

IPhO 1996

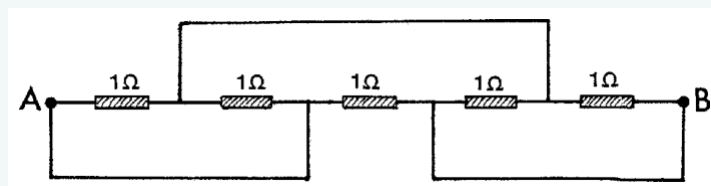
Theorieaufgaben und Lösungen · Oslo, Norwegen · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/1996/

Aufgabe 1: Fünf voneinander unabhängige Kurzaufgaben (Widerstandsnetzwerk, Skifahrer auf einem Hügel, Wärmekapazität eines Metalls, Strahlungsschutzschild, Magnetfeld zwischen zwei Leitern)

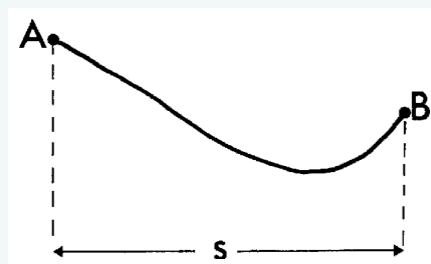
(Die fünf Teile dieser Aufgabe sind voneinander unabhängig)

a) Fünf Widerstände von jeweils 1Ω sind wie in der Abbildung gezeigt miteinander verbunden. Der Widerstand der Verbindungsdrähte (durchgezogene Linien) ist vernachlässigbar.



Bestimmen Sie den Gesamtwiderstand R zwischen A und B. (1 Punkt)

b)



Ein Skifahrer startet aus der Ruhe am Punkt A und gleitet den Hügel hinunter, ohne Kurven zu fahren oder zu bremsen. Der Reibungskoeffizient ist μ . Wenn er am Punkt B zum Stillstand kommt, beträgt seine horizontale Verschiebung s . Wie groß ist der Höhenunterschied h zwischen den Punkten A und B?

(Die Geschwindigkeit des Skifahrers ist so gering, dass der zusätzliche Druck auf den Schnee aufgrund der Bahnkrümmung vernachlässigt werden kann. Vernachlässigen Sie außerdem den Luftwiderstand und die Abhängigkeit von μ von der Geschwindigkeit des Skifahrers.) (1.5 Punkte)

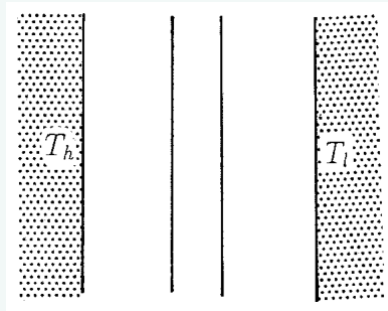
c) Ein thermisch isoliertes Metallstück wird bei Atmosphärendruck durch einen elektrischen Strom erwärmt, sodass ihm elektrische Energie mit konstanter Leistung P zugeführt wird. Dadurch steigt die absolute Temperatur T des Metalls mit der Zeit t gemäß:

$$T(t) = T_0[1 + a(t - t_0)]^{1/4}.$$

Dabei sind a , t_0 und T_0 Konstanten. Bestimmen Sie die Wärmekapazität $C_p(T)$ des Metalls (die im Temperaturbereich des Experiments temperaturabhängig ist). (2 Punkte)

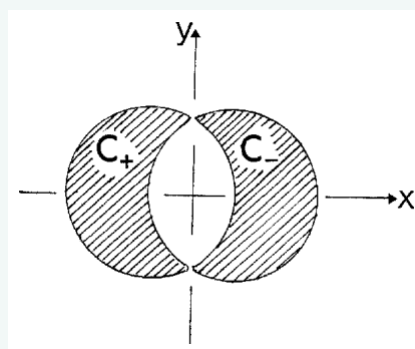
d) Eine schwarze ebene Oberfläche mit einer konstanten hohen Temperatur T_h ist parallel zu einer anderen schwarzen ebenen Oberfläche mit einer konstanten niedrigeren Temperatur T_l angeordnet. Zwischen den Platten herrscht Vakuum.

Um den Wärmestrom durch Strahlung zu verringern, wird ein Strahlungsschutzschild aus zwei dünnen schwarzen, thermisch voneinander isolierten Platten zwischen der warmen und der kalten Oberfläche und parallel zu diesen angeordnet. Nach einiger Zeit stellt sich ein stationärer Zustand ein.



Um welchen Faktor ξ wird der stationäre Wärmestrom durch den Strahlungsschutzschild verringert? Vernachlässigen Sie Randeffekte aufgrund der endlichen Größe der Oberflächen. (1.5 Punkte)

e) Zwei gerade und sehr lange nichtmagnetische Leiter C_+ und C_- , die voneinander isoliert sind, führen jeweils einen Strom I in positiver beziehungsweise negativer z -Richtung. Die Querschnitte der Leiter (in der Abbildung schraffiert) werden durch Kreise mit dem Durchmesser D in der x - y -Ebene begrenzt, deren Mittelpunkte den Abstand $D/2$ voneinander haben. Die sich daraus ergebenden Querschnitte haben jeweils eine Fläche von $\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3}\right)D^2$. Der Strom ist in jedem Leiter gleichmäßig über den Querschnitt verteilt.



