

IPhO 1995

理论题与解答 · 澳大利亚堪培拉 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iphO/1995/

题目 1: 引力红移与恒星质量的测量

(a) (3 分)

频率为 f 的光子具有由其能量决定的有效惯性质量 m 。假设其引力质量等于这一惯性质量。因此，从恒星表面发射的光子在逃离恒星引力场时会损失能量。证明：光子从恒星表面逃逸至无穷远处的频率变化 Δf 满足

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}$$

此式适用于 $\Delta f \ll f$ ，其中：

- G = 引力常量
- R = 恒星半径
- c = 光速
- M = 恒星质量。

因此，在远离恒星处测得一条已知谱线的红移，即可用来测量比值 M/R 。若已知 R ，便可确定恒星的质量。

(b) (12 分)

在一项实验中，发射一艘无人航天器，以同时测量银河系内一颗恒星的质量 M 和半径 R 。恒星表面的 He^+ 离子发射光子。利用航天器内实验舱中 He^+ 离子的共振吸收，可以监测这些光子。只有使 He^+ 离子具有朝向恒星的速度，恰好补偿红移，才会发生共振吸收。

当航天器沿径向接近恒星时，测量实验舱中 He^+ 离子在吸收共振时相对于恒星的速度 ($v = \beta c$)，得到该速度随其到恒星（最近）表面的距离 d 的变化关系。实验数据列于下表。

充分利用这些数据，用作图法确定恒星的质量 M 和半径 R 。无须估计答案的不确定度。

共振条件下的数据

速度参数	$\beta = v/c \quad (\times 10^{-5})$	3.352	3.279	3.195	3.077	2.955
到恒星表面的距离	$d \quad (\times 10^8 \text{m})$	38.90	19.98	13.32	8.99	6.67

(c) (5 分)

在这样的实验中，为了确定 R 和 M ，通常需要考虑发射光子的原子反冲所引起的频率修正。[热运动使发射谱线展宽，但不改变发射峰的位置，因此可以假定所有热效应均已考虑在内。]

(i) (4 分)

假设原子从静止状态发生衰变，产生一个光子和一个反冲原子。用 ΔE （两个原子能级之间的静能差）和原子的初始静质量 m_0 ，求出所发射光子能量 hf 的相对论表达式。

(ii) (1 分)

由此，对 He^+ 离子的相对论频率偏移 $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil}}$ 作数值估计。

你的结果应远小于 (b) 部分得到的引力红移。

数据：

光速	c	=	$3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
He 的静能	$m_0 c^2$	=	$4 \times 938 (\text{MeV})$
玻尔能量	E_n	=	$-\frac{13.6 Z^2}{n^2} (\text{eV})$
引力常量	G	=	$6.7 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

题目译自官方英文原文。

答案

- (a) 取 $\Delta f = f_\infty - f$ ，则

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}.$$

- (b) 以 $1/d$ 为横坐标、 $1/\beta$ 为纵坐标作图，所得图线近似为直线。利用全部五组测量数据，得到

$$R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ m}, \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

相应的从表面到无穷远处的相对频率变化约为 -3.46×10^{-5} 。

- (c)(i) 光子能量的精确表达式为

$$hf = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2}\right).$$

- (c)(ii) 对于 He^+ 中的 $n_i \rightarrow n_f$ 跃迁，

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right).$$

对于束缚态之间的跃迁，其绝对值小于 7.3×10^{-9} 。例如， $2 \rightarrow 1$ 跃迁给出 -5.4×10^{-9} ，比引力频移小数千倍。

解答

(a)

光子的能量为 $E = hf$ ，因此，根据题目中的假设，其有效惯性质量和引力质量为

$$m = \frac{hf}{c^2}.$$

恒星外部的引力势为

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

当光子从表面传播到无穷远处时，其引力势能增加 GMm/R 。因此，由能量守恒可得

$$h\Delta f \simeq -\frac{GMm}{R}.$$

由于光子能量的相对变化很小，在一阶近似下可以将这里的 m 视为常量。代入 $m = hf/c^2$ ，得

$$h\Delta f \simeq -\frac{GM}{R} \frac{hf}{c^2},$$

因此

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}}.$$

负号表示红移。这一近似要求 $GM/(Rc^2) \ll 1$ 。

(b)

