendo $h = y_A - y_B$,

$$mgh = \mu mgs, \quad \boxed{h = \mu s.}$$

Dentro de la aproximación indicada, el resultado depende únicamente del desplazamiento horizontal.

c)

El metal está térmicamente aislado, pero el trabajo eléctrico suministra energía a un ritmo P . A presión atmosférica constante p , el primer principio de la termodinámica da

$$dU = P dt - p dV.$$

Puesto que la entalpía es $H = U + pV$, y $dp = 0$,

$$dH = P dt.$$

Utilizando la capacidad calorífica total de la pieza a presión constante,

$$C_p(T) = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p,$$

obtenemos

$$P = C_p(T) \frac{dT}{dt}.$$

Elevamos a la cuarta potencia la ley de temperatura dada:

$$T^4 = T_0^4 [1 + a(t - t_0)].$$

Derivando,

$$4T^3 \frac{dT}{dt} = aT_0^4.$$

Por tanto,

$$C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4} = \frac{4P}{aT_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3.$$

Así pues, la capacidad calorífica es proporcional a T^3 en el intervalo de temperaturas del experimento. Puesto que a tiene unidades de s^{-1} , la expresión tiene unidades de $J K^{-1}$.

d)

Para dos superficies negras paralelas con efectos de borde despreciables, la ley de Stefan–Boltzmann da la densidad de flujo de calor neto por radiación

$$q_0 = \sigma (T_h^4 - T_l^4)$$

antes de insertar la pantalla.

Sean T_1 y T_2 las temperaturas de las placas delgadas de la pantalla, ordenadas desde el lado caliente hacia el lado frío. Cada placa delgada tiene la misma temperatura en sus dos caras. En el estado estacionario, ninguna placa acumula energía, por lo que la densidad de flujo de calor neto q es la misma a través de los tres espacios de vacío:

$$q = \sigma(T_h^4 - T_1^4) = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = \sigma(T_2^4 - T_l^4).$$

Al sumar las tres diferencias de temperatura se obtiene

$$3q = \sigma(T_h^4 - T_l^4) = q_0.$$

La misma razón se aplica al flujo total de calor:

$$\frac{\dot{Q}_{\text{shield}}}{\dot{Q}_0} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, el flujo de calor se reduce por un factor

$$\xi = 3.$$

e)

Sea el área de la sección transversal de cualquiera de los conductores reales

$$A_c = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) D^2.$$

El módulo de la densidad de corriente uniforme es

$$J = \frac{I}{A_c}.$$

Las circunferencias tienen radio $D/2$. Con el origen mostrado en la figura, sus centros son

$$\mathbf{r}_+ = -\frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{r}_- = \frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}.$$

Utilizamos el principio de superposición para representar la distribución real de corriente mediante dos cilindros circulares completos:

- un cilindro izquierdo con una densidad de corriente uniforme $+J\hat{\mathbf{z}}$;
- un cilindro derecho con una densidad de corriente uniforme $-J\hat{\mathbf{z}}$.

En la región donde se solapan, las dos densidades de corriente se cancelan. En cada región en forma de media luna, la densidad de corriente restante es exactamente la del conductor real. Por tanto, esta construcción reproduce la distribución física de corriente.

Para un cilindro circular muy largo con una densidad de corriente uniforme $J\hat{\mathbf{z}}$, la simetría cilíndrica y la ley de Ampère dan, a una distancia radial interior ρ ,

$$B(\rho) 2\pi\rho = \mu_0 J \pi \rho^2, \quad B(\rho) = \frac{\mu_0 J \rho}{2}.$$

En forma vectorial, para un cilindro centrado en $\mathbf{r}_c$,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{2} \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c).$$

Todos los puntos del hueco en forma de lente están dentro de ambos cilindros ficticios. Sus campos en esa región son

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_+(x, y) &= \frac{\mu_0 J}{2} \left[-y \hat{\mathbf{x}} + \left(x + \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right], \\ \mathbf{B}_-(x, y) &= \frac{\mu_0 J}{2} \left[y \hat{\mathbf{x}} - \left(x - \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right]. \end{aligned}$$