Bestimmen Sie das Magnetfeld $B(x, y)$ im Raum zwischen den Leitern. (4 Punkte)

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **a)** $R = \frac{1}{2} \Omega = 0.5 \Omega$.

- **b)** $h = \mu s$, wobei A höher liegt als B.
- **c)** $C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4}$, in J K^{-1} bei Verwendung von SI-Einheiten.
- **d)** $\dot{Q}_{\text{shield}} = \frac{\dot{Q}_0}{3}$: eine Verringerung um den Faktor drei, $\xi = \frac{\dot{Q}_0}{\dot{Q}_{\text{shield}}} = 3$.
- **e)** Im gesamten linsenförmigen Zwischenraum gilt

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{6\mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3})D} \hat{\mathbf{y}}.$$

Das Feld ist homogen und zeigt in die positive y -Richtung.

Lösung

a)

Jeder Widerstand sei $r = 1 \Omega$, und die vier inneren Knoten seien von links nach rechts mit N_1, N_2, N_3, N_4 bezeichnet. Durch die idealen Verbindungsdrähte fallen die folgenden Knoten jeweils zusammen:

$$A = N_2, \quad N_1 = N_4 = X, \quad N_3 = B.$$

Folglich verbinden sowohl der erste als auch der zweite Widerstand A mit X und sind parallel geschaltet. Der vierte und der fünfte verbinden beide X mit B und sind ebenfalls parallel geschaltet:

$$R_{AX} = R_{XB} = \frac{r}{2}.$$

Diese beiden Ersatzwiderstände bilden einen Zweig von A nach B, in dem sie in Reihe geschaltet sind und dessen Widerstand $r/2 + r/2 = r$ beträgt. Der dritte Widerstand verbindet A direkt mit B und bildet damit einen weiteren Zweig mit dem Widerstand r . Somit gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}, \quad \boxed{R = \frac{r}{2} = 0.5 \Omega.}$$

b)

Es sei θ der lokale Winkel der Bahn des Skifahrers zur Horizontalen und $d\ell$ ein Bahnlängenelement. Vernachlässigt man wie vorgegeben die zusätzliche Normalkraft aufgrund der Bahnkrümmung, so ergibt sich

$$N = mg \cos \theta.$$

Die Reibungskraft hat den Betrag μN und wirkt der Bewegung entgegen. Die entlang der Bahn dissipierte Energie beträgt daher

$$E_{\text{fr}} = \int_A^B \mu mg \cos \theta d\ell.$$

Bei der dargestellten Bahn nimmt die horizontale Koordinate während der gesamten Bewegung zu, und es gilt

$$dx = \cos \theta d\ell.$$

Daraus folgt

$$E_{\text{fr}} = \mu mg \int_A^B dx = \mu mgs.$$

Der Skifahrer ist sowohl am Anfang als auch am Ende in Ruhe, sodass die Abnahme der potenziellen Energie im Schwerfeld gleich der durch Reibung dissipierten Energie ist. Mit $h = y_A - y_B$ ergibt sich

$$mgh = \mu mgs, \quad \boxed{h = \mu s.}$$

Im Rahmen der angegebenen Näherung hängt das Ergebnis nur von der horizontalen Verschiebung ab.

c)

Das Metall ist thermisch isoliert, doch durch elektrische Arbeit wird ihm Energie mit der Leistung P zugeführt. Bei konstantem Atmosphärendruck p liefert der erste Hauptsatz

$$dU = P dt - p dV.$$

Da die Enthalpie $H = U + pV$ ist und $dp = 0$ gilt, folgt

$$dH = P dt.$$

Mit der gesamten Wärmekapazität des Metallstücks bei konstantem Druck,

$$C_p(T) = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p,$$

erhalten wir

$$P = C_p(T) \frac{dT}{dt}.$$

Wir erheben das gegebene Temperaturoesetz zur vierten Potenz:

$$T^4 = T_0^4 [1 + a(t - t_0)].$$

Durch Differenzieren ergibt sich

$$4T^3 \frac{dT}{dt} = aT_0^4.$$

Damit folgt

$$\boxed{C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4} = \frac{4P}{aT_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3.}$$

Die Wärmekapazität ist somit im Temperaturbereich des Experiments proportional zu T^3 . Da a die Einheit s^{-1} hat, hat der Ausdruck die Einheit J K^{-1} .

d)

Für zwei schwarze parallele Oberflächen mit vernachlässigbaren Randeﬀekten liefert das Stefan–Boltzmann-Gesetz die Nettowärmestromdichte durch Strahlung

$$q_0 = \sigma (T_h^4 - T_l^4)$$

vor dem Einsetzen des Strahlungsschutzschilds.