航天器到恒星中心的距离为 $r = R + d$ 。在 R 与 $R + d$ 之间应用同样的能量论证，相对于恒星静止的观测者测得的频率 f_r 为

$$f_r \simeq f_0 \left[1 - \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) \right],$$

其中 f_0 为发射跃迁的频率。这里忽略反冲修正，并在 (c) 部分对其进行估算。

将引力引起的相对频率损失定义为正值：

$$\epsilon(d) = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right).$$

光子向外传播，而吸收光子的离子朝恒星运动。因此，离子观测到多普勒蓝移：

$$f_{\text{ion}} = \gamma(1 + \beta)f_r = f_r \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

由于 $\beta \sim 3 \times 10^{-5}$,

$$f_{\text{ion}} \simeq f_r(1 + \beta).$$

共振吸收要求 $f_{\text{ion}} = f_0$ ，因此，在一阶近似下，

$$(1 - \epsilon)(1 + \beta) \simeq 1 \implies \beta \simeq \epsilon.$$

于是，

$$\boxed{\beta = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) = \frac{GM}{Rc^2} \frac{d}{R+d}}$$

在所需精度范围内成立。

取倒数得到线性关系：

$$\frac{1}{\beta} = \frac{Rc^2}{GM} + \frac{R^2c^2}{GM} \frac{1}{d}.$$

因此，作图时取

$$Y = \frac{1}{\beta} \quad \text{对} \quad X = \frac{1}{d}.$$

将直线写为 $Y = A + BX$ ，其截距和斜率为

$$A = \frac{Rc^2}{GM}, \quad B = \frac{R^2c^2}{GM}.$$

由此可确定两个未知量：

$$\boxed{R = \frac{B}{A}}, \quad \boxed{M = \frac{c^2 B}{GA^2}}.$$

采用便于作图的坐标轴标度，五个待描点为：

$X/(10^{-9} \text{ m}^{-1})$	$Y/10^4$
0.25707	2.98329
0.50050	3.04971
0.75075	3.12989
1.11235	3.24992
1.49925	3.38409

图线近似为一条上升的直线。利用全部五个点得到的最佳拟合直线为

$$\frac{Y}{10^4} \simeq 2.8917 + 0.3249 \frac{X}{10^{-9} \text{ m}^{-1}}.$$

因此，换回未缩放的单位后，纵截距和斜率为

$$A \simeq 2.8917 \times 10^4, \quad B \simeq 3.2489 \times 10^{12} \text{ m}.$$

外推得到的横截距为 $-A/B \simeq -8.90 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$ 。

由此可得

$$R = \frac{3.2489 \times 10^{12}}{2.8917 \times 10^4} \simeq 1.12 \times 10^8 \text{ m},$$

以及

$$M = \frac{(3.0 \times 10^8)^2 (3.2489 \times 10^{12})}{(6.7 \times 10^{-11})(2.8917 \times 10^4)^2} \simeq 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

取与作图法相称的合理精度，

$$\boxed{R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ m}, \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}}.$$

从表面到无穷远处的红移为

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2} = -\frac{1}{A} \simeq -3.46 \times 10^{-5}.$$

这也验证了整个推导中所用弱场近似的适用性。

(c)(i)

设初态原子的静质量为 m_0 ，末态原子的静质量为 m_1 。两个内部态的静能之差为

$$\Delta E = (m_0 - m_1)c^2.$$

将发射光子的能量记为 $E_\gamma = hf$ 。由于初态原子静止，动量守恒要求反冲原子的动量大小为

$$p = \frac{E_\gamma}{c}.$$

利用末态原子的相对论能量—动量关系，由能量守恒得到

$$m_0 c^2 = E_\gamma + \sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2} = E_\gamma + \sqrt{m_1^2 c^4 + E_\gamma^2}.$$

