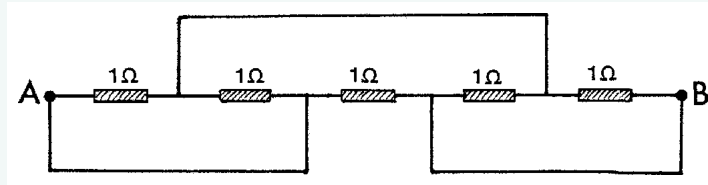


المسألة 1: خمس مسائل قصيرة غير مترابطة (شبكة مقاومات، متزلج على تل، السعة الحرارية لفلز، درع حراري للإشعاع، المجال المغناطيسي بين موصلين)

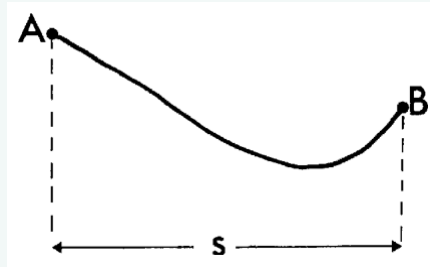
(الأجزاء الخمسة لهذه المسألة غير مترابطة)

(a) وُصلت خمس مقاومات، قيمة كل منها 1Ω ، كما هو مبين في الشكل. مقاومة أسلاك التوصيل (الخطوط المتصلة) مهملة.



أوجد المقاومة المكافئة R بين A و B. (1 نقطة)

(b)



ينطلق متزلج من السكون عند النقطة A وينزل هابطاً التل، دون أن ينعطف أو يستخدم المكابح. معامل الاحتكاك هو μ . وعندما يتوقف عند النقطة B، تكون إزاحته الأفقية s . ما فرق الارتفاع h بين النقطتين A و B؟ (سرعة المتزلج صغيرة بحيث يمكن إهمال الضغط الإضافي على الثلج الناتج عن انحناء المسار. أهمل أيضاً مقاومة الهواء واعتماد μ على سرعة المتزلج). (1.5 نقطة)

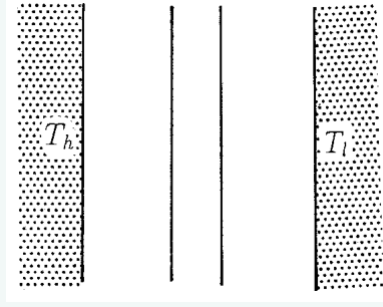
(c) تُسخَّن قطعة فلزية معزولة حرارياً تحت الضغط الجوي بواسطة تيار كهربائي، بحيث تتلقى طاقة كهربائية بقدرة ثابتة P . يؤدي ذلك إلى ازدياد درجة الحرارة المطلقة T للفلز مع الزمن t وفق العلاقة الآتية:

$$T(t) = T_0[1 + a(t - t_0)]^{1/4}.$$

حيث a و t_0 و T_0 ثوابت. أوجد السعة الحرارية $C_p(T)$ للفلز (وهي تعتمد على درجة الحرارة ضمن مجال درجات الحرارة في التجربة). (2 نقطة)

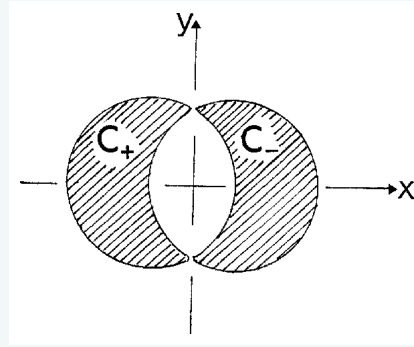
(d) سطح مستوي أسود عند درجة حرارة مرتفعة ثابتة T_h يوازي سطحاً مستويّاً أسود آخر عند درجة حرارة منخفضة ثابتة T_l . ويوجد فراغ بين اللوحين.

لتقليل معدل انتقال الحرارة بالإشعاع، يوضع بين السطح الساخن والسطح البارد، وبالتوازي معهما، درع حراري يتكون من لوحين رقيقين أسودين معزولين حرارياً أحدهما عن الآخر. وبعد مرور بعض الوقت، تتحقق حالة مستقرة.



بأي عامل ξ ينخفض معدل انتقال الحرارة في الحالة المستقرة بسبب وجود الدرع الحراري؟ أهمل تأثيرات الحواف الناتجة عن الأبعاد المحدودة للسطحين. (1.5 نقطة)

(e) يحمل موصلان مستقيمان طويلان جداً وغير مغناطيسيين، C_+ و C_- ، معزولان أحدهما عن الآخر، تياراً I في اتجاه z الموجب والسالب، على الترتيب. يحد المقطعين العرضيين للموصلين (المظللين بخطوط مائلة في الشكل) دائرتان قطر كل منهما D في المستوى $y-x$ ، والمسافة بين مركزيهما $D/2$. وبذلك تكون مساحة كل من المقطعين العرضيين الناتجين $D^2 \left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3} \right)$. يتوزع التيار في كل موصل بانتظام على المقطع العرضي.