Es seien T_1 und T_2 die Temperaturen der dünnen Platten des Strahlungsschutzschilds, geordnet von der heißen zur kalten Seite. Jede dünne Platte hat auf ihren beiden Seiten dieselbe Temperatur. Im stationären Zustand speichert keine der Platten zusätzliche Energie, sodass die Nettowärmestromdichte q in allen drei Vakuumzwischenräumen gleich ist:

$$q = \sigma(T_h^4 - T_1^4) = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = \sigma(T_2^4 - T_l^4).$$

Durch Addition der drei Differenzen der vierten Potenzen der Temperaturen ergibt sich

$$3q = \sigma(T_h^4 - T_l^4) = q_0.$$

Dasselbe Verhältnis gilt für den gesamten Wärmestrom:

$$\frac{\dot{Q}_{\text{shield}}}{\dot{Q}_0} = \frac{1}{3}.$$

Der Wärmestrom wird daher um den folgenden Faktor verringert:

$$\xi = 3.$$

e)

Die Querschnittsfläche jedes der beiden tatsächlichen Leiter sei

$$A_c = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) D^2.$$

Der Betrag der homogenen Stromdichte ist

$$J = \frac{I}{A_c}.$$

Die Kreise haben den Radius $D/2$. Bezüglich des in der Abbildung dargestellten Ursprungs liegen ihre Mittelpunkte bei

$$\mathbf{r}_+ = -\frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{r}_- = \frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}.$$

Mithilfe des Superpositionsprinzips stellen wir die tatsächliche Stromverteilung durch zwei vollständige Kreiszylinder dar:

- einen linken Zylinder mit der homogenen Stromdichte $+J\hat{\mathbf{z}}$;
- einen rechten Zylinder mit der homogenen Stromdichte $-J\hat{\mathbf{z}}$.

In ihrem Überlappungsbereich heben sich die beiden Stromdichten auf. In jedem sichelförmigen Bereich entspricht die verbleibende Stromdichte genau derjenigen des tatsächlichen Leiters. Diese Konstruktion bildet somit die physikalische Stromverteilung nach.

Für einen sehr langen Kreiszylinder mit homogener Stromdichte $J\hat{\mathbf{z}}$ ergeben die Zylindersymmetrie und das ampèresche Gesetz bei einem radialen Abstand ρ im Inneren

$$B(\rho) 2\pi\rho = \mu_0 J \pi \rho^2, \quad B(\rho) = \frac{\mu_0 J \rho}{2}.$$

In Vektorform gilt für einen Zylinder mit dem Mittelpunkt $\mathbf{r}_c$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{2} \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c).$$

Jeder Punkt im linsenförmigen Zwischenraum liegt innerhalb beider fiktiven Zylinder. Ihre Felder sind dort

$$\mathbf{B}_+(x, y) = \frac{\mu_0 J}{2} \left[-y \hat{\mathbf{x}} + \left(x + \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right],$$

$$\mathbf{B}_-(x, y) = \frac{\mu_0 J}{2} \left[y \hat{\mathbf{x}} - \left(x - \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right].$$

Bei ihrer Addition heben sich sämtliche koordinatenabhängigen Terme auf:

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 J D}{4} \hat{\mathbf{y}}.$$

Durch Einsetzen von $J = I/A_c$ ergibt sich

$$\boxed{\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 I D}{4 A_c} \hat{\mathbf{y}} = \frac{6 \mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3}) D} \hat{\mathbf{y}}.}$$

Dieses homogene Feld gilt im gesamten Zwischenraum, der durch die gleichzeitig zu erfüllenden Ungleichungen

$$\left(x + \frac{D}{4} \right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}, \quad \left(x - \frac{D}{4} \right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}$$

definiert ist.

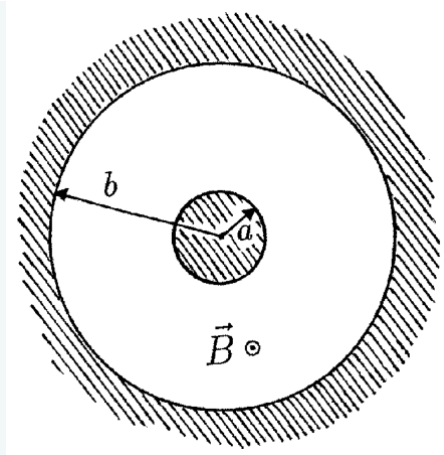
Seine Richtung ist in der Abbildung nach oben, im Einklang mit der Rechte-Hand-Regel für beide Ströme.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Elektronen zwischen koaxialen Zylindern in einem Magnetfeld (magnetische Sperrung)

Der Raum zwischen zwei koaxialen zylindrischen Leitern ist evakuiert. Der Radius des inneren Zylinders beträgt a , und der Innenradius des äußeren Zylinders beträgt b , wie in der folgenden Abbildung gezeigt. Der äußere Zylinder, der als Anode bezeichnet wird, kann gegenüber dem inneren Zylinder auf ein positives Potential V gebracht werden. Außerdem liegt ein statisches homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ parallel zur Zylinderachse vor, das aus der Zeichenebene heraus gerichtet ist. Influenzladungen in den Leitern werden vernachlässigt.