Al sumarlos, se cancelan todos los términos que dependen de las coordenadas:

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 J D}{4} \hat{\mathbf{y}}.$$

Sustituyendo $J = I/A_c$,

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 I D}{4A_c} \hat{\mathbf{y}} = \frac{6\mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3})D} \hat{\mathbf{y}}.$$

Este campo uniforme es válido en todo el hueco definido por las desigualdades simultáneas

$$\left(x + \frac{D}{4}\right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}, \quad \left(x - \frac{D}{4}\right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}.$$

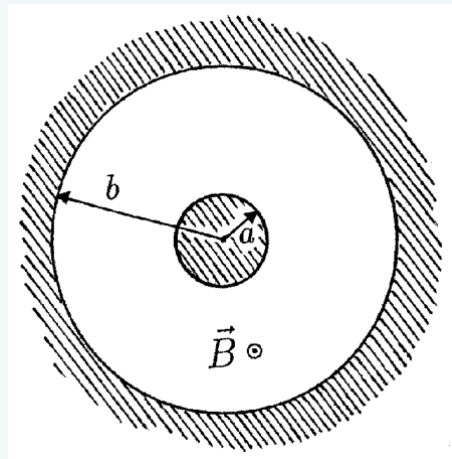
Su dirección es hacia arriba en la figura, de acuerdo con la regla de la mano derecha para ambas corrientes.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Electrones entre cilindros coaxiales en un campo magnético (corte magnético)

El espacio entre dos conductores cilíndricos coaxiales está al vacío. El radio del cilindro interior es a , y el radio interno del cilindro exterior es b , como se muestra en la figura siguiente. Al cilindro exterior, denominado ánodo, se le puede aplicar un potencial positivo V respecto al cilindro interior. También hay un campo magnético estático y homogéneo $\vec{B}$, paralelo al eje de los cilindros y dirigido hacia fuera del plano de la figura. Se desprecian las cargas inducidas en los conductores.

Estudiamos la dinámica de electrones de masa en reposo m y carga $-e$. Los electrones se liberan en la superficie del cilindro interior.



a) En primer lugar se aplica el potencial V , pero $\vec{B} = 0$. Se libera un electrón con velocidad despreciable en la superficie del cilindro interior. Determine su rapidez v al chocar con el ánodo. Dé la respuesta tanto para el caso en que basta un tratamiento no relativista como para el caso en que no basta. (1 punto)

En los apartados restantes de este problema basta un tratamiento no relativista.

b) Ahora $V = 0$, pero está presente el campo magnético homogéneo $\vec{B}$. Un electrón parte con una velocidad inicial $\vec{v}_0$ en la dirección radial. Para campos magnéticos mayores que un valor crítico B_c , el electrón no alcanzará el ánodo. Dibuje un esquema de la trayectoria del electrón

cuando B es ligeramente mayor que B_c . Determine B_c . (2 puntos)

A partir de ahora están presentes tanto el potencial V como el campo magnético homogéneo $\vec{B}$.

c) El campo magnético conferirá al electrón un momento angular L no nulo respecto al eje de los cilindros. Escriba una ecuación para la tasa de variación dL/dt del momento angular. Demuestre que esta ecuación implica que

$$L = keBr^2$$

es constante durante el movimiento, donde k es un número adimensional determinado. Aquí r es la distancia al eje de los cilindros. Determine el valor de k . (3 puntos)

d) Considere un electrón, liberado del cilindro interior con velocidad despreciable, que no alcanza el ánodo, sino que llega a una distancia máxima del eje de los cilindros igual a r_m . Determine la rapidez v en el punto donde la distancia radial es máxima, en función de r_m . (1 punto)

e) Nos interesa utilizar el campo magnético para regular la corriente de electrones hacia el ánodo. Para B mayor que un campo magnético crítico B_c , un electrón liberado con velocidad despreciable no alcanzará el ánodo. Determine B_c . (1 punto)

f) Si los electrones se liberan calentando el cilindro interior, un electrón tendrá, en general, una velocidad inicial no nula en la superficie de dicho cilindro. La componente de la velocidad inicial paralela a $\vec{B}$ es v_B , y las componentes perpendiculares a $\vec{B}$ son v_r (en la dirección radial) y v_φ (en la dirección azimutal, es decir, perpendicular a la dirección radial).