移项并平方，得

$$(m_0 c^2 - E_\gamma)^2 = m_1^2 c^4 + E_\gamma^2,$$

因此

$$E_\gamma = \frac{(m_0^2 - m_1^2)c^2}{2m_0}.$$

代入 $m_1 = m_0 - \Delta E/c^2$ ，得到

$$hf = \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2m_0 c^2} = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right).$$

对于题述的二体衰变，这一表达式是精确的。光子能量小于内部能量差，因为部分能量转化为反冲原子的动能。

(c)(ii)

若无反冲，跃迁频率应为 $f_0 = \Delta E/h$ 。因此，

$$\frac{f - f_0}{f_0} = -\frac{\Delta E}{2m_0 c^2}.$$

由于修正很小，反冲引起的相对频移为

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -\frac{\Delta E}{2m_0 c^2}.$$

对于 He^+ ， $Z = 2$ ，由给定的玻尔公式可得

$$E_n = -\frac{54.4}{n^2} \text{ eV}.$$

因此，对于从 n_i 到 $n_f < n_i$ 的发射跃迁，

$$\Delta E = 54.4 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \text{ eV}.$$

给定的静能为

$$m_0 c^2 = 4 \times 938 \text{ MeV} = 3.752 \times 10^9 \text{ eV}.$$

因此

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

对于任意束缚态之间的跃迁， $\Delta E < 54.4 \text{ eV}$ ，从而得到数值上限估计

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right|_{\text{recoil}} < 7.3 \times 10^{-9}.$$

例如，对于 $2 \rightarrow 1$ 跃迁，

$$\Delta E = 54.4 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 40.8 \text{ eV},$$

因此

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil, } 2 \rightarrow 1} \simeq -5.4 \times 10^{-9}.$$

即使这一上限估计，也比 (b) 部分中约为 3×10^{-5} 的引力频移小数千倍。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 2：声的传播

引言

海洋中的声速随深度、温度和盐度而变化。下方图 1(a) 给出了声速 c 随深度 z 的变化，其中声速的最小值 c_0 出现在海面与海底之间的中间位置。注意，为方便起见，将声速最小处的深度取为 $z = 0$ ，海面处取为 $z = z_S$ ，海底处取为 $z = -z_b$ 。在 $z = 0$ 上方， c 为

$$c = c_0 + bz.$$

在 $z = 0$ 下方， c 为

$$c = c_0 - bz.$$

在上述两种情况下均有 $b = \left| \frac{dc}{dz} \right|$ ，即 b 是声速随深度变化的梯度的大小；假定 b 为常量。

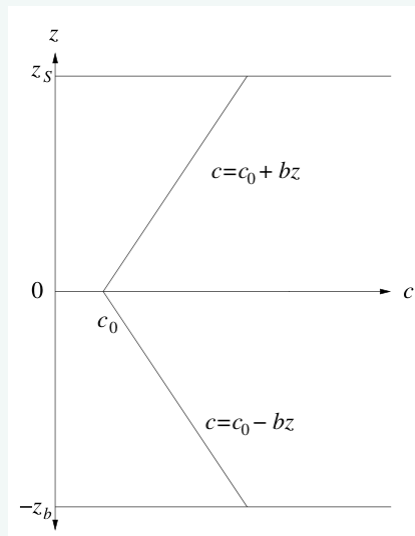


图 1 (a)