Wir untersuchen die Dynamik von Elektronen mit der Ruhemasse m und der Ladung $-e$. Die Elektronen werden an der Oberfläche des inneren Zylinders freigesetzt.



a) Zunächst wird das Potential V angelegt, aber es gilt $\vec{B} = 0$. Ein Elektron wird mit vernachlässigbarer Geschwindigkeit an der Oberfläche des inneren Zylinders freigesetzt. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit v , wenn es auf die Anode trifft. Geben Sie die Antwort sowohl für den Fall an, dass eine nichtrelativistische Behandlung ausreicht, als auch für den Fall, dass sie nicht ausreicht. (1 Punkt)

Für die übrigen Teile dieser Aufgabe genügt eine nichtrelativistische Behandlung.

b) Nun gilt $V = 0$, aber das homogene Magnetfeld $\vec{B}$ ist vorhanden. Ein Elektron startet mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ in radialer Richtung. Bei Magnetfeldern oberhalb eines kritischen Wertes B_c erreicht das Elektron die Anode nicht. Skizzieren Sie die Bahn des Elektrons, wenn B geringfügig größer als B_c ist. Bestimmen Sie B_c . (2 Punkte)

Von nun an sind sowohl das Potential V als auch das homogene Magnetfeld $\vec{B}$ vorhanden.

c) Das Magnetfeld verleiht dem Elektron einen von null verschiedenen Drehimpuls L bezüglich der Zylinderachse. Stellen Sie eine Gleichung für die zeitliche Änderung dL/dt des Drehimpulses auf. Zeigen Sie, dass aus dieser Gleichung folgt, dass

$$L - keBr^2$$

während der Bewegung konstant ist, wobei k eine bestimmte dimensionslose Zahl ist. Dabei ist r der Abstand von der Zylinderachse. Bestimmen Sie den Wert von k . (3 Punkte)

d) Betrachten Sie ein Elektron, das mit vernachlässigbarer Geschwindigkeit am inneren Zylinder freigesetzt wird und die Anode nicht erreicht, sondern einen maximalen Abstand r_m von der Zylinderachse hat. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v an der Stelle des maximalen radialen Abstands in Abhängigkeit von r_m . (1 Punkt)

e) Wir möchten das Magnetfeld dazu verwenden, den Elektronenstrom zur Anode zu regeln. Für B oberhalb eines kritischen Magnetfeldes B_c erreicht ein mit vernachlässigbarer Geschwindigkeit freigesetztes Elektron die Anode nicht. Bestimmen Sie B_c . (1 Punkt)

f) Werden die Elektronen durch Erhitzen des inneren Zylinders freigesetzt, so hat ein Elektron an der Oberfläche des inneren Zylinders im Allgemeinen eine von null verschiedene Anfangsgeschwindigkeit. Die Komponente der Anfangsgeschwindigkeit parallel zu $\vec{B}$ ist v_B , die Komponenten senkrecht zu $\vec{B}$ sind v_r (in radialer Richtung) und v_φ (in azimuthaler Richtung, d. h. senkrecht zur radialen Richtung).

Bestimmen Sie für diesen Fall das kritische Magnetfeld B_c für das Erreichen der Anode. (2 Punkte)

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Hier ist B der Betrag des Magnetfeldes, c die Lichtgeschwindigkeit, und eine positive Azimutalgeschwindigkeit bedeutet eine Bewegung gegen den Uhrzeigersinn in der Abbildung. Somit ist v_φ in Teil (f) eine vorzeichenbehaftete Größe.

- a) Für $eV \ll mc^2$ gilt

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Relativistisch gilt

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

- b)

$$B_c = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

Die Bahn ist ein gegen den Uhrzeigersinn durchlaufener Kreisbogen mit dem Radius $R = mv_0/(eB)$. Für B knapp oberhalb von B_c liegt sein maximaler Abstand von der Zylinderachse knapp unter b , und das Elektron kehrt zum inneren Zylinder zurück.

- c)

$$\frac{dL}{dt} = eBr\dot{r}, \quad L - \frac{eB}{2}r^2 = \text{konstant}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

- d)

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

Äquivalent gilt

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

- e)

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

- **f)** Für ein in den Zwischenraum emittiertes Elektron gilt

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}} - av_\varphi \right].$$

Dies ist unabhängig von v_B .

