

IPhO 1995

Teorik sorular ve çözümler · Canberra, Avustralya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1995/

Soru 1: Kütleçekimsel Kırmızıya Kayma ve Yıldız Kütlesinin Ölçülmesi

(a) (3 puan)

Frekansı f olan bir foton, enerjisiyle belirlenen bir etkin eylemsizlik kütlesine m sahiptir. Fotonun kütleçekim kütlesinin bu eylemsizlik kütlesine eşit olduğunu varsayın. Buna göre, bir yıldızın yüzeyinden yayılan bir foton, yıldızın kütleçekim alanından kaçarken enerji kaybeder. Fotonun yıldızın yüzeyinden sonsuza giderken frekansında meydana gelen Δf kaymasının

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}$$

ile verildiğini $\Delta f \ll f$ için gösterin. Burada:

- G = kütleçekim sabiti
- R = yıldızın yarıçapı
- c = ışık hızı
- M = yıldızın kütlesidir.

Böylece, bilinen bir tayf çizgisinin yıldızdan çok uzakta ölçülen kırmızıya kayması, M/R oranını ölçmek için kullanılabilir. R 'nin bilinmesi, yıldızın kütlesinin belirlenmesini sağlar.

(b) (12 puan)

Galaksimizdeki bir yıldızın hem kütlesini M hem de yarıçapını R ölçmek üzere yapılan bir deneyde insansız bir uzay aracı fırlatılır. Yıldızın yüzeyindeki He^+ iyonlarından fotonlar yayılır. Bu fotonlar, uzay aracındaki bir deney odasında bulunan He^+ iyonlarının rezonans soğurması yoluyla izlenebilir. Rezonans soğurması, yalnızca kırmızıya kaymaları tam olarak telafi etmek üzere He^+ iyonlarına yıldıza doğru bir hız verildiğinde gerçekleşir.

Uzay aracı yıldıza radyal doğrultuda yaklaşırken, deney odasındaki He^+ iyonlarının soğurma rezonansı sırasındaki yıldıza göre hızı ($v = \beta c$), yıldızın (en yakın) yüzeyine olan d uzaklığının bir fonksiyonu olarak ölçülür. Deneysel veriler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Verilerin tamamından yararlanarak yıldızın kütlesini M ve yarıçapını R grafik yöntemiyle belirleyin. Cevabınızdaki belirsizlikleri tahmin etmeniz gerekmez.

Rezonans Koşuluna İlişkin Veriler

Hız parametresi	$\beta = v/c \quad (\times 10^{-5})$	3.352	3.279	3.195	3.077	2.955
Yıldızın yüzeyinden uzaklık	$d \quad (\times 10^8 \text{m})$	38.90	19.98	13.32	8.99	6.67

(c) (5 puan)

Böyle bir deneyde R ve M 'yi belirlemek için, fotonu yayan atomun geri tepmesinden kaynaklanan frekans düzeltmesi genellikle dikkate alınır. [Isıl hareket, yayım çizgilerinin maksimumlarının yerini değiştirmeden çizgileri genişletir; dolayısıyla tüm ısıl etkilerin hesaba katıldığını varsayabiliriz.]

(i) (4 puan)

Atomun başlangıçta durgun olduğunu ve bozunarak bir foton ile geri tepen bir atom oluşturduğunu varsayın. Yayılan fotonun enerjisi hf için, ΔE (iki atomik düzey arasındaki durgunluk enerjisi farkı) ve atomun başlangıçtaki durgunluk kütlesi m_0 cinsinden görelî ifadeyi elde edin.

(ii) (1 puan)

Buradan hareketle, He^+ iyonları için görelî frekans kaymasını $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil}}$ sayısal olarak tahmin edin.

Cevabınızın, (b) kısmında elde edilen kütleçekimsel kırmızıya kaymadan çok daha küçük çıkması gerekir.