أوجد المجال المغناطيسي $B(x, y)$ في الحيز بين الموصلين. (4 نقاط)
نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- (a) • $R = \frac{1}{2} \Omega = 0.5 \Omega$.
- (b) • $h = \mu s$ ، حيث تقع A أعلى من B.
- (c) • $C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4}$ ، بوحدة J K^{-1} عند استخدام وحدات النظام الدولي.
- (d) • $\xi = \frac{\dot{Q}_0}{\dot{Q}_{\text{shield}}} = 3$ ، انخفاض إلى الثلث، $\dot{Q}_{\text{shield}} = \frac{\dot{Q}_0}{3}$.
- (e) • في جميع أنحاء الفجوة العدسية الشكل،

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{6\mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3})D} \hat{\mathbf{y}}.$$

المجال منتظم ويتجه في اتجاه y الموجب.

الحل

(a)

لتكن قيمة كل مقاومة $r = 1 \Omega$ ، ولنرمز إلى نقاط التوصيل الداخلية الأربعة بالرموز N_1, N_2, N_3, N_4 من اليسار إلى اليمين. تجعل أسلاك التوصيل المثالية النقاط الآتية عقدًا كهربائية واحدة:

$$A = N_2, \quad N_1 = N_4 = X, \quad N_3 = B.$$

وعليه، تصل كل من المقاومتين الأولى والثانية بين A و X، وهما موصولتان على التوازي. وتصل كل من المقاومتين الرابعة والخامسة بين X و B، وهما أيضًا موصولتان على التوازي:

$$R_{AX} = R_{XB} = \frac{r}{2}.$$

تشكل هاتان المقاومتان المكافئتان فرعًا موصولًا على التوالي من A إلى B، مقاومته $r/2 + r/2 = r$. وتصل المقاومة الثالثة بين A و B مباشرة، فتتشكل فرعًا آخر مقاومته r . إذن

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}, \quad \boxed{R = \frac{r}{2} = 0.5 \Omega.}$$

(b)

لتكن θ الزاوية المحلية التي يصنعها مسار المتزلج مع الاتجاه الأفقي، و $d\ell$ عنصرًا من طول المسار. بإهمال القوة العمودية الإضافية الناتجة عن الانحناء، وفقًا للمطلوب، نحصل على

$$N = mg \cos \theta.$$

مقدار قوة الاحتكاك هو μN ، واتجاهها معاكس للحركة. لذلك تكون الطاقة المبذولة على امتداد المسار

$$E_{\text{fr}} = \int_A^B \mu mg \cos \theta d\ell.$$

في المسار المبين، يزداد الإحداثي الأفقي طوال الحركة، وتكون

$$dx = \cos \theta d\ell.$$

ومن ثم

$$E_{\text{fr}} = \mu mg \int_A^B dx = \mu mgs.$$

يبدأ المتزلج حركته من السكون وينتهي إلى السكون، لذا فإن النقص في طاقة وضع الجاذبية يساوي الطاقة المبذولة بالاحتكاك. وبكتابة $h = y_A - y_B$

$$mgh = \mu mgs, \quad \boxed{h = \mu s.}$$

ضمن التقريب المذكور، لا تعتمد النتيجة إلا على الإزاحة الأفقية.

(c)

الفلز معزول حراريًا، لكن الشغل الكهربائي يزوده بالطاقة بمعدل P . عند ضغط جوي ثابت p ، يعطي القانون الأول للديناميكا الحرارية

$$dU = P dt - p dV.$$

بما أن الإنتالبي هو $H = U + pV$ ، وأن $dp = 0$ ، فإن

$$dH = P dt.$$

باستخدام السعة الحرارية الكلية للقطعة عند ضغط ثابت،

$$C_p(T) = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p,$$

نحصل على

$$P = C_p(T) \frac{dT}{dt}.$$

نرفع طرفي علاقة درجة الحرارة المعطاة إلى القوة الرابعة:

$$T^4 = T_0^4 [1 + a(t - t_0)].$$

بالتفاضل،

$$4T^3 \frac{dT}{dt} = aT_0^4.$$

إذن

$$C_p(T) = \frac{4PT^3}{aT_0^4} = \frac{4P}{aT_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3.$$

وهكذا تتناسب السعة الحرارية طردياً مع T^3 ضمن مجال درجات الحرارة في التجربة. وبما أن وحدة a هي s^{-1} ، فإن وحدة هذا التعبير هي $J K^{-1}$.

(d)

لسطحين أسودين متوازيين مع إهمال تأثيرات الحواف، يعطي قانون ستيفان-بولتزمان كثافة تدفق الحرارة الإشعاعي الصافي

$$q_0 = \sigma (T_h^4 - T_l^4)$$

قبل إدخال الدرع.