Lösung

Wir wählen die positive z -Achse entlang von $\vec{B}$, aus der Zeichenebene heraus. Die positive azimuthale Richtung verläuft dann gegen den Uhrzeigersinn. Mit L bezeichnen wir die vorzeichenbehaftete z -Komponente des mechanischen Drehimpulses des Elektrons. Nach Teil (a) verwenden wir wie vorgegeben die nichtrelativistische Mechanik.

a)

Das elektrische Potential steigt zwischen dem inneren Zylinder und der Anode um V an. Da die Ladung des Elektrons $-e$ beträgt, nimmt seine potentielle Energie um eV ab. Aus der Energieerhaltung folgt daher

$$K_{\text{final}} = eV.$$

Ist diese Energie klein gegenüber der Ruheenergie, $eV \ll mc^2$, so gilt

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV,$$

also

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Bei einer relativistischen Behandlung gilt

$$(\gamma - 1)mc^2 = eV, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Somit ist

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{mc^2},$$

und

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck für $eV/(mc^2) \ll 1$, erhält man wieder das nichtrelativistische Ergebnis.

b)

Die magnetische Kraft steht senkrecht zur Geschwindigkeit und verrichtet daher keine Arbeit. Der Geschwindigkeitsbetrag des Elektrons bleibt v_0 , und seine Bewegung senkrecht zum homogenen Magnetfeld ist kreisförmig. Der Bahnradius R folgt aus

$$\frac{mv_0^2}{R} = ev_0 B,$$

also

$$R = \frac{mv_0}{eB}.$$

Wir wählen den Freisetzungspunkt als $P = (a, 0)$, mit einer Anfangsgeschwindigkeit entlang der positiven x -Achse. Wegen

$$\vec{F} = -e \vec{v} \times \vec{B},$$

zeigt die anfängliche Kraft entlang der positiven y -Achse. Der Kreis hat daher den Mittelpunkt

$$C = (a, R)$$

und die Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

Der Abstand von der Zylinderachse O zum Bahnmittelpunkt beträgt

$$OC = \sqrt{a^2 + R^2}.$$

Folglich ist der maximal erreichte radiale Abstand

$$r_{\max} = \sqrt{a^2 + R^2} + R.$$

Beim kritischen Feld ist dieses Maximum gleich b :

$$\sqrt{a^2 + R_c^2} + R_c = b.$$

Umstellen und anschließendes Quadrieren ergibt

$$a^2 + R_c^2 = (b - R_c)^2, \quad R_c = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Daher gilt

$$B_c = \frac{mv_0}{eR_c} = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

Für die geforderte Skizze zeichnet man die beiden konzentrischen Zylinderbegrenzungen und lässt das Elektron auf der nach rechts gerichteten radialen Linie an der inneren Begrenzung starten. Seine anfängliche Tangente zeigt direkt nach außen, und die Bahn krümmt sich nach oben und folgt dem Kreis mit dem Mittelpunkt $C = (a, R)$ gegen den Uhrzeigersinn. Der von O am weitesten entfernte Punkt liegt auf dem Strahl OC . Wenn B geringfügig größer als B_c ist, liegt dieser Punkt knapp innerhalb der Anode. Das Elektron bewegt sich dann nach innen und trifft erneut auf den inneren Zylinder. Der Rückkehrpunkt hat den Polarwinkel

$$\varphi_{\text{return}} = 2 \arctan(R/a).$$

c)

Die elektrische Kraft ist radial und übt daher kein Drehmoment um die Zylinderachse aus.

Schreiben wir die Geschwindigkeit als

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi} + v_z \hat{z},$$

so lautet die magnetische Kraft

$$-e \vec{v} \times \vec{B} = -eBr\dot{\varphi} \hat{r} + eB\dot{r} \hat{\varphi}.$$

Ihre azimuthale Komponente ist $F_{\varphi} = eB\dot{r}$. Daher gilt

$$\frac{dL}{dt} = rF_{\varphi} = eBr\dot{r}.$$

Da B konstant ist, gilt

$$eBr\dot{r} = \frac{eB}{2} \frac{d(r^2)}{dt}.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \left(L - \frac{eB}{2} r^2 \right) = 0,$$

also

$$\boxed{L - \frac{eB}{2} r^2 = \text{konstant}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

Insbesondere gilt zwischen der Freisetzung bei $r = a$ und jeder späteren Position

$$L(r) = L(a) + \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

d)

Das Elektron startet mit vernachlässigbarer Geschwindigkeit, sodass $L(a) = 0$ gilt. Somit ist

$$L(r) = \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

Keines der beiden Felder erzeugt eine axiale Kraft, daher bleibt die anfangs verschwindende axiale Geschwindigkeit null. Beim maximalen radialen Abstand r_m verschwindet auch die radiale Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit ist dort daher rein azimuthal, sodass

$$L(r_m) = mr_mv.$$

Folglich gilt

$$mr_mv = \frac{eB}{2} (r_m^2 - a^2),$$

und

$$\boxed{v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

Ein äquivalenter Ausdruck folgt aus der Energieerhaltung. Im ladungsfreien zylindrischen Zwischenraum liefert das gaußsche Gesetz $rE_r = \text{konstant}$. Liegt der innere Zylinder auf dem Potential null und die Anode auf V , so lautet das Potential

$$\Phi(r) = V \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

Da das Magnetfeld keine Arbeit verrichtet, gilt

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Phi(r_m),$$

woraus folgt

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

Diese beiden Ausdrücke müssen beim tatsächlichen Umkehrradius r_m übereinstimmen.

e)

Beim kritischen Feld ist der maximale radiale Abstand des Elektrons genau b . Es erreicht die Anode tangential mit verschwindender radialer Geschwindigkeit.