Determine para esta situación el campo magnético crítico B_c para alcanzar el ánodo. (2 puntos)

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Aquí B es el módulo del campo magnético, c es la velocidad de la luz, y una velocidad azimutal positiva corresponde a un movimiento en sentido antihorario en la figura. Por tanto, v_φ en el apartado (f) es una magnitud con signo.

- a)** Para $eV \ll mc^2$,

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

En el caso relativista,

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

• b)

$$B_c = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

La trayectoria es un arco de circunferencia recorrido en sentido antihorario, de radio $R = mv_0/(eB)$. Para B apenas mayor que B_c , su distancia máxima al eje de los cilindros es ligeramente inferior a b , y el electrón regresa al cilindro interior.

• c)

$$\frac{dL}{dt} = eBr\dot{r}, \quad L - \frac{eB}{2}r^2 = \text{constante}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

• d)

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

De forma equivalente,

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

• e)

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

• f) Para un electrón emitido hacia el espacio entre los cilindros,

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} + \frac{2eV}{m} - av_\varphi \right].$$

Este valor es independiente de v_B .

Solución

Tomemos el eje z positivo en la dirección de $\vec{B}$, hacia fuera de la figura. La dirección azimutal positiva es entonces la antihoraria. Sea L la componente z , con su signo, del momento angular mecánico del electrón. Después del apartado (a), utilizaremos la mecánica no relativista, tal como se estipula.

a)

El potencial eléctrico aumenta en V entre el cilindro interior y el ánodo. Como la carga del electrón es $-e$, su energía potencial disminuye en eV . Por tanto, la conservación de la energía da

$$K_{\text{final}} = eV.$$

Cuando esta energía es pequeña en comparación con la energía en reposo, $eV \ll mc^2$,

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV,$$

de modo que

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Para un tratamiento relativista,

$$(\gamma - 1)mc^2 = eV, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Así,

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{mc^2},$$

y

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

Al desarrollar esta expresión para $eV/(mc^2) \ll 1$, se recupera el resultado no relativista.

b)

La fuerza magnética es perpendicular a la velocidad, por lo que no realiza trabajo. La rapidez del electrón se mantiene en v_0 , y su movimiento perpendicular al campo magnético uniforme es circular. El radio de la órbita R se obtiene de

$$\frac{mv_0^2}{R} = ev_0B,$$

lo que da

$$R = \frac{mv_0}{eB}.$$

Elijamos como punto de liberación $P = (a, 0)$, con velocidad inicial en el sentido positivo del eje x . Como

$$\vec{F} = -e \vec{v} \times \vec{B},$$

la fuerza inicial apunta en el sentido positivo del eje y . Por tanto, la circunferencia tiene centro

$$C = (a, R)$$

y ecuación

$$(x - a)^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

La distancia desde el eje de los cilindros O hasta el centro de la órbita es

$$OC = \sqrt{a^2 + R^2}.$$

En consecuencia, la distancia radial máxima alcanzada es

$$r_{\max} = \sqrt{a^2 + R^2} + R.$$

Para el campo crítico, este máximo es igual a b :

$$\sqrt{a^2 + R_c^2} + R_c = b.$$

Al reordenar y elevar al cuadrado, se obtiene

$$a^2 + R_c^2 = (b - R_c)^2, \quad R_c = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Por tanto,