لتكن T_1 و T_2 درجتَي حرارة لوحَي الدرع الرقيقين، مرتبَتين من الجانب الساخن إلى الجانب البارد. تكون درجة الحرارة واحدة على وجهي كل لوح رقيق. في الحالة المستقرة، لا تتراكم الطاقة في أي من اللوحين، لذا تكون كثافة تدفق الحرارة الصافي q متساوية عبر الفجوات المفرغة الثلاث جميعاً:

$$q = \sigma(T_h^4 - T_1^4) = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = \sigma(T_2^4 - T_l^4).$$

بجمع الفروق الثلاثة لدرجات الحرارة نحصل على

$$3q = \sigma(T_h^4 - T_l^4) = q_0.$$

تنطبق النسبة نفسها على معدل انتقال الحرارة الكلي:

$$\frac{\dot{Q}_{\text{shield}}}{\dot{Q}_0} = \frac{1}{3}.$$

لذلك ينخفض معدل انتقال الحرارة بعامل

$$\xi = 3.$$

(e)

لتكن مساحة المقطع العرضي لأي من الموصلين الفعليين

$$A_c = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) D^2.$$

مقدار كثافة التيار المنتظمة هو

$$J = \frac{I}{A_c}.$$

نصف قطر كل دائرة هو $D/2$. وباختيار نقطة الأصل المبينة في الشكل، يكون موضعاً مركزيهما

$$\mathbf{r}_+ = -\frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{r}_- = \frac{D}{4} \hat{\mathbf{x}}.$$

نستخدم مبدأ التراكب لتمثيل توزيع التيار الفعلي بأسطوانتين دائريتين كاملتين:

- أسطوانة يسرى تحمل كثافة تيار منتظمة $J\hat{\mathbf{z}}$ ؛
- أسطوانة يمنى تحمل كثافة تيار منتظمة $-J\hat{\mathbf{z}}$.

في منطقة تداخلهما، تلغي كثافتا التيار إحداهما الأخرى. وفي كل منطقة هلالية، تكون كثافة التيار المتبقية مطابقة تماماً لكثافة التيار في الموصل الفعلي. وهكذا يعيد هذا التمثيل إنتاج توزيع التيار الفيزيائي.

لأسطوانة دائرية طويلة جداً تحمل كثافة تيار منتظمة $J\hat{\mathbf{z}}$ ، يعطي التناظر الأسطواني وقانون أمبير، عند مسافة شعاعية ρ داخل الأسطوانة،

$$B(\rho) 2\pi\rho = \mu_0 J \pi \rho^2, \quad B(\rho) = \frac{\mu_0 J \rho}{2}.$$

بالصيغة المتجهة، لأسطوانة مركزها عند $\mathbf{r}_c$ ،

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{2} \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c).$$

تقع كل نقطة في الفجوة العدسية الشكل داخل كلتا الأسطوانتين الافتراضيتين. ومجالاهما هناك هما

$$\mathbf{B}_+(x, y) = \frac{\mu_0 J}{2} \left[-y \hat{\mathbf{x}} + \left(x + \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right],$$

$$\mathbf{B}_-(x, y) = \frac{\mu_0 J}{2} \left[y \hat{\mathbf{x}} - \left(x - \frac{D}{4} \right) \hat{\mathbf{y}} \right].$$

بجمعهما تلغى جميع الحدود المعتمدة على الإحداثيات:

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 J D}{4} \hat{\mathbf{y}}.$$

بالتعويض عن $J = I/A_c$ ،

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\mu_0 I D}{4 A_c} \hat{\mathbf{y}} = \frac{6 \mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3}) D} \hat{\mathbf{y}}.$$

ينطبق هذا المجال المنتظم في جميع أنحاء الفجوة المحددة بتحقيق المتباينتين الآتيتين معاً

$$\left(x + \frac{D}{4} \right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}, \quad \left(x - \frac{D}{4} \right)^2 + y^2 < \frac{D^2}{4}.$$

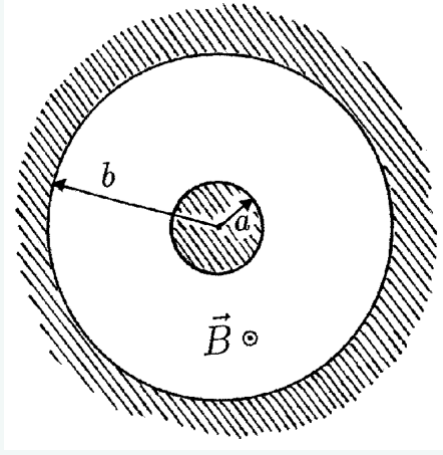
ويتجه إلى الأعلى في الشكل، بما يتفق مع قاعدة اليد اليمنى لكلا التيارين.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: إلكترونات بين أسطوانتين متحدتي المحور في مجال مغناطيسي (القطع المغناطيسي)

الحيز بين موصلين أسطوانيين متحدتي المحور مفرغ من الهواء. نصف قطر الأسطوانة الداخلية هو a ، ونصف القطر الداخلي للأسطوانة الخارجية هو b ، كما هو موضح في الشكل أدناه. يمكن إكساب الأسطوانة الخارجية، المسماة المصعد، جهداً موجباً V بالنسبة إلى الأسطوانة الداخلية. ويوجد أيضاً مجال مغناطيسي ساكن ومتجانس $\vec{B}$ موازٍ لمحور الأسطوانتين ومرتجه إلى خارج مستوى الشكل. تهمل الشحنات المستحثة في الموصلين.

ندرس ديناميكا إلكترونات كتلة سكونها m وشحنتها $-e$. تُطلق الإلكترونات من سطح الأسطوانة الداخلية.