Veriler:

Işık hızı	c	=	$3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
He'nin durgunluk enerjisi	$m_0 c^2$	=	$4 \times 938 (\text{MeV})$
Bohr enerjisi	E_n	=	$-\frac{13.6 Z^2}{n^2} (\text{eV})$
Kütleçekim sabiti	G	=	$6.7 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **(a)** $\Delta f = f_\infty - f$ olmak üzere,

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}.$$

- **(b)** $1/\beta$ 'nin $1/d$ 'ye göre grafiği yaklaşık olarak bir doğrudur. Beş ölçümün tamamı kullanıldığında

$$R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ m}, \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Buna karşılık gelen, yüzeyden sonsuza kadar oluşan bağıl frekans kayması yaklaşık -3.46×10^{-5} 'tir.

- **(c)(i)** Foton enerjisinin tam ifadesi

$$hf = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right).$$

- (c)(ii) He^+ 'daki bir $n_i \rightarrow n_f$ geçişi için,

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right).$$

Bağlı durumlar arasındaki geçişlerde bunun büyüklüğü 7.3×10^{-9} 'un altındadır. Örneğin, $2 \rightarrow 1$ geçişi için -5.4×10^{-9} elde edilir; bu, kütleçekimsel kaymadan birkaç bin kat daha küçüktür.

Çözüm

(a)

Fotonun enerjisi $E = hf$ olduğundan, sorudaki varsayımlar altında etkin eylemsizlik ve kütleçekim kütlesi

$$m = \frac{hf}{c^2}.$$

Yıldızın dışındaki kütleçekim potansiyeli

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

Foton yüzeyden sonsuza giderken kütleçekim potansiyel enerjisi GMm/R kadar artar. Dolayısıyla enerjinin korunumundan

$$h\Delta f \simeq -\frac{GMm}{R}.$$

Foton enerjisindeki bağıl değişim küçük olduğundan, burada m birinci mertebede sabit kabul edilebilir. $m = hf/c^2$ yerine konulduğunda,

$$h\Delta f \simeq -\frac{GM}{R} \frac{hf}{c^2},$$

ve buradan

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}.$$

Eksi işareti kırmızıya kaymayı gösterir. Bu yaklaşım, $GM/(Rc^2) \ll 1$ olmasını gerektirir.

(b)

Uzay aracının bulunduğu yerde, yıldızın merkezine uzaklık $r = R + d$ 'dir. Aynı enerji yaklaşımı R ile $R + d$ arasında uygulandığında, yıldız göre durgun bir gözlemcinin ölçtüğü f_r frekansı

$$f_r \simeq f_0 \left[1 - \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) \right],$$

burada f_0 , yayılan ışığın geçiş frekansıdır. Geri tepme düzeltmeleri burada ihmal edilmekte ve (c) kısmında değerlendirilmektedir.

Kütleçekimden kaynaklanan pozitif bağıl frekans kaybını şöyle tanımlayalım:

$$\epsilon(d) = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right).$$

Fotonlar dışarıya doğru ilerlerken soğurucu iyonlar yıldıza doğru hareket eder. Bu nedenle iyonlar, Doppler etkisiyle maviye kaymış bir frekans görür:

$$f_{\text{ion}} = \gamma(1 + \beta)f_r = f_r \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

$\beta \sim 3 \times 10^{-5}$ olduğundan,

$$f_{\text{ion}} \simeq f_r(1 + \beta).$$

Rezonans soğurması için $f_{\text{ion}} = f_0$ olması gerekir; dolayısıyla birinci mertebede,

$$(1 - \epsilon)(1 + \beta) \simeq 1 \implies \beta \simeq \epsilon.$$

Sonuç olarak, gereken doğruluk düzeyinde,

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + d} \right) = \frac{GM}{Rc^2} \frac{d}{R + d}$$

elde edilir.