$$B_c = \frac{mv_0}{eR_c} = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

Para el esquema solicitado, dibuje las dos circunferencias concéntricas que delimitan los cilindros y sitúe el electrón inicialmente en la circunferencia interior, sobre el radio horizontal dirigido hacia la derecha. Su tangente inicial apunta directamente hacia fuera, y la trayectoria se curva hacia arriba, siguiendo en sentido antihorario la circunferencia centrada en $C = (a, R)$. Su punto más alejado de O se encuentra en la semirrecta OC . Cuando B es ligeramente mayor que B_c , este punto queda justo por dentro del ánodo. El electrón se mueve entonces hacia dentro y vuelve a chocar con el cilindro interior. El punto de retorno tiene un ángulo polar

$$\varphi_{\text{return}} = 2 \arctan(R/a).$$

c)

La fuerza eléctrica es radial y, por tanto, no ejerce momento respecto al eje de los cilindros.

Escribiendo la velocidad como

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r\dot{\varphi} \hat{\varphi} + v_z \hat{z},$$

la fuerza magnética es

$$-e \vec{v} \times \vec{B} = -eBr\dot{\varphi} \hat{r} + eB\dot{r} \hat{\varphi}.$$

Su componente azimutal es $F_\varphi = eB\dot{r}$. Por tanto,

$$\frac{dL}{dt} = rF_\varphi = eBr\dot{r}.$$

Como B es constante,

$$eBr\dot{r} = \frac{eB}{2} \frac{d(r^2)}{dt}.$$

Se deduce que

$$\frac{d}{dt} \left(L - \frac{eB}{2} r^2 \right) = 0,$$

de modo que

$$L - \frac{eB}{2} r^2 = \text{constante}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

En particular, entre la liberación en $r = a$ y cualquier posición posterior,

$$L(r) = L(a) + \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

d)

El electrón parte con velocidad despreciable, por lo que $L(a) = 0$. Así,

$$L(r) = \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

Ninguno de los dos campos produce una fuerza axial, por lo que la velocidad axial, inicialmente nula, sigue siendo cero. En la distancia radial máxima r_m , la velocidad radial también se anula. Por tanto, la velocidad en ese punto es enteramente azimutal, lo que da

$$L(r_m) = mr_mv.$$

En consecuencia,

$$mr_mv = \frac{eB}{2}(r_m^2 - a^2),$$

y

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

De la conservación de la energía se obtiene una expresión equivalente. En el espacio cilíndrico entre los conductores, libre de carga, la ley de Gauss da $rE_r = \text{constante}$. Con el cilindro interior a potencial cero y el ánodo a potencial V , el potencial es

$$\Phi(r) = V \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

Como el campo magnético no realiza trabajo,

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Phi(r_m),$$

lo que da

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

Estas dos expresiones deben coincidir en el radio real de retorno r_m .

e)

Para el campo crítico, la distancia radial máxima del electrón es exactamente b . Alcanza el ánodo tangencialmente, con velocidad radial nula.

La conservación de la energía determina su rapidez allí:

$$v_b = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Utilizando el apartado (d) con $r_m = b$,

$$v_b = \frac{eB_c(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

Por tanto,

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

Para $B > B_c$, la energía cinética azimutal exigida en $r = b$ por la conservación del momento angular supera la energía cinética total disponible allí. El electrón no puede alcanzar el ánodo.

f)

Tomemos la componente radial inicial dirigida hacia el espacio entre los cilindros, de modo que $v_r \geq 0$. Denotemos las componentes radial y azimutal posteriores de la velocidad por u_r y u_φ .