(a) يُطبَّق أولاً فرق الجهد V ، مع بقاء $\vec{B} = 0$. يُطلق إلكترون بسرعة مهمة من سطح الأسطوانة الداخلية. حدّد مقدار سرعته v عندما يصطدم بالمصعد. أعطِ الإجابة في كلٍّ من الحالة التي تكفي فيها المعالجة غير النسبية والحالة التي لا تكفي فيها. (نقطة واحدة)

تكفي المعالجة غير النسبية في الأجزاء المتبقية من هذه المسألة.

(b) الآن $V = 0$ ، لكن المجال المغناطيسي المتجانس $\vec{B}$ موجود. ينطلق إلكترون بسرعة ابتدائية $\vec{v}_0$ في الاتجاه الشعاعي. عند مجالات مغناطيسية أكبر من قيمة حرجة B_c ، لن يصل الإلكترون إلى المصعد. ارسم رسماً تخطيطياً لمسار الإلكترون عندما تكون B أكبر قليلاً من B_c . حدّد B_c . (نقطتان)

من الآن فصاعداً، يوجد كلٌّ من فرق الجهد V والمجال المغناطيسي المتجانس $\vec{B}$.

(c) يُكسب المجال المغناطيسي الإلكترون زخماً زاوياً غير صفري L حول محور الأسطوانتين. اكتب معادلة لمعدل تغيّر الزخم الزاوي dL/dt . بين أن هذه المعادلة تقتضي أن يكون

$$L - keBr^2$$

ثابتاً أثناء الحركة، حيث k عدد مجرد محدد. وتمثل r هنا المسافة من محور الأسطوانتين. حدّد قيمة k . (3 نقاط)

(d) اعتبر إلكترونًا يُطلق من الأسطوانة الداخلية بسرعة مهمة، ولا يصل إلى المصعد، لكنه يبلغ مسافة قصوى من محور الأسطوانتين تساوي r_m . حدّد مقدار السرعة v عند النقطة التي تكون فيها المسافة الشعاعية عظمى، بدلالة r_m . (نقطة واحدة)

(e) نرغب في استخدام المجال المغناطيسي لتنظيم تيار الإلكترونات المتجه إلى المصعد. عندما تكون B أكبر من مجال مغناطيسي حرج B_c ، فإن إلكترونًا يُطلق بسرعة مهمة لن يصل إلى المصعد. حدّد B_c . (نقطة واحدة)

(f) إذا أُطلقت الإلكترونات بتسخين الأسطوانة الداخلية، فسيكون للإلكترون عمومًا سرعة ابتدائية غير صفيرية عند سطح الأسطوانة الداخلية. مركبة السرعة الابتدائية الموازية لـ $\vec{B}$ هي v_B ، والمركبتان المتعامدتان مع $\vec{B}$ هما v_r (في الاتجاه الشعاعي) و v_ϕ (في الاتجاه السمتي، أي المتعامد مع الاتجاه الشعاعي).

حدّد في هذه الحالة المجال المغناطيسي الحرج B_c للوصول إلى المصعد. (نقطتان)

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

تمثل B هنا مقدار المجال المغناطيسي، و c سرعة الضوء، وتعني السرعة السمتية الموجبة حركة عكس اتجاه عقارب الساعة في الشكل. لذا فإن v_ϕ في الجزء (f) كمية ذات إشارة.

• (a) عندما يكون $eV \ll mc^2$.

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

وفي المعالجة النسبية،

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

• (b)

$$B_c = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

المسار قوس دائري يُقَطَّع عكس اتجاه عقارب الساعة، ونصف قطره $R = mv_0/(eB)$. عندما تكون B أعلى بقليل من B_c ، تكون المسافة القصوى للإلكترون من محور الأسطوانتين أقل بقليل من b ، ويعود إلى الأسطوانة الداخلية.

• (c)

$$\frac{dL}{dt} = eBr\dot{r}, \quad L - \frac{eB}{2}r^2 = \text{ثابت}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

• (d)

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

وبصورة مكافئة،

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

• (e)

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

• (f) للإلكترون منبعث إلى داخل الحيز الفاصل،

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} + \frac{2eV}{m} - av_\varphi \right].$$

وهذه النتيجة مستقلة عن v_B .

الحل

نختار الاتجاه الموجب للمحور z في اتجاه $\vec{B}$ ، إلى خارج الشكل. عندئذ يكون الاتجاه السمتي الموجب عكس اتجاه عقارب الساعة. ولتكن L المركبة ذات الإشارة على المحور z للزخم الزاوي الميكانيكي للإلكترون. بعد الجزء (a)، نستخدم الميكانيكا غير النسبية وفقاً لما تنص عليه المسألة.

(a)

يزداد الجهد الكهربائي بمقدار V بين الأسطوانة الداخلية والمصعد. وبما أن شحنة الإلكترون هي $-e$ ، فإن طاقة وضعه تنخفض بمقدار eV . ومن ثم يعطي حفظ الطاقة

$$K_{\text{final}} = eV.$$

عندما تكون هذه الطاقة صغيرة مقارنة بطاقة السكون، أي $eV \ll mc^2$ ،

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV,$$

ومن ثم

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

أما في المعالجة النسبية،

$$(\gamma - 1)mc^2 = eV, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

إذن

$$\gamma = 1 + \frac{eV}{mc^2},$$

و

$$v = c \sqrt{1 - \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-2}}.$$

بتوسيع هذا التعبير عندما يكون $eV/(mc^2) \ll 1$ ، نستعيد النتيجة غير النسبية.