Her iki tarafın çarpmaya göre tersi alındığında doğrusal bir bağıntı elde edilir:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{Rc^2}{GM} + \frac{R^2c^2}{GM} \frac{1}{d}.$$

Dolayısıyla şu grafiği çizin:

$$Y = \frac{1}{\beta} \quad \text{şuna göre} \quad X = \frac{1}{d}.$$

Doğruyu $Y = A + BX$ biçiminde yazarsak, düşey eksen kestiği değer ve eğimi

$$A = \frac{Rc^2}{GM}, \quad B = \frac{R^2c^2}{GM}.$$

Bunlar her iki bilinmeyeni de belirler:

$$\boxed{R = \frac{B}{A}}, \quad \boxed{M = \frac{c^2 B}{GA^2}}.$$

Uygun eksen ölçekleriyle grafiğe işlenecek beş nokta şunlardır:

$X/(10^{-9} \text{ m}^{-1})$	$Y/10^4$
0.25707	2.98329
0.50050	3.04971
0.75075	3.12989
1.11235	3.24992
1.49925	3.38409

Grafik, yaklaşık olarak yükselen bir doğrudur. Beş noktanın tamamı kullanılarak elde edilen en iyi uyum doğrusu

$$\frac{Y}{10^4} \simeq 2.8917 + 0.3249 \frac{X}{10^{-9} \text{ m}^{-1}}.$$

Buna göre, ölçeklenmemiş birimlerle düşey eksen kestiği değer ve eğimi

$$A \simeq 2.8917 \times 10^4, \quad B \simeq 3.2489 \times 10^{12} \text{ m.}$$

Doğru uzatıldığında yatay eksenini kestiği değer $-A/B \simeq -8.90 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$ 'dir.

Buradan

$$R = \frac{3.2489 \times 10^{12}}{2.8917 \times 10^4} \simeq 1.12 \times 10^8 \text{ m,}$$

ve

$$M = \frac{(3.0 \times 10^8)^2 (3.2489 \times 10^{12})}{(6.7 \times 10^{-11})(2.8917 \times 10^4)^2} \simeq 5.2 \times 10^{30} \text{ kg.}$$

Grafik yöntemiyle yapılan bir belirleme için uygun hassasiyetle,

$$\boxed{R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ m,} \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}}.$$

Yüzeyden sonsuza kadar oluşan kırmızıya kayma

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2} = -\frac{1}{A} \simeq -3.46 \times 10^{-5}.$$

Bu sonuç, çözüm boyunca kullanılan zayıf alan yaklaşımını da doğrular.

(c)(i)

Başlangıçtaki atomun durgunluk kütlesi m_0 , son durumdaki atomun durgunluk kütlesi ise m_1 olsun. İki iç durgunluk enerjisi arasındaki fark

$$\Delta E = (m_0 - m_1)c^2.$$

Yayılan fotonun enerjisini $E_\gamma = hf$ olarak yazalım. Başlangıçtaki atom durgun olduğundan, momentumun korunumu geri tepen atomun momentum büyüklüğünün şu değerde olmasını gerektirir:

$$p = \frac{E_\gamma}{c}.$$

Son durumdaki atom için göreceli enerji-momentum bağıntısı kullanıldığında, enerjinin korunumundan

$$m_0c^2 = E_\gamma + \sqrt{m_1^2c^4 + p^2c^2} = E_\gamma + \sqrt{m_1^2c^4 + E_\gamma^2}.$$

Yeniden düzenleyip karesini alırsak,

$$(m_0c^2 - E_\gamma)^2 = m_1^2c^4 + E_\gamma^2,$$

dolayısıyla

$$E_\gamma = \frac{(m_0^2 - m_1^2)c^2}{2m_0}.$$

$m_1 = m_0 - \Delta E/c^2$ yerine konulduğunda

$$\boxed{hf = \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2m_0c^2} = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0c^2}\right)}.$$

Bu ifade, belirtilen iki cisimli bozunma için tamdır. Enerjinin bir kısmı geri tepen atomun kinetik enerjisine dönüştüğünden, fotonun enerjisi iç enerji farkından küçüktür.