Die Energieerhaltung legt seinen Geschwindigkeitsbetrag dort fest:

$$v_b = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Aus Teil (d) mit $r_m = b$ folgt

$$v_b = \frac{eB_c(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

Daher gilt

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

Für $B > B_c$ übersteigt die aufgrund der Drehimpulserhaltung bei $r = b$ erforderliche azimuthale kinetische Energie die dort insgesamt verfügbare kinetische Energie. Das Elektron kann die Anode nicht erreichen.

f)

Wir nehmen an, dass die anfängliche radiale Komponente in den Zwischenraum zeigt, sodass $v_r \geq 0$ gilt. Die späteren radialen und azimuthalen Geschwindigkeitskomponenten bezeichnen wir mit u_r und u_φ .

Es wirkt keine axiale Kraft, daher gilt

$$u_z = v_B$$

während der gesamten Bewegung. Der anfängliche Drehimpuls ist

$$L(a) = mav_\varphi.$$

Der Erhaltungssatz aus Teil (c) ergibt

$$mru_\varphi = mav_\varphi + \frac{eB}{2}(r^2 - a^2).$$

An der Anode gilt

$$u_\varphi(b) = \frac{a}{b}v_\varphi + \frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

Die Energieerhaltung zwischen den beiden Zylindern ergibt

$$\frac{1}{2}m [u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 + v_B^2] = \frac{1}{2}m [v_r^2 + v_\varphi^2 + v_B^2] + eV.$$

Die axialen kinetischen Energien heben sich auf. Mit der Definition

$$W = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}},$$

erhalten wir

$$u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 = W^2.$$

Die Bedingung für das Erreichen der Anode lautet somit

$$\left| av_\varphi + \frac{eB}{2m}(b^2 - a^2) \right| \leq bW.$$

Bei $B = 0$ gilt $|av_\varphi| < bW$. Wird das positive Feld erhöht, so wird die obere Grenze erreicht, wenn

$$av_\varphi + \frac{eB_c}{2m}(b^2 - a^2) = bW.$$

Auflösen ergibt

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}} - av_\varphi \right].$$

Dass v_B nicht vorkommt, spiegelt die Tatsache wider, dass die axiale Bewegung weder den Abstand von der Zylinderachse verändert noch Energie mit der transversalen Bewegung austauscht.

Um zu überprüfen, dass die Bedingung an der Anode keinen früheren radialen Umkehrpunkt übersieht, setzen wir

$$s = \ln(r/a), \quad \alpha = \frac{eBa}{2m}, \quad \beta = v_\varphi - \alpha.$$

Die Drehimpuls- und Energiegleichungen ergeben

$$u_r^2(s) = v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m \ln(b/a)} s - (\alpha e^s + \beta e^{-s})^2.$$

Die zweite Ableitung lautet

$$\frac{d^2 u_r^2}{ds^2} = -4\alpha^2 e^{2s} - 4\beta^2 e^{-2s} \leq 0.$$

Somit ist u_r^2 als Funktion von s konkav. Ist es an beiden Zylindern nichtnegativ, so ist es im gesamten Zwischenraum nichtnegativ. Die oben verwendete Bedingung bestimmt daher die tatsächliche Sperrgrenze.

Setzt man $v_r = v_\varphi = 0$, erhält man wieder Teil (e). Setzt man $V = 0$, $v_\varphi = 0$ und $v_r = v_0$, erhält man wieder Teil (b).

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Gezeiten auf dem offenen Ozean im Erde-Mond-System

In dieser Aufgabe betrachten wir einige grundlegende Eigenschaften der Stärke der Gezeiten auf dem offenen Ozean der Erde. Wir vereinfachen die Aufgabe durch die folgenden Annahmen:

- (i) Erde und Mond werden als isoliertes System betrachtet,
- (ii) der Abstand zwischen Mond und Erde wird als konstant angenommen,
- (iii) die Erde wird als vollständig von einem Ozean bedeckt angenommen,
- (iv) die dynamischen Auswirkungen der Rotation der Erde um ihre Achse werden vernachlässigt, und
- (v) die Gravitationsanziehung der Erde kann so bestimmt werden, als wäre ihre gesamte Masse im Erdmittelpunkt konzentriert.