(b)

القوة المغناطيسية متعامدة مع السرعة، ولذلك لا تبذل شغلاً. يبقى مقدار سرعة الإلكترون v_0 ، وتكون حركته المتعامدة مع المجال المغناطيسي المنتظم دائرية. يُستنتج نصف قطر المدار R من

$$\frac{mv_0^2}{R} = ev_0B,$$

فنحصل على

$$R = \frac{mv_0}{eB}.$$

نختار نقطة الإطلاق $P = (a, 0)$ ، بحيث تكون السرعة الابتدائية في الاتجاه الموجب للمحور x . وبما أن

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B},$$

فإن القوة الابتدائية تتجه في الاتجاه الموجب للمحور y . لذلك يكون مركز الدائرة

$$C = (a, R)$$

ومعادلتها

$$(x - a)^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

المسافة من محور الأسطوانتين O إلى مركز المدار هي

$$OC = \sqrt{a^2 + R^2}.$$

وبالتالي، فإن المسافة الشعاعية القصوى التي يبلغها الإلكترون هي

$$r_{\text{max}} = \sqrt{a^2 + R^2} + R.$$

عند المجال الحرج، تساوي هذه المسافة القصوى b :

$$\sqrt{a^2 + R_c^2} + R_c = b.$$

بالتربيع بعد إعادة الترتيب نحصل على

$$a^2 + R_c^2 = (b - R_c)^2, \quad R_c = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

ومن ثم

$$B_c = \frac{mv_0}{eR_c} = \frac{2mbv_0}{e(b^2 - a^2)}.$$

لإنشاء الرسم التخطيطي المطلوب، ارسم حدّي الأسطوانتين المتحدّي المركز، واجعل الإلكترون ينطلق من الحد الداخلي عند تقاطعه مع الخط الشعاعي المتجه إلى اليمين. يكون المماس الابتدائي لمساره متجهاً مباشرة إلى الخارج، وينحني المسار إلى الأعلى، متبعاً الدائرة التي مركزها $C = (a, R)$ عكس اتجاه عقارب الساعة. وتقع أبعد نقطة له عن O على الشعاع OC . عندما تكون B أكبر قليلاً من B_c ، تقع هذه النقطة إلى الداخل من المصعد بقليل. ثم يتحرك الإلكترون نحو الداخل ويصطدم بالأسطوانة الداخلية مجدداً. وتكون الزاوية القطبية لنقطة العودة

$$\varphi_{\text{return}} = 2 \arctan(R/a).$$

(c)

القوة الكهربائية شعاعية، ولذلك لا تولّد عزماً حول محور الأسطوانتين.

بكتابة السرعة على الصورة

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r\dot{\varphi} \hat{\varphi} + v_z \hat{z},$$

تكون القوة المغناطيسية

$$-e \vec{v} \times \vec{B} = -eBr\dot{\varphi} \hat{r} + eBr\dot{r} \hat{\varphi}.$$

مركبتها السمتية هي $F_\varphi = eBr\dot{r}$. ولذلك،

$$\frac{dL}{dt} = rF_\varphi = eBr\dot{r}.$$

بما أن B ثابت،

$$eBr\dot{r} = \frac{eB}{2} \frac{d(r^2)}{dt}.$$

ينتج عن ذلك أن

$$\frac{d}{dt} \left(L - \frac{eB}{2} r^2 \right) = 0,$$

ومن ثم

$$L - \frac{eB}{2} r^2 = \text{ثابت}, \quad k = \frac{1}{2}.$$

وعلى وجه الخصوص، بين لحظة الإطلاق عند $r = a$ وأي موضع لاحق،

$$L(r) = L(a) + \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

(d)

ينطلق الإلكترون بسرعة مهمة، ولذلك $L(a) = 0$. إذن

$$L(r) = \frac{eB}{2} (r^2 - a^2).$$

لا يولّد أيّ من المجالين قوة محورية، ولذلك تبقى السرعة المحورية، المنعدمة ابتدائياً، صفراً. وعند المسافة الشعاعية القصوى r_m ، تنعدم السرعة الشعاعية أيضاً. ومن ثم تكون السرعة هناك سمتية تماماً، مما يعطي

$$L(r_m) = mr_mv.$$

وبالتالي،

$$mr_mv = \frac{eB}{2}(r_m^2 - a^2),$$

و

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m}.$$

يمكن استنتاج تعبير مكافئ من حفظ الطاقة. ففي الحيز الأسطواني الفاصل الخالي من الشحنات، يعطي قانون غاوس ثابت $rE_r =$ وعندما يكون جهد الأسطوانة الداخلية صفراً وجهد المصعد V ، يكون الجهد

$$\Phi(r) = V \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

بما أن المجال المغناطيسي لا يبذل شغلاً،

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Phi(r_m),$$

مما يعطي

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

يجب أن يتفق هذان التعبيران عند نصف قطر الانقلاب الفعلي r_m .