(c)(ii)

Geri tepme olmasaydı geçiş frekansı $f_0 = \Delta E/h$ olurdu. Dolayısıyla,

$$\frac{f - f_0}{f_0} = -\frac{\Delta E}{2m_0c^2}.$$

Düzeltilme çok küçük olduğundan, geri tepmeden kaynaklanan bağıl kayma

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil}} \simeq -\frac{\Delta E}{2m_0c^2}.$$

He^+ için $Z = 2$ 'dir ve verilen Bohr formülünden

$$E_n = -\frac{54.4}{n^2} \text{ eV}.$$

Böylece, n_i düzeyinden $n_f < n_i$ düzeyine geçişteki yayım için,

$$\Delta E = 54.4 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \text{ eV}.$$

Verilen durgunluk enerjisi

$$m_0c^2 = 4 \times 938 \text{ MeV} = 3.752 \times 10^9 \text{ eV}.$$

Buradan

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

Bağılı durumlar arasındaki herhangi bir geçiş için $\Delta E < 54.4 \text{ eV}$ olduğundan, sayısal bir üst sınır tahmini olarak

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right|_{\text{recoil}} < 7.3 \times 10^{-9}.$$

Örneğin, $2 \rightarrow 1$ geçişi için

$$\Delta E = 54.4 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 40.8 \text{ eV},$$

ve dolayısıyla

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil, } 2 \rightarrow 1} \simeq -5.4 \times 10^{-9}.$$

Üst sınır tahmini bile (b) kısmındaki yaklaşık 3×10^{-5} büyüklüğündeki kütleçekimsel kaymalardan birkaç bin kat daha küçüktür.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 2: Sesin Yayılması

Giriş

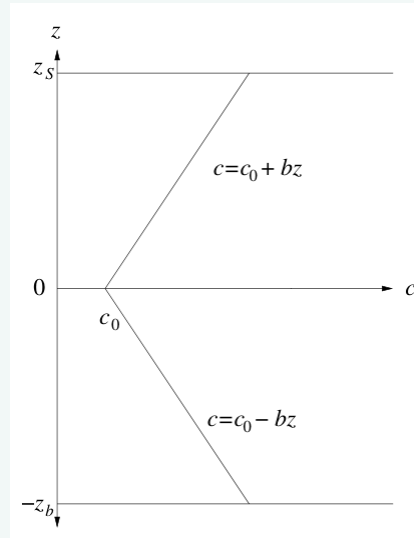
Sesin okyanustaki yayılma hızı derinliğe, sıcaklığa ve tuzluluğa bağlı olarak değişir. Aşağıdaki Şekil 1(a), ses hızının en küçük değeri olan c_0 'a okyanus yüzeyi ile deniz tabanının ortasında ulaşıldığı bir durum için ses hızı c 'nin derinlik z ile değişimini göstermektedir. Kolaylık olması açısından, ses hızının en küçük olduğu derinlikte $z = 0$, yüzeyde $z = z_S$ ve deniz tabanında $z = -z_b$ alındığına dikkat ediniz. $z = 0$ 'ın üstünde c ,

$$c = c_0 + bz .$$

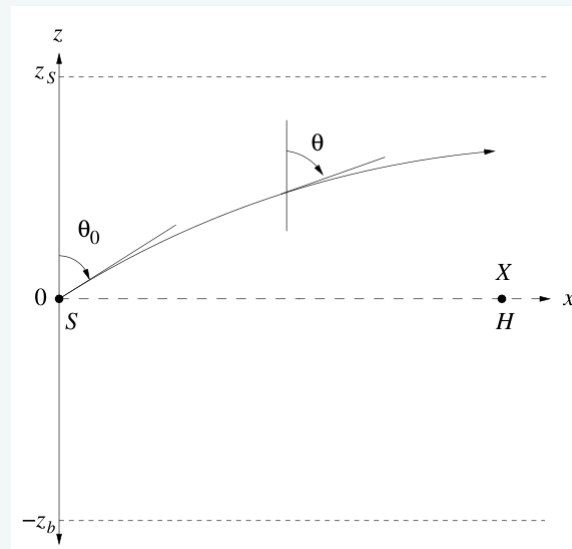
ile verilir. $z = 0$ 'ın altında ise c ,

$$c = c_0 - bz .$$

ile verilir. Her iki durumda da $b = \left| \frac{dc}{dz} \right|$, yani b , ses hızının derinliğe göre gradyanının büyüklüğüdür; b 'nin sabit olduğu varsayılmaktadır.