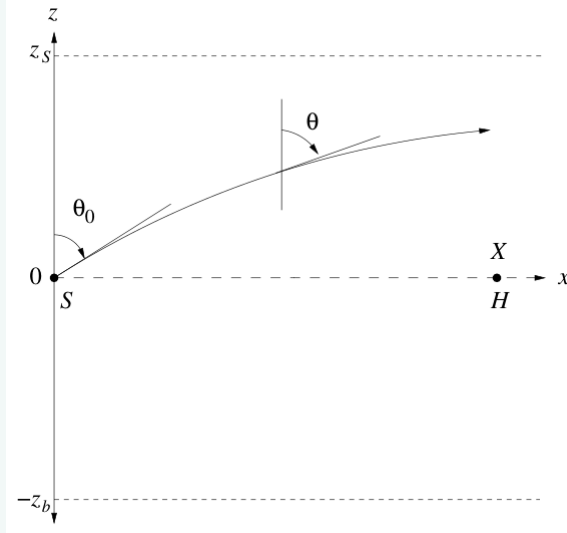


图 1 (b)

图 1(b) 给出了海洋在 z - x 平面内的剖面，其中 x 为水平方向。 c 随 z 的变化如图 1(a) 所示。在 $z = 0$ 、 $x = 0$ 处有一个声源 S 。一条“声线”从 S 发出，其角度为图示的 θ_0 。由于 c 随 z 变化，声线将发生折射。

(a) (6 分)

证明：从声源 S 发出且限制在 z - x 平面内的声线，其轨迹为半径为 R 的圆弧，其中

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} \quad \text{当} \quad 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

(b) (3 分)

推导一个含有 z_S 、 c_0 和 b 的表达式，给出向上发出的声线在传播过程中声波不被海面反射时，角度 θ_0 的最小值。

(c) (4 分)

图 1(b) 标出了声接收器 H 的位置，它位于 $z = 0$ 、 $x = X$ 处。推导一个含有 b 、 X 和 c_0 的表达式，给出从 S 发出的声线能够到达接收器 H 所需的一系列角度 θ_0 。假定 z_S 和 z_b 足够大，从而排除声线被海面或海底反射的可能性。

(d) (2 分)

在下列条件下，计算从 S 发出并经折射到达 H 的声线所对应的四个最小的 θ_0 值：

- $X = 10000 \text{ m}$
- $c_0 = 1500 \text{ m s}^{-1}$
- $b = 0.02000 \text{ s}^{-1}$

(e) (5 分)

推导一个表达式，给出声音沿 (c) 中确定的最小角度 θ_0 所对应的声线路径从 S 传播到 H 所需的时间。计算在 (d) 给定条件下这一传播时间的值。以下结果可能有所帮助：

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \tan \left(\frac{x}{2} \right)$$

计算直达声线沿 $z = 0$ 从 S 传播到 H 所需的时间。这两条声线中，哪一条先到达： $\theta_0 = \pi/2$ 的声线，还是 (d) 中计算得到的 θ_0 最小的声线？

题目译自官方英文原文。

答案

- (a) 完全位于 $z = 0$ 上方或下方的每一段轨迹都是圆弧，其半径为

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

$\theta_0 = 0$ 的情形对应竖直的直线声线，此时 $R \rightarrow \infty$ 。

- (b) 极限角为

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

取等号时，声线与海面相切；角度更大时，声线在海面下方转向。

- (c) 对于初始方向向上的折射声线，

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

其中 n 表示声源与接收器之间的圆弧段数。直达声线的角度为 $\theta_0 = \pi/2$ 。

- (d) 四个最小的角度为

$$86.19^\circ, \quad 88.09^\circ, \quad 88.73^\circ, \quad 89.05^\circ.$$

- (e) 对于最小角度， $n = 1$,

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right] \approx 6.662 \text{ s}.$$

直达声线的传播时间为

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} \approx 6.667 \text{ s}.$$

折射声线先到达，约提前 4.93 ms 。

解答

我们采用几何声学：波长足够短，因此可以用声线描述声音在静止、局部各向同性介质中的传播。声速仅取决于 z 。

(a)