(e)

عند المجال الحرج، تكون المسافة الشعاعية القصوى للإلكترون مساوية تماماً لـ b . ويصل إلى المصعد مماسياً، بسرعة شعاعية تساوي صفراً.

يحدد حفظ الطاقة مقدار سرعته هناك:

$$v_b = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

باستخدام الجزء (d) مع $r_m = b$ ،

$$v_b = \frac{eB_c(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

ولذلك،

$$B_c = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \frac{b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{8mV}{e}}.$$

عندما يكون $B > B_c$ ، تتجاوز طاقة الحركة السمتية التي يقتضيها حفظ الزخم الزاوي عند $r = b$ مجموع طاقة الحركة المتاحة هناك. فلا يستطيع الإلكترون الوصول إلى المصعد.

(f)

نأخذ المركبة الشعاعية الابتدائية متجهة إلى داخل الحيز الفاصل، بحيث $v_r \geq 0$. ونرمز إلى مركبتي السرعة الشعاعية والسمتية اللاحقتين بـ u_φ و u_r .

لا توجد قوة محورية، ولذلك

$$u_z = v_B$$

طوال الحركة. والزخم الزاوي الابتدائي هو

$$L(a) = mav_\varphi.$$

يعطي قانون الحفظ من الجزء (c)

$$mru_\varphi = mav_\varphi + \frac{eB}{2}(r^2 - a^2).$$

عند المصعد،

$$u_\varphi(b) = \frac{a}{b}v_\varphi + \frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

يعطي حفظ الطاقة بين الأسطوانتين

$$\frac{1}{2}m[u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 + v_B^2] = \frac{1}{2}m[v_r^2 + v_\varphi^2 + v_B^2] + eV.$$

نُختزل طاقتا الحركة المحوريتين. وبالتعريف

$$W = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}},$$

نحصل على

$$u_r(b)^2 + u_\varphi(b)^2 = W^2.$$

إذن شرط الوصول إلى المصعد هو

$$\left| av_\varphi + \frac{eB}{2m}(b^2 - a^2) \right| \leq bW.$$

عند $B = 0$ ، يكون $|av_\varphi| < bW$. ومع زيادة المجال الموجب، يُبلِّغ الحد الأعلى عندما

$$av_\varphi + \frac{eB_c}{2m}(b^2 - a^2) = bW.$$

وبالحل،

$$B_c = \frac{2m}{e(b^2 - a^2)} \left[b\sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m}} - av_\varphi \right].$$

يعكس غياب v_B حقيقة أن الحركة المحورية لا تغيّر المسافة من محور الأسطوانتين، ولا تتبادل الطاقة مع الحركة المستعرضة.

للتحقق من أن شرط الوصول إلى المصعد لا يغفل نقطة انقلاب شعاعية سابقة، نضع

$$s = \ln(r/a), \quad \alpha = \frac{eBa}{2m}, \quad \beta = v_\varphi - \alpha.$$

تعطي معادلتا الزخم الزاوي والطاقة

$$u_r^2(s) = v_r^2 + v_\varphi^2 + \frac{2eV}{m \ln(b/a)} s - (\alpha e^s + \beta e^{-s})^2.$$

ومشتقتها الثانية هي

$$\frac{d^2 u_r^2}{ds^2} = -4\alpha^2 e^{2s} - 4\beta^2 e^{-2s} \leq 0.$$

إذن u_r^2 دالة مقعرة في s . فإذا كانت غير سالبة عند كلتا الأسطوانتين، فهي غير سالبة في كامل الحيز الفاصل. ولذلك فإن الشرط المستخدم أعلاه يحدّد القطع الفعلي.

بوضع $v_r = v_\varphi = 0$ نستعيد نتيجة الجزء (e). وبوضع $V = 0$ ، و $v_\varphi = 0$ ، و $v_r = v_0$ نستعيد نتيجة الجزء (b).

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: المد والجزر في وسط المحيط في منظومة الأرض والقمر

نتناول في هذه المسألة بعض السمات العامة لمقدار المد والجزر في وسط المحيط على الأرض. ونبسّط المسألة باعتماد الافتراضات الآتية:

- (i) تُعدّ الأرض والقمر منظومة معزولة،
- (ii) يُفترض أن المسافة بين القمر والأرض ثابتة،
- (iii) يُفترض أن الأرض مغطاة بالكامل بمحيط،
- (iv) تُهمل التأثيرات الديناميكية لدوران الأرض حول محورها، و
- (v) يمكن تحديد قوة جذب الأرض كما لو كانت كتلتها كلها مركزة في مركزها.