Şekil 1 (a)



Şekil 1 (b)

Şekil 1(b), okyanusun z - x düzlemindeki bir kesitini göstermektedir; burada x yatay bir doğrultudur. c 'nin z 'ye göre değişimi Şekil 1(a)'da gösterilmiştir. $z = 0$, $x = 0$ konumunda bir S ses kaynağı bulunmaktadır. S 'den, şekilde gösterildiği gibi θ_0 açısıyla bir 'ses ışını' yayılır. c 'nin z ile değişmesi nedeniyle ışın kırılacaktır.

(a) (6 puan)

S kaynağından çıkan ve $z-x$ düzleminde kalan ışının yörüngesinin, yarıçapı R olan bir çember yayı oluşturduğunu ve bu yarıçapın

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} \quad \text{için} \quad 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

ile verildiğini gösteriniz.

(b) (3 puan)

Yukarıya yönelen ışınların, ses dalgası deniz yüzeyinden yansımadan ilerleyebilmesi için θ_0 açısının alabileceği en küçük değeri veren, z_S , c_0 ve b 'yi içeren bir ifade türetiniz.

(c) (4 puan)

Şekil 1(b), $z = 0$, $x = X$ konumunda bulunan bir H ses alıcısının yerini göstermektedir. S 'den çıkan ses ışınının H alıcısına ulaşması için gerekli θ_0 açılarının dizisini veren, b , X ve c_0 'ı içeren bir ifade türetiniz. z_S ve z_b 'nin, deniz yüzeyinden veya deniz tabanından yansıma olasılığını ortadan kaldıracak kadar büyük olduğunu varsayınız.

(d) (2 puan)

Aşağıdaki değerler için, S 'den çıkan kırılan ışınların H 'ye ulaşmasını sağlayan en küçük dört θ_0 değerini hesaplayınız:

- $X = 10000 \text{ m}$
- $c_0 = 1500 \text{ m s}^{-1}$
- $b = 0.02000 \text{ s}^{-1}$

(e) (5 puan)

Sesin, (c) bölümünde belirlenen en küçük θ_0 açısına karşılık gelen ışın yolunu izleyerek S 'den H 'ye ulaşması için geçen süreyi veren bir ifade türetiniz. Bu geçiş süresinin değerini (d) bölümünde verilen koşullar için hesaplayınız. Aşağıdaki sonuç yardımcı olabilir:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \tan \left(\frac{x}{2} \right)$$

Doğrudan giden ışının $z = 0$ boyunca S 'den H 'ye ulaşması için geçen süreyi hesaplayınız. İki ışıdan hangisi önce ulaşır: $\theta_0 = \pi/2$ olan ışın mı, yoksa (d) bölümü için hesaplanan en küçük θ_0 değerine sahip ışın mı?

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **(a)** Tamamen $z = 0$ 'ın üstünde veya altında kalan her parça, yarıçapı

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

olan bir çember yayıdır. $\theta_0 = 0$ durumu, $R \rightarrow \infty$ 'ye karşılık gelen doğrusal düşey ışıdır.

- **(b)** Sınır açısı

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

ile verilir. Eşitlik durumunda ışın yüzeye teğettir; daha büyük açılarda ışınlar yüzeyin altında geri döner.

- **(c)** Başlangıçta yukarıya yönelen, kırılan ışınlar için

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

burada n , kaynak ile alıcı arasındaki çember yaylarının sayısıdır. Doğrudan giden ışın için $\theta_0 = \pi/2$ 'dir.

- **(d)** En küçük dört açı

$$86.19^\circ, \quad 88.09^\circ, \quad 88.73^\circ, \quad 89.05^\circ.$$

şeklindedir.

- **(e)** En küçük açı için, $n = 1$,

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right] \approx 6.662 \text{ s}.$$

Doğrudan giden ışının ulaşma süresi

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} \approx 6.667 \text{ s}.$$

ile verilir. Kırılan ışın yaklaşık **4.93 ms** önce ulaşır.