Die folgenden Daten sind gegeben:

Masse der Erde: $M = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Masse des Mondes: $M_m = 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

Radius der Erde: $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$

Abstand zwischen Erdmittelpunkt und Mondmittelpunkt:

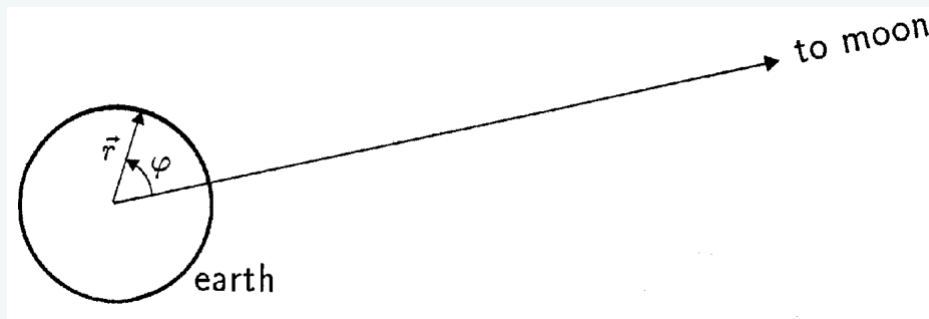
$L = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m}$

Gravitationskonstante: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

a) Mond und Erde bewegen sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihren gemeinsamen Schwerpunkt C . Wie weit ist C vom Erdmittelpunkt entfernt? (Bezeichnen Sie diesen Abstand mit l .)

Bestimmen Sie den Zahlenwert von ω . (2 Punkte)

Wir verwenden nun ein Bezugssystem, das mit dem Mond und dem Erdmittelpunkt um C mitrotiert. In diesem Bezugssystem ist die Form der Flüssigkeitsoberfläche der Erde zeitlich unveränderlich.



In der Ebene P , die durch C verläuft und senkrecht zur Rotationsachse steht, lässt sich die Lage eines Massenpunkts auf der Flüssigkeitsoberfläche der Erde durch die Polarkoordinaten r, φ beschreiben, wie in der Abbildung dargestellt. Dabei ist r der Abstand vom Erdmittelpunkt.

Wir untersuchen die Form

$$r(\varphi) = R + h(\varphi)$$

der Flüssigkeitsoberfläche der Erde in der Ebene P .

b) Betrachten Sie einen Massenpunkt (Masse m) auf der Flüssigkeitsoberfläche der Erde (in der Ebene P). In unserem Bezugssystem wirken auf ihn eine Zentrifugalkraft sowie die Gravitationskräfte des Mondes und der Erde. Geben Sie einen Ausdruck für die diesen drei Kräften entsprechende potenzielle Energie an.

Hinweis: Jede Kraft $F(r)$, die bezüglich eines Ursprungs radial gerichtet ist, ist die negative Ableitung einer kugelsymmetrischen potenziellen Energie $V(r)$:

$$F(r) = -V'(r). \text{ (3 Punkte)}$$

c) Bestimmen Sie anhand der gegebenen Größen M, M_m usw. die näherungsweise Form $h(\varphi)$ des Flutbergs. Wie groß ist in diesem Modell der Höhenunterschied zwischen Hochwasser und Niedrigwasser in Metern?

Sie dürfen den Näherungsausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \theta}} \approx 1 + a \cos \theta + \frac{1}{2}a^2(3 \cos^2 \theta - 1),$$

verwenden, der für a sehr viel kleiner als eins gilt.

Verwenden Sie bei dieser Untersuchung vereinfachende Näherungen, wo immer sie gerechtfertigt sind. (5 Punkte)

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- a)** Der Schwerpunkt liegt in Richtung des Mondes im Abstand

$$l = \frac{M_m L}{M + M_m} \approx 4.6 \times 10^6 \text{ m}$$

vom Erdmittelpunkt. Die Winkelgeschwindigkeit beträgt

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M + M_m)}{L^3}} \approx 2.67 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

- b)** Bis auf eine additive Konstante gilt

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2}m\omega^2 (r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi).$$

- **c)** Die Form der Gezeitenverformung in führender Ordnung ist

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi,$$

wobei die Konstante $h_{\min}$ den Bezugsmeeresspiegel festlegt. Gleichwertig ergibt sich relativ zur mittleren Höhe $\bar{h}_P$ entlang des Querschnitts

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi \approx (0.27 \text{ m}) \cos 2\varphi.$$

Hochwasser tritt bei $\varphi = 0, \pi$ auf, Niedrigwasser bei $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$. Der Höhenunterschied beträgt

$$\Delta h = \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \approx 0.53 \text{ m}.$$

Lösung

a)

Der Schwerpunkt liegt auf der Verbindungslinie zwischen Erde und Mond. Für die Abstände von diesem Schwerpunkt gilt

$$Ml = M_m(L - l),$$

und daher

$$l = \frac{M_m}{M + M_m} L = \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22}} (3.84 \times 10^8) = 4.631 \dots \times 10^6 \text{ m}.$$

Somit liegt C im Inneren der Erde, da $l < R$.

Die Erde bewegt sich auf einem Kreis mit dem Radius l um C . Die Gravitationsanziehung durch den Mond liefert die Zentripetalkraft:

$$M\omega^2 l = \frac{GM M_m}{L^2}.$$

Einsetzen des Ausdrucks für l ergibt

$$\omega^2 = \frac{G(M + M_m)}{L^3}.$$

Numerisch ergibt sich

$$\omega = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22})}{(3.84 \times 10^8)^3}} = 2.67 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

Außerdem verwenden wir die exakte Beziehung

$$\omega^2 l = \frac{GM_m}{L^2}.$$

b)

Wir legen den Ursprung in den Erdmittelpunkt und wählen $\varphi = 0$ in Richtung des Mondes. Der Mond und C liegen dann in dieser Richtung in den Abständen L bzw. l .