المعطيات الآتية معلومة:

$$M = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \text{ كتلة الأرض:}$$

$$M_m = 7.3 \cdot 10^{22} \text{ kg} \text{ كتلة القمر:}$$

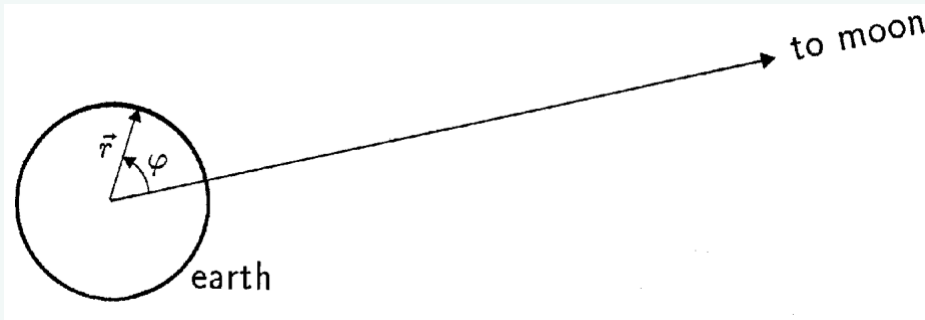
$$R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m} \text{ نصف قطر الأرض:}$$

$$L = 3.84 \cdot 10^8 \text{ m} \text{ المسافة بين مركز الأرض ومركز القمر:}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ ثابت الجذب العام:}$$

(a) يدور القمر والأرض بسرعة زاوية ω حول مركز كتلتها المشترك C . ما بُعد C عن مركز الأرض؟ (رمز إلى هذه المسافة بـ l). حدّد القيمة العددية لـ ω . (نقطتان)

نستخدم الآن إطارًا مرجعيًا يدور مع القمر ومركز الأرض حول C . ويكون شكل السطح السائل للأرض ساكنًا في هذا الإطار المرجعي.



في المستوى P المارّ بـ C والعمودي على محور الدوران، يمكن وصف موضع كتلة نقطية على السطح السائل للأرض بالإحداثيين القطبيين r, φ ، كما هو موضح في الشكل. وهنا تمثل r المسافة من مركز الأرض.

سندرس شكل السطح السائل للأرض

$$r(\varphi) = R + h(\varphi)$$

في المستوى P .

(b) اعتبر نقطة مادية (كتلتها m) على السطح السائل للأرض (في المستوى P). تؤثر فيها، في إطارنا المرجعي، قوة طرد مركزي وقوتنا جذب من القمر والأرض. اكتب تعبيرًا لطاقة الوضع المقابلة لهذه القوى الثلاث.

ملاحظة: أي قوة $F(r)$ تتجه شعاعياً بالنسبة إلى مبدأ معين تساوي سالب مشتقة طاقة وضع ذات تناظر كروي $V(r)$:
 $F(r) = -V'(r)$. (3 نقاط)

(c) أوجد، بدلالة الكميات المعطاة M, M_m وغيرها، الشكل التقريبي $h(\varphi)$ لانتفاخ المد. ما الفرق بالأمتار بين منسوب المد العالي ومنسوب الجزر المنخفض في هذا النموذج؟

يمكنك استخدام التعبير التقريبي

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}} \approx 1+a\cos\theta+\frac{1}{2}a^2(3\cos^2\theta-1),$$

الصالح عندما تكون a أصغر بكثير من الواحد.

استخدم في هذا التحليل تقريبات مبسطة كلما كان ذلك معقولاً. (5 نقاط)

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) يقع مركز الكتلة باتجاه القمر، على بُعد

$$l = \frac{M_m L}{M + M_m} \approx 4.6 \times 10^6 \text{ m}$$

من مركز الأرض. والسرعة الزاوية هي

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M + M_m)}{L^3}} \approx 2.67 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

• (b) مع إهمال ثابت جمعي اختياري،

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2}m\omega^2 (r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi).$$

• (c) شكل المد في التقريب الرئيس هو

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi,$$

حيث يحدّد الثابت $h_{\min}$ منسوب البحر المرجعي. وبصورة مكافئة، بالنسبة إلى متوسط الارتفاع $\bar{h}_P$ حول المقطع،

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi \approx (0.27 \text{ m}) \cos 2\varphi.$$

يحدث المد العالي عند $\varphi = 0, \pi$ ، والجزر المنخفض عند $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$. والفرق بين ارتفاعيهما هو

$$\Delta h = \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \approx 0.53 \text{ m}.$$

الحل

(a)

يقع مركز الكتلة على المستقيم الواصل بين الأرض والقمر. وبقياس المسافات منه نحصل على

$$Ml = M_m(L - l),$$

ومن ثمَّ

$$l = \frac{M_m}{M + M_m} L = \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22}} (3.84 \times 10^8) = 4.631 \dots \times 10^6 \text{ m}.$$

إذن يقع C داخل الأرض، لأن $l < R$.

تتحرك الأرض في دائرة نصف قطرها l حول C . وتوفّر قوة التجاذب بينها وبين القمر القوة الجاذبة المركزية:

$$M\omega^2 l = \frac{GM M_m}{L^2}.$$

بالتعويض عن l بتعبيرها،

$$\omega^2 = \frac{G(M + M_m)}{L^3}.$$

عددياً،

$$\omega = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11})(5.98 \times 10^{24} + 7.3 \times 10^{22})}{(3.84 \times 10^8)^3}} = 2.67 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}.$$

وسنستخدم أيضاً العلاقة الدقيقة

$$\omega^2 l = \frac{GM_m}{L^2}.$$

(b)

نضع مبدأ الإحداثيات في مركز الأرض، ونختار $\varphi = 0$ في اتجاه القمر. عندئذ يقع القمر و C على بُعدين L و l في ذلك الاتجاه.