Çözüm

Geometrik akustik kullanıyoruz: dalga boyu, durgun ve yerel olarak izotrop bir ortamda yayılmanın ışınlarla betimlenebilmesine yetecek kadar kısadır. Ses hızı yalnızca z 'ye bağlıdır.

(a)

Ortamı art arda gelen ince yatay tabakalar olarak ele alalım. Açı, bu tabakaların düşey normalinden ölçüldüğünde Snell yasası

$$\frac{\sin \theta}{c(z)} = \frac{\sin \theta_0}{c_0} \equiv p,$$

bağıntısını verir; burada p , ışın boyunca sabittir.

s , ışın boyunca alınan yol olsun. Artan x yönünde ilerleyen bir ışın için

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta.$$

Üst bölgede $c = c_0 + bz$ 'dir. $\sin \theta = pc$ 'nin ışın boyunca türevi alındığında

$$\cos \theta \frac{d\theta}{ds} = pb \frac{dz}{ds} = pb \cos \theta.$$

elde edilir. Böylece, ışının yatay olduğu dönüş noktasındaki değer süreklilikten elde edilmek üzere,

$$\frac{d\theta}{ds} = pb = \frac{b \sin \theta_0}{c_0}.$$

Teğet doğrultusunun yay uzunluğuna göre değişim hızı eğriliktir. Bu sabit olduğundan yörünge çemberseldir ve yarıçapı

$$R = \frac{1}{pb} = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

ile verilir. Çember açık biçimde de bulunabilir. $ds = R d\theta$ ve başlangıç konumu $x = z = 0$ kullanılarak,

$$x = R(\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad z = R(\sin \theta - \sin \theta_0).$$

elde edilir. $R \sin \theta_0 = c_0/b$ olduğundan bu denklemler

$$(x - R \cos \theta_0)^2 + \left(z + \frac{c_0}{b}\right)^2 = R^2.$$

sonucunu verir. Dolayısıyla üst yayın merkezi

$$\left(R \cos \theta_0, -\frac{c_0}{b}\right).$$

noktasındadır. $z = 0$ 'ın altında gradyan işaret değiştirir; dolayısıyla $d\theta/ds = -pb$ 'dir. Eğriliğin işareti tersine dönerken büyüklüğü $1/R$ olarak kalır. Bunun sonucunda $z = 0$ 'dan geçen bir ışın, eşit yarıçaplı ardışık çember yaylarını izler.

$\theta_0 = 0$ için Snell yasası, eğriliği sıfır olan düşey bir ışın verir. Belirtilen yarıçap formülü, $R \rightarrow \infty$ limiti anlamında yorumlanır.

(b)

Yukarıya yönelen bir yayın en yüksek noktasında ışın yataydır; dolayısıyla $\theta = \pi/2$ 'dir. Bu durumda Snell yasası

$$\frac{1}{c_0 + bz_{\max}} = \frac{\sin \theta_0}{c_0},$$

ve buradan

$$z_{\max} = \frac{c_0}{b} \left(\frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right).$$

bağıntısını verir. Deniz yüzeyini geçmeyen sınır ışını $z_{\max} = z_S$ koşulunu sağlar. Bu nedenle,

$$\sin \theta_{0,\min} = \frac{c_0}{c_0 + bz_S},$$

dolayısıyla

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

θ_0 'ın artması $z_{\max}$ 'ı azalttığından, bu eşiğin üzerindeki açılarda ışınlar yüzeyin altında geri döner. Eşitlik, yüzeye teğet olma durumudur; yüzeye hiç temas edilmemesi için $\theta_0 > \theta_{0,\min}$ gerekir.

(c)

İlk üst yay boyunca ışın,

$$\sin \theta = \sin \theta_0, \quad \theta = \pi - \theta_0.$$

olduğunda $z = 0$ 'a döner. Bu geçişteki yatay yer değiştirmesi

$$D = R [\cos \theta_0 - \cos(\pi - \theta_0)] = 2R \cos \theta_0.$$

ile verilir. (a) bölümündeki yarıçap kullanılarak,

$$D = \frac{2c_0}{b} \cot \theta_0.$$

elde edilir. Hız $z = 0$ 'da süreklidir, dolayısıyla ışının yönü de burada süreklidir. $z = 0$ 'ın üstünde ve altında gradyan büyüklüklerinin eşit olması, her biri aynı yatay D mesafesini kapsayan, dönüşümlü üst ve alt yaylar oluşturur.