将介质视为一系列薄的水平层。角度从这些层的竖直法线量起，由斯涅尔定律可得

$$\frac{\sin \theta}{c(z)} = \frac{\sin \theta_0}{c_0} \equiv p,$$

其中 p 沿声线保持不变。

设 s 为沿声线的路程。对于朝 x 增大方向传播的声线，

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta.$$

在上方区域， $c = c_0 + bz$ 。沿声线对 $\sin \theta = pc$ 求导，得

$$\cos \theta \frac{d\theta}{ds} = pb \frac{dz}{ds} = pb \cos \theta.$$

因此，利用连续性确定声线呈水平方向的转向点处的值，有

$$\frac{d\theta}{ds} = pb = \frac{b \sin \theta_0}{c_0}.$$

切线方向随弧长的变化率就是曲率。由于它为常量，轨迹为圆弧，且

$$R = \frac{1}{pb} = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

也可以显式求出该圆的方程。利用 $ds = R d\theta$ 和初始位置 $x = z = 0$ ，得

$$x = R(\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad z = R(\sin \theta - \sin \theta_0).$$

由于 $R \sin \theta_0 = c_0/b$ ，由这些方程可得

$$(x - R \cos \theta_0)^2 + \left(z + \frac{c_0}{b}\right)^2 = R^2.$$

因此，上方圆弧的圆心为

$$\left(R \cos \theta_0, -\frac{c_0}{b}\right).$$

在 $z = 0$ 下方，梯度改变符号，因此 $d\theta/ds = -pb$ 。曲率的符号反转，而其大小仍为 $1/R$ 。因此，穿过 $z = 0$ 的声线会依次沿半径相等的圆弧传播。

当 $\theta_0 = 0$ 时，斯涅尔定律给出一条曲率为零的竖直声线。此时，所给的半径公式应理解为极限意义下的 $R \rightarrow \infty$ 。

(b)

在向上弯曲的圆弧的最高点，声线呈水平方向，因此 $\theta = \pi/2$ 。由斯涅尔定律得

$$\frac{1}{c_0 + bz_{\max}} = \frac{\sin \theta_0}{c_0},$$

从而

$$z_{\max} = \frac{c_0}{b} \left(\frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right).$$

不穿过海面的极限声线满足 $z_{\max} = z_S$ 。因此，

$$\sin \theta_{0,\min} = \frac{c_0}{c_0 + bz_S},$$

所以

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

由于增大 θ_0 会减小 $z_{\max}$ ，大于这一阈值的角度对应的声线会在海面下方转向。取等号时为掠射情形；若要求声线与海面严格分离，则需 $\theta_0 > \theta_{0,\min}$ 。

(c)

沿第一段上方圆弧传播时，声线在满足以下条件时返回 $z = 0$ ：

$$\sin \theta = \sin \theta_0, \quad \theta = \pi - \theta_0.$$

在此次穿过该平面时，其水平位移为

$$D = R [\cos \theta_0 - \cos(\pi - \theta_0)] = 2R \cos \theta_0.$$

利用 (a) 中的半径，得

$$D = \frac{2c_0}{b} \cot \theta_0.$$

声速在 $z = 0$ 处连续，因此声线的方向在该处也连续。 $z = 0$ 上下两侧的梯度大小相等，使声线交替沿上方和下方的圆弧传播，每段圆弧跨越的水平距离均为 D 。

声线经过 n 段这样的圆弧后到达接收器，其中 n 为整数：

$$X = nD = \frac{2nc_0}{b} \cot \theta_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

因此，

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right).$$

这些角度随 n 增大而增大，因此最小角度对应单独一段上方圆弧：

$$\theta_{0,1} = \tan^{-1} \left(\frac{2c_0}{bX} \right).$$

由对称性，还可得到向下发出的相应路径。水平直达声线 $\theta_0 = \pi/2$ 是另一条路径。

(d)

角度公式中的数值因子为

$$\frac{2c_0}{bX} = \frac{2(1500)}{(0.02000)(10000)} = 15.$$

因此 $\theta_{0,n} = \tan^{-1}(15n)$ ，得到

n	$\tan \theta_{0,n}$	$\theta_{0,n}$
1	15	86.19°
2	30	88.09°
3	45	88.73°
4	60	89.05°

(e)