وفق قانون جيب التمام، تكون المسافة من النقطة المادية إلى القمر

$$d = \sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}.$$

ولأن النقطة تقع في المستوى العمودي على محور الدوران المارّ بـ C ، فإن بُعدها عن ذلك المحور هو

$$s = \sqrt{r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi}.$$

طاقنا وضع الجاذبية هما

$$V_E = -\frac{GMm}{r}, \quad V_m = -\frac{GM_m m}{d}.$$

تتجه قوة الطرد المركزي بعيداً عن محور الدوران، ومقدارها $m\omega^2 s$. ومن ثمَّ

$$-\frac{dV_{cf}}{ds} = m\omega^2 s \implies V_{cf} = -\frac{1}{2}m\omega^2 s^2.$$

بجمع المساهمات الثلاث نحصل على

$$V(r, \varphi) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GM_m m}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \varphi}} - \frac{1}{2}m\omega^2 (r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) + \text{ثابت}.$$

(c)

بالنسبة إلى مائع ساكن، يتطلب الاتزان الهيدروستاتيكي أن يكون

$$\nabla p = -\rho \nabla \Phi, \quad \Phi = \frac{V}{m}.$$

الضغط ثابت على امتداد السطح الحر، لذا يجب أن يكون هذا السطح سطح تساوي جهد Φ .

بما أن

$$\frac{R}{L} = 0.0166 \ll 1,$$

نوسّع جهد القمر حتى الرتبة الثانية في r/L :

$$-\frac{GM_m}{d} \approx -\frac{GM_m}{L} - \frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

طاقة وضع الطرد المركزي لكل وحدة كتلة هي

$$-\frac{1}{2} \omega^2 (r^2 + l^2 - 2lr \cos \varphi) = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - \frac{1}{2} \omega^2 l^2 + \omega^2 lr \cos \varphi.$$

باستخدام العلاقة التي وجدناها في الجزء (a)،

$$-\frac{GM_m r}{L^2} \cos \varphi + \omega^2 lr \cos \varphi = 0.$$

إذن يُلغى الجزء المنتظم من مجال جاذبية القمر بواسطة حدّ الطرد المركزي المقابل. وبعد إدراج الحدود المستقلة عن الموضع ضمن ثابت،

$$\Phi(r, \varphi) \approx -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1) + \text{ثابت}.$$

نضع الآن $r = R + h(\varphi)$ ، حيث $|h| \ll R$. ويصبح جهد الأرض

$$-\frac{GM}{R+h} \approx -\frac{GM}{R} + \frac{GM}{R^2} h = -\frac{GM}{R} + gh,$$

حيث

$$g = \frac{GM}{R^2} = 9.83 \text{ m s}^{-2}.$$

في حدّي الطرد المركزي والقمر الأصغر مقداراً، يمكننا وضع $r = R$. فعلى سبيل المثال، لا يتجاوز التصحيح الناتج عن الطرد المركزي لمعامل h ، نسبةً إلى g ، القيمة

$$\frac{\omega^2 R}{g} = 4.62 \times 10^{-6}.$$

جهد الطرد المركزي المحسوب عند R مستقل عن φ ضمن P ، لذا لا يسهم إلا في المنسوب الثابت للسطح. ومن ثمّ يُختزل شرط تساوي الجهد إلى

$$gh(\varphi) - \frac{GM_m R^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1) = \text{ثابت}.$$

وبالتالي،

$$h(\varphi) = H + \frac{M_m R^4}{2ML^3} (3 \cos^2 \varphi - 1),$$

حيث H مستقل عن φ . يُحدّد هذا الثابت بمنسوب البحر المرجعي أو بشرط تطبيع الحجم؛ ولا يعتمد عليه التغيّر الزاوي للمد والجزر.

بكتابة النتيجة بالنسبة إلى قيمتها الصغرى نحصل على

$$h(\varphi) = h_{\min} + \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \cos^2 \varphi.$$

وبدلاً من ذلك، باستخدام $\cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$ ،

$$h(\varphi) - \bar{h}_P = \frac{3M_m R^4}{4ML^3} \cos 2\varphi.$$

لذلك يكون للسطح قيمتان عظميان متساويتان على امتداد المستقيم الواصل بين الأرض والقمر: إحداهما في الجانب المواجه للقمر والأخرى في الجانب المقابل. وتقع قيمته الصغرى في الاتجاه العمودي على ذلك المستقيم في P . ويصحّ تساوي الانتفاخين حتى الرتبة المحتفظ بها في R/L .

الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى هو

$$\begin{aligned}\Delta h &= \frac{3M_m R^4}{2ML^3} \\ &= \frac{3}{2} \frac{7.3 \times 10^{22}}{5.98 \times 10^{24}} \frac{(6.37 \times 10^6)^4}{(3.84 \times 10^8)^3} \text{ m} \\ &= 0.532447 \dots \text{ m}.\end{aligned}$$

ومن ثمّ

$$\boxed{\Delta h \approx 0.53 \text{ m}.}$$

السعة بالنسبة إلى المتوسط في P تساوي نصف هذه القيمة، أي نحو 0.27 m . ويؤكد هذا التشوّه الصغير صلاحية التوسّع الخطي في h/R .

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.