Nach dem Kosinussatz beträgt der Abstand des Massenpunkts vom Mond

$$d = \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}.$$

Da der Punkt in der Ebene senkrecht zur Rotationsachse durch C liegt, beträgt sein Abstand von dieser Achse

$$s = \sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi}.$$

Die potenziellen Energien im Gravitationsfeld sind

$$V_E = -\frac{GMm}{r}, \quad V_m = -\frac{GM_m m}{d}.$$

Die Zentrifugalkraft ist von der Rotationsachse weg gerichtet und hat den Betrag $m\omega^2 s$. Daher gilt

$$-\frac{dV_{\text{cf}}}{ds} = m\omega^2 s \implies V_{\text{cf}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 s^2.$$

Addition der drei Beiträge ergibt

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2}m\omega^2(r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) + \text{Konstante.}$$

c)

Für eine ruhende Flüssigkeit erfordert das hydrostatische Gleichgewicht

$$\nabla p = -\rho \nabla \Phi, \quad \Phi = \frac{V}{m}.$$

Entlang der freien Oberfläche ist der Druck konstant, daher muss diese Oberfläche eine Äquipotentialfläche von Φ sein.

Da

$$\frac{R}{L} = 0.0166 \ll 1,$$

entwickeln wir das Mondpotenzial bis zur zweiten Ordnung in r/L :

$$-\frac{GM_m}{d} \approx -\frac{GM_m}{L} - \frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

Das Zentrifugalpotenzial pro Masseneinheit ist

$$-\frac{1}{2}\omega^2(r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}\omega^2 l^2 + \omega^2 lr \cos \varphi.$$

Mit der in Teil **a)** gefundenen Beziehung gilt

$$-\frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi + \omega^2 lr \cos \varphi = 0.$$

Somit wird der räumlich konstante Anteil des Gravitationsfeldes des Mondes durch den entsprechenden Zentrifugalterm aufgehoben. Fassen wir die ortsunabhängigen Terme zu einer Konstanten zusammen, ergibt sich

$$\Phi(r, \varphi) \approx -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{GM_m r^2}{2L^3}(3 \cos^2 \varphi - 1) + \text{Konstante}.$$

Nun setzen wir $r = R + h(\varphi)$ mit $|h| \ll R$. Das Erdpotenzial wird zu

$$-\frac{GM}{R+h} \approx -\frac{GM}{R} + \frac{GM}{R^2}h = -\frac{GM}{R} + gh,$$

wobei

$$g = \frac{GM}{R^2} = 9.83 \text{ m s}^{-2}.$$

In den kleineren Zentrifugal- und Mondtermen dürfen wir $r = R$ setzen. Beispielsweise beträgt die Zentrifugalkorrektur zum Koeffizienten von h , bezogen auf g , lediglich

$$\frac{\omega^2 R}{g} = 4.62 \times 10^{-6}.$$

Das bei R ausgewertete Zentrifugalpotenzial ist innerhalb von P unabhängig von φ und trägt somit nur zum konstanten Oberflächenniveau bei. Die Äquipotentialbedingung vereinfacht sich daher zu

$$gh(\varphi) - \frac{GM_m R^2}{2L^3}(3 \cos^2 \varphi - 1) = \text{Konstante}.$$

Folglich gilt

$$h(\varphi) = H + \frac{M_m R^4}{2ML^3}(3 \cos^2 \varphi - 1),$$

wobei H unabhängig von φ ist. Diese Konstante wird durch den Bezugsmeeresspiegel oder eine Volumennormierung festgelegt; die Winkelabhängigkeit der Gezeitenverformung hängt nicht von ihr ab.

Schreiben wir das Ergebnis relativ zu seinem Minimum, erhalten wir

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi.$$

Alternativ ergibt sich mit $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi.$$

Die Oberfläche besitzt somit zwei gleich hohe Maxima entlang der Verbindungslinie zwischen Erde und Mond: eines auf der dem Mond zugewandten Seite und eines auf der gegenüberliegenden Seite. Ihre beiden Minima liegen in P senkrecht zu dieser Linie. Die Gleichheit der beiden Flutberge gilt bis zur berücksichtigten Ordnung in R/L .

Der Unterschied zwischen Maximum und Minimum beträgt

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \\ &= \frac{3}{2} \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24}} \frac{(6.37 \times 10^6)^4}{(3.84 \times 10^8)^3} \text{ m} \\ &= 0.532447 \dots \text{ m}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\Delta h \approx 0.53 \text{ m}.$$

Die Amplitude relativ zum Mittelwert in P ist halb so groß, also ungefähr 0.27 m. Diese kleine Verformung bestätigt die Gültigkeit der linearen Entwicklung in h/R .

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.