将最小发射角记为 $\theta_1 = \theta_{0,1}$ 。这条声线沿一段上方圆弧传播， θ 从 θ_1 增大到 $\pi - \theta_1$ 。

传播时间为

$$t_1 = \int \frac{ds}{c}.$$

沿这段圆弧, 有

$$ds = R d\theta, \quad c = \frac{c_0}{\sin \theta_1} \sin \theta = bR \sin \theta.$$

因此,

$$t_1 = \frac{1}{b} \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{1}{b} \left[\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}.$$

利用 $\tan[(\pi - \theta_1)/2] = \cot(\theta_1/2)$,

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right).$$

为用给定的量表示此结果, 定义

$$u = \frac{bX}{2c_0} = \cot \theta_1.$$

由半角恒等式得

$$\cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right) = \frac{1 + \cos \theta_1}{\sin \theta_1} = \csc \theta_1 + \cot \theta_1 = \sqrt{1 + u^2} + u.$$

于是,

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right].$$

代入给定数值,

$$u = \frac{(0.02000)(10000)}{2(1500)} = \frac{1}{15},$$

所以

$$t_1 = \frac{2}{0.02000} \ln \left[\sqrt{1 + \frac{1}{225}} + \frac{1}{15} \right] \text{ s} = \boxed{6.662 \text{ s}}.$$

直达声线始终位于 $z = 0$, 该处声速为 c_0 。因此, 其传播时间为

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} = \frac{10000}{1500} \text{ s} = \boxed{6.667 \text{ s}}.$$

使用未经舍入的数值, 时间差为

$$t_{\text{direct}} - t_1 = 0.00492842 \dots \text{ s} \approx \boxed{4.93 \text{ ms}}.$$

因此, **发射角最小的折射声线先到达**。远离 $z = 0$ 处声速的增大足以抵消路径加长带来的影响, 并使传播时间更短。

这一比较也可由下式得到一般性的结论:

$$t_1 = \frac{2}{b} \operatorname{arsinh} u, \quad t_{\text{direct}} = \frac{2u}{b},$$

因为当 $u > 0$ 时,

$$\operatorname{arsinh} u = \int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} < u.$$

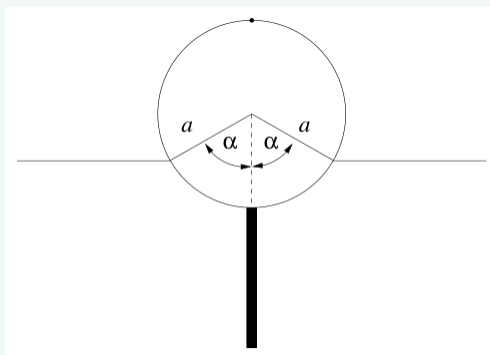
解答已与官方解答核对。

题目 3：圆柱形浮标

(a) (3 分)

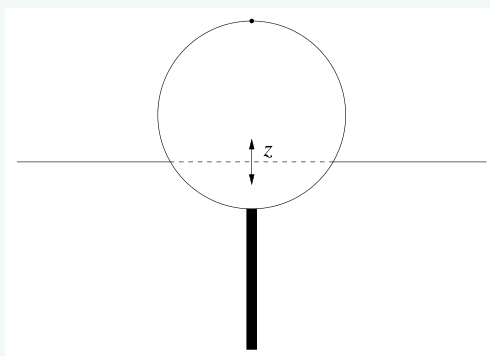
一个浮标由一个半径为 a 、长度为 l 的实心圆柱体组成，圆柱体由密度均匀、密度为 d 的轻质材料制成。一根均匀的刚性杆从圆柱体长度中点处的底部沿径向向外伸出。杆的质量等于圆柱体的质量，长度等于圆柱体的直径，密度大于海水的密度。该浮标漂浮在密度为 ρ 的海水中。