No hay fuerza axial, por lo que

$$u_z = v_B$$

durante todo el movimiento. El momento angular inicial es

$$L(a) = mav_\varphi.$$

La ley de conservación del apartado (c) da

$$mru_\varphi = mav_\varphi + \frac{eB}{2}(r^2 - a^2).$$

En el ánodo,

$$u_\varphi(b) = \frac{a}{b}v_\varphi + \frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

La conservación de la energía entre los dos cilindros da

$$\frac{1}{2}m[u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 + v_B^2] = \frac{1}{2}m[v_r^2 + v_\varphi^2 + v_B^2] + eV.$$

Las energías cinéticas axiales se cancelan. Definiendo

$$W = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}},$$

obtenemos

$$u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 = W^2.$$

Así, la condición para alcanzar el ánodo es

$$\left| av_\varphi + \frac{eB}{2m}(b^2 - a^2) \right| \leq bW.$$

Para $B = 0$, $|av_\varphi| < bW$. Al aumentar el campo positivo, se alcanza el límite superior cuando

$$av_\varphi + \frac{eB_c}{2m}(b^2 - a^2) = bW.$$

Despejando,

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b\sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}} - av_\varphi \right].$$

La ausencia de v_B refleja el hecho de que el movimiento axial no modifica la distancia al eje de los cilindros ni intercambia energía con el movimiento transversal.

Para verificar que la condición en el ánodo no pasa por alto un punto de retorno radial anterior, hagamos

$$s = \ln(r/a), \quad \alpha = \frac{eBa}{2m}, \quad \beta = v_\varphi - \alpha.$$

Las ecuaciones del momento angular y de la energía dan

$$u_r^2(s) = v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m \ln(b/a)} s - (\alpha e^s + \beta e^{-s})^2.$$

Su segunda derivada es

$$\frac{d^2 u_r^2}{ds^2} = -4\alpha^2 e^{2s} - 4\beta^2 e^{-2s} \leq 0.$$

Por tanto, u_r^2 es una función cóncava de s . Si es no negativa en ambos cilindros, es no negativa en todo el espacio entre ellos. La condición utilizada anteriormente determina, por tanto, el corte real.

Al hacer $v_r = v_\varphi = 0$, se recupera el apartado (e). Al hacer $V = 0$, $v_\varphi = 0$ y $v_r = v_0$, se recupera el apartado (b).

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Mareas en mar abierto en el sistema Tierra-Luna

En este problema consideramos algunas características generales de la magnitud de las mareas en mar abierto en la Tierra. Simplificamos el problema mediante las siguientes hipótesis:

- (i) La Tierra y la Luna se consideran un sistema aislado,
- (ii) se supone que la distancia entre la Luna y la Tierra es constante,
- (iii) se supone que la Tierra está completamente cubierta por un océano,
- (iv) se desprecian los efectos dinámicos de la rotación de la Tierra alrededor de su eje, y
- (v) la atracción gravitatoria de la Tierra puede determinarse como si toda su masa estuviera concentrada en su centro.

Se proporcionan los siguientes datos:

Masa de la Tierra: $M = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Masa de la Luna: $M_m = 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

Radio de la Tierra: $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$

Distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna:

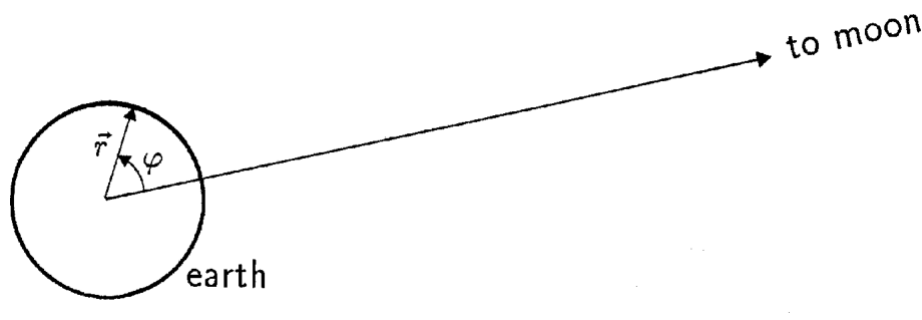
$L = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$

Constante de gravitación universal: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

a) La Luna y la Tierra giran con velocidad angular ω alrededor de su centro de masas común, C . ¿A qué distancia del centro de la Tierra se encuentra C ? (Denote esta distancia por l .)