推导平衡时图示的漂浮角 α 与 d/ρ 之间的关系式。忽略杆的体积。



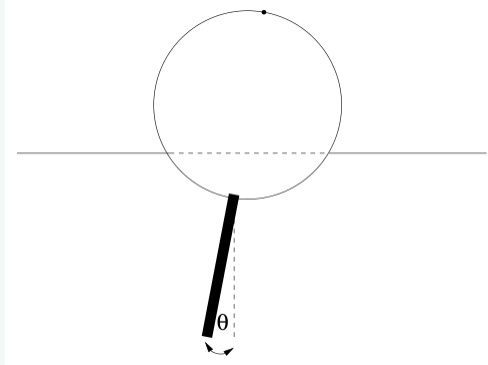
(b) (4 分)

如果浮标因某种扰动而竖直向下移动一小段距离 z ，它将受到一个合力，从而开始在平衡漂浮位置附近沿竖直方向振动。用 α 、 g 和 a 表示这一竖直振动模式的频率，其中 g 为重力加速度。假设水的运动对浮标动力学的影响相当于使浮标的有效质量增加三分之一。可以认为 α 不是小角度。



(c) (8 分)

近似认为圆柱体绕其水平中心轴摆动，仍用 g 和 a 表示摆动频率。在此情况下，忽略水的动力学效应和黏性。假设摆角很小。



(d) (5 分)

浮标内装有灵敏的加速度计，能够测量竖直运动和摆动，并通过无线电将这些信息传送到岸上。在较为平静的水域中，记录到竖直振动周期约为 1 秒，摆动周期约为 1.5 秒。根据这些信息，证明漂浮角 α 约为 90° ，并据此估算浮标的半径及其总质量，已知圆柱体的长度 l 等于 a 。

[可取 $\rho \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3}$ 和 $g \simeq 9.8 \text{ m s}^{-2}$ 。]

题目译自官方英文原文。

答案

- (a) 当 α 以弧度为单位时，

$$\frac{d}{\rho} = \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2\pi}.$$

- (b) 竖直振动频率为

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}.$$

- (c) 摆动频率为

$$f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}.$$

- (d)

$$\alpha \simeq 90^\circ, \quad a \simeq 0.23 \text{ m}, \quad M \simeq 20 \text{ kg}.$$

将给定的周期数值作为精确值计算，可得 $\alpha \simeq 91.1^\circ$ 。

解答

(a)

设圆柱体的质量为 m 。杆的质量与之相同，因此

$$m = d\pi a^2 l, \quad M = 2m.$$

浸没部分的横截面是一个弓形，其所对应的圆心角为 2α 。它的面积等于扇形面积减去三角形面积：

$$A_{\text{sub}} = \frac{1}{2}a^2(2\alpha) - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\alpha = a^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).$$

此处及下文这些表达式中的角度均以弧度为单位。

定义

$$S(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \cos \alpha.$$

忽略杆的体积，排开海水的体积为 $a^2 l S(\alpha)$ 。根据阿基米德原理，平衡条件为

$$\rho g a^2 l S(\alpha) = 2 d \pi a^2 l g.$$

因此，

$$\boxed{\frac{d}{\rho} = \frac{S(\alpha)}{2\pi} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4\pi}}.$$

(b)

平衡时，圆柱体横截面在水面处的宽度为

$$w = 2a \sin \alpha.$$

因此，水面截得的水平截面积为 $wl = 2al \sin \alpha$ 。

取位移 z 向下为正。保留 z 的一阶项，排水体积的增加量为

$$\Delta V = 2al \sin \alpha z.$$

平衡时的浮力已经与重力平衡。因此，增加的浮力提供回复力

$$F_z = -\rho g \Delta V = -2\rho g al \sin \alpha z.$$

根据题设，有效质量增加三分之一，故

$$M_{\text{eff}} = M + \frac{1}{3}M = \frac{4}{3}M.$$

由 (a) 部分可知，实际质量满足

$$M = \rho a^2 l S(\alpha).$$

因此，运动方程为

$$\frac{4}{3}\rho a^2 l S(\alpha) \ddot{z} + 2\rho g al \sin \alpha z = 0.$$

这是简谐运动，且

$$\omega_z^2 = \frac{3g \sin \alpha}{2a S(\alpha)}.$$

因此，以每秒振动次数表示的频率为

$$\boxed{f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}}.$$

这里只对竖直位移作了线性化处理，并未对 α 作小角度近似。

(c)