Determine el valor numérico de ω . (2 puntos)

Utilizamos ahora un sistema de referencia que gira solidariamente con la Luna y el centro de la Tierra alrededor de C . En este sistema de referencia, la forma de la superficie líquida de la Tierra es estática.



En el plano P que pasa por C y es perpendicular al eje de rotación, la posición de una masa puntual sobre la superficie líquida de la Tierra puede describirse mediante las coordenadas polares r, φ , como se muestra en la figura. Aquí, r es la distancia al centro de la Tierra.

Estudiaremos la forma

$$r(\varphi) = R + h(\varphi)$$

de la superficie líquida de la Tierra en el plano P .

b) Considere una masa puntual (de masa m) sobre la superficie líquida de la Tierra (en el plano P). En nuestro sistema de referencia, sobre ella actúan una fuerza centrífuga y las fuerzas gravitatorias de la Luna y de la Tierra. Escriba una expresión para la energía potencial correspondiente a estas tres fuerzas.

Nota: Toda fuerza $F(r)$, dirigida radialmente con respecto a un origen, es la derivada negativa de una energía potencial con simetría esférica $V(r)$:

$$F(r) = -V'(r). \text{ (3 puntos)}$$

c) Halle, en función de las magnitudes dadas M, M_m , etc., la forma aproximada $h(\varphi)$ del abultamiento de marea. ¿Cuál es la diferencia en metros entre la pleamar y la bajamar en este modelo?

Puede utilizar la expresión aproximada

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \theta}} \approx 1 + a \cos \theta + \frac{1}{2}a^2(3 \cos^2 \theta - 1),$$

válida para a mucho menor que la unidad.

En este análisis, haga aproximaciones simplificadoras siempre que sean razonables. (5 puntos)

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **a)** El centro de masas se encuentra en dirección a la Luna, a una distancia

$$l = \frac{M_m L}{M + M_m} \approx 4.6 \times 10^6 \text{ m}$$

del centro de la Tierra. La velocidad angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M + M_m)}{L^3}} \approx 2.67 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

- **b)** Salvo una constante aditiva,

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2} m \omega^2 (r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi).$$

- **c)** La forma de la marea al orden dominante es

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi,$$

donde la constante $h_{\min}$ fija el nivel de referencia del mar. De manera equivalente, con respecto a la altura media $\bar{h}_P$ a lo largo de la sección,

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi \approx (0.27 \text{ m}) \cos 2\varphi.$$

Las pleamares se producen en $\varphi = 0, \pi$, y las bajamares en $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$. Su diferencia de altura es

$$\Delta h = \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \approx 0.53 \text{ m}.$$

Solución

a)

El centro de masas se encuentra sobre la recta que une la Tierra y la Luna. Tomando las distancias desde él, se obtiene

$$Ml = M_m(L - l),$$

y, por tanto,

$$l = \frac{M_m}{M + M_m} L = \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22}} (3.84 \times 10^8) = 4.631 \dots \times 10^6 \text{ m}.$$

Así, C se encuentra en el interior de la Tierra, puesto que $l < R$.

La Tierra se mueve en una circunferencia de radio l alrededor de C . La atracción gravitatoria que ejerce la Luna sobre ella proporciona la fuerza centrípeta:

$$M\omega^2 l = \frac{GM M_m}{L^2}.$$

Sustituyendo la expresión de l ,

$$\omega^2 = \frac{G(M + M_m)}{L^3}.$$

Numéricamente,

$$\omega = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22})}{(3.84 \times 10^8)^3}} = 2.67 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

También utilizaremos la relación exacta

$$\omega^2 l = \frac{GM_m}{L^2}.$$

b)

Situemos el origen en el centro de la Tierra y tomemos $\varphi = 0$ en dirección a la Luna. La Luna y C se encuentran entonces a distancias L y l en esa dirección.