采用题目指定的近似，认为圆柱体绕其固定的水平中心轴转动。

由于圆柱体的横截面为圆形，绕此轴转动不会改变浸没部分的几何形状。浮力沿竖直方向作用，其作用线通过中心轴，因此对该轴不产生力矩。圆柱体自身的重力作用线也通过此轴。因此，回复力矩完全来自杆的重力。

杆从距轴 a 处延伸至距轴 $3a$ 处。因此，其质心距轴 $2a$ 。当杆偏离竖直向下方向的角位移为 θ 时，

$$\tau = -2mga \sin \theta \simeq -2mga \theta,$$

其中最后一步近似利用了 $|\theta| \ll 1$ 。

圆柱体绕其中心轴的转动惯量为

$$I_{\text{cyl}} = \frac{1}{2}ma^2.$$

对于均匀细杆，由平行轴定理可得

$$I_{\text{rod}} = \frac{1}{12}m(2a)^2 + m(2a)^2 = \frac{13}{3}ma^2.$$

因此

$$I = I_{\text{cyl}} + I_{\text{rod}} = \frac{29}{6}ma^2.$$

按题目要求忽略水的动力学效应和黏性，

$$I\ddot{\theta} = -2mga \theta,$$

即

$$\ddot{\theta} + \frac{12g}{29a}\theta = 0.$$

所以，

$$\boxed{\omega_{\theta} = \sqrt{\frac{12g}{29a}}, \quad f_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}}.$$

(d)

设竖直振动周期和摆动周期分别为 T_z 和 T_{θ} 。取角频率平方之比，可消去 a 和 g ：

$$\left(\frac{T_{\theta}}{T_z}\right)^2 = \frac{\omega_z^2}{\omega_{\theta}^2} = \frac{29 \sin \alpha}{8S(\alpha)}.$$

代入 $T_z \simeq 1 \text{ s}$ 和 $T_{\theta} \simeq 1.5 \text{ s}$,

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} \simeq \frac{29}{8(1.5)^2} = \frac{29}{18} \simeq 1.611.$$

当 $\alpha = 90^\circ = \pi/2$ 时，

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\pi}{2} \simeq 1.571,$$

预测的周期比为

$$\frac{T_{\theta}}{T_z} = \sqrt{\frac{29}{4\pi}} \simeq 1.519,$$

与测得的近似比值 1.5 一致。用给定的周期数值求解，得到 $\alpha \simeq 91.15^\circ$ 。因此

$$\boxed{\alpha \simeq 90^\circ},$$

即圆柱体大约有一半浸没在水中。

由摆动周期可直接求出半径：

$$T_{\theta} = 2\pi\sqrt{\frac{29a}{12g}},$$

于是

$$a = \frac{3gT_{\theta}^2}{29\pi^2} = \frac{3(9.8)(1.5)^2}{29\pi^2} \text{ m} \simeq 0.231 \text{ m}.$$

因此,

$$\boxed{a \simeq 0.23 \text{ m}}.$$

由于 $l = a$, 由平衡条件可得总质量为

$$M = \rho a^3 S(\alpha).$$

当 $\alpha \simeq \pi/2$ 时,

$$M \simeq \frac{\pi}{2}\rho a^3 \simeq \frac{\pi}{2}(1000)(0.231)^3 \text{ kg} \simeq 19.4 \text{ kg}.$$

使用由给定周期数值求得的 $\alpha \simeq 91.15^\circ$, 可得 $M \simeq 19.9 \text{ kg}$ 。按题中所给周期允许的精度,

$$\boxed{M \simeq 20 \text{ kg}}.$$

解答已与官方解答核对。