Por el teorema del coseno, la distancia de la masa puntual a la Luna es

$$d = \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}.$$

Como el punto se encuentra en el plano perpendicular al eje de rotación que pasa por C , su distancia a ese eje es

$$s = \sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi}.$$

Las energías potenciales gravitatorias son

$$V_E = -\frac{GMm}{r}, \quad V_m = -\frac{GM_m m}{d}.$$

La fuerza centrífuga apunta alejándose del eje de rotación y tiene módulo $m\omega^2 s$. Por tanto,

$$-\frac{dV_{\text{cf}}}{ds} = m\omega^2 s \implies V_{\text{cf}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 s^2.$$

Sumando las tres contribuciones se obtiene

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2}m\omega^2(r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) + \text{constante}.$$

c)

Para un fluido en reposo, el equilibrio hidrostático exige

$$\nabla p = -\rho \nabla \Phi, \quad \Phi = \frac{V}{m}.$$

La presión es constante a lo largo de la superficie libre, por lo que esta superficie debe ser una equipotencial de Φ .

Puesto que

$$\frac{R}{L} = 0.0166 \ll 1,$$

desarrollamos el potencial lunar hasta segundo orden en r/L :

$$-\frac{GM_m}{d} \approx -\frac{GM_m}{L} - \frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

El potencial centrífugo por unidad de masa es

$$-\frac{1}{2} \omega^2 (r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - \frac{1}{2} \omega^2 l^2 + \omega^2 lr \cos \varphi.$$

Utilizando la relación obtenida en el apartado **a)**,

$$-\frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi + \omega^2 lr \cos \varphi = 0.$$

Así, la parte uniforme del campo gravitatorio de la Luna queda cancelada por el término centrífugo correspondiente. Tras absorber en una constante los términos independientes de la posición,

$$\Phi(r, \varphi) \approx -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1) + \text{constante}.$$

Sustituyamos ahora $r = R + h(\varphi)$, con $|h| \ll R$. El potencial terrestre se convierte en

$$-\frac{GM}{R+h} \approx -\frac{GM}{R} + \frac{GM}{R^2} h = -\frac{GM}{R} + gh,$$

donde

$$g = \frac{GM}{R^2} = 9.83 \text{ m s}^{-2}.$$

En los términos centrífugo y lunar, de menor magnitud, podemos tomar $r = R$. Por ejemplo, la corrección centrífuga al coeficiente de h , relativa a g , es tan solo

$$\frac{\omega^2 R}{g} = 4.62 \times 10^{-6}.$$

El potencial centrífugo evaluado en R es independiente de φ dentro de P , de modo que solo contribuye al nivel constante de la superficie. Por tanto, la condición de equipotencialidad se reduce a

$$gh(\varphi) - \frac{GM_m R^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1) = \text{constante}.$$

En consecuencia,

$$h(\varphi) = H + \frac{M_m R^4}{2ML^3} (3 \cos^2 \varphi - 1),$$

donde H es independiente de φ . Esta constante queda fijada por el nivel de referencia del mar o por una normalización del volumen; la variación angular de la marea no depende de ella.

Escribiendo el resultado con respecto a su mínimo se obtiene

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi.$$

Alternativamente, utilizando $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$,

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi.$$

La superficie presenta, por tanto, dos máximos iguales sobre la recta Tierra–Luna: uno orientado hacia la Luna y otro en el lado opuesto. Sus dos mínimos se encuentran en la dirección perpendicular a esa recta en P . La igualdad de los dos abultamientos se cumple hasta el orden conservado en R/L .

La diferencia entre el máximo y el mínimo es

$$\begin{aligned}\Delta h &= \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \\ &= \frac{3}{2} \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24}} \frac{(6.37 \times 10^6)^4}{(3.84 \times 10^8)^3} \text{ m} \\ &= 0.532447 \dots \text{ m}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\boxed{\Delta h \approx 0.53 \text{ m.}}$$

La amplitud con respecto a la media en P es la mitad de este valor, aproximadamente 0.27 m. Esta pequeña deformación confirma la validez del desarrollo lineal en h/R .

La solución se comprobó con la solución oficial.