Bu yayların tam sayı n adedi kat edildikten sonra alıcıya ulaşılır:

$$X = nD = \frac{2nc_0}{b} \cot \theta_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Bu nedenle,

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right).$$

Bu açılar n ile artar; dolayısıyla en küçük açı tek bir üst yaya karşılık gelir:

$$\theta_{0,1} = \tan^{-1} \left(\frac{2c_0}{bX} \right).$$

Simetri, başlangıçta aşağıya yönelen karşılık gelen yolları da verir. Yatay doğrultuda doğrudan giden ışın, $\theta_0 = \pi/2$, ek bir yoldur.

(d)

Açı formülündeki sayısal çarpan

$$\frac{2c_0}{bX} = \frac{2(1500)}{(0.02000)(10000)} = 15.$$

olarak bulunur. Böylece $\theta_{0,n} = \tan^{-1}(15n)$ olur ve şu değerler elde edilir:

n	$\tan \theta_{0,n}$	$\theta_{0,n}$
1	15	86.19°
2	30	88.09°
3	45	88.73°
4	60	89.05°

(e)

En küçük çıkış açısını $\theta_1 = \theta_{0,1}$ olarak yazalım. Bu ışın, θ açısı θ_1 'den $\pi - \theta_1$ 'e artarken tek bir üst yay boyunca ilerler.

Ulaşma süresi

$$t_1 = \int \frac{ds}{c}.$$

ile verilir. Bu yay boyunca,

$$ds = R d\theta, \quad c = \frac{c_0}{\sin \theta_1} \sin \theta = bR \sin \theta.$$

Dolayısıyla,

$$t_1 = \frac{1}{b} \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{1}{b} \left[\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}.$$

$\tan[(\pi - \theta_1)/2] = \cot(\theta_1/2)$ bağıntısı kullanılarak,

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right).$$

elde edilir. Bunu verilen nicelikler cinsinden ifade etmek için

$$u = \frac{bX}{2c_0} = \cot \theta_1.$$

tanımını yapalım. Yarım açı özdeşliği

$$\cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right) = \frac{1 + \cos \theta_1}{\sin \theta_1} = \csc \theta_1 + \cot \theta_1 = \sqrt{1 + u^2} + u.$$

sonucunu verir. Böylece,

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right].$$

Sayısal veriler için,

$$u = \frac{(0.02000)(10000)}{2(1500)} = \frac{1}{15},$$

dolayısıyla

$$t_1 = \frac{2}{0.02000} \ln \left[\sqrt{1 + \frac{1}{225}} + \frac{1}{15} \right] \text{ s} = \boxed{6.662 \text{ s}}.$$

Doğrudan giden ışın, hızının c_0 olduğu $z = 0$ 'da kalır. Bu nedenle ulaşma süresi

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} = \frac{10000}{1500} \text{ s} = \boxed{6.667 \text{ s}}.$$

ile verilir. Yuvarlanmamış değerler kullanıldığında fark

$$t_{\text{direct}} - t_1 = 0.00492842 \dots \text{ s} \approx \boxed{4.93 \text{ ms}}.$$

olarak bulunur. Dolayısıyla **en küçük çıkış açısına sahip kırılan ışın önce ulaşır**. $z = 0$ 'dan uzaklaşıldığında ses hızındaki artış, yol uzunluğundaki artışı fazlasıyla telafi eder.

Bu karşılaştırma, genel olarak

$$t_1 = \frac{2}{b} \operatorname{arsinh} u, \quad t_{\text{direct}} = \frac{2u}{b},$$

bağıntılarından da çıkar; çünkü $u > 0$ için,

$$\operatorname{arsinh} u = \int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} < u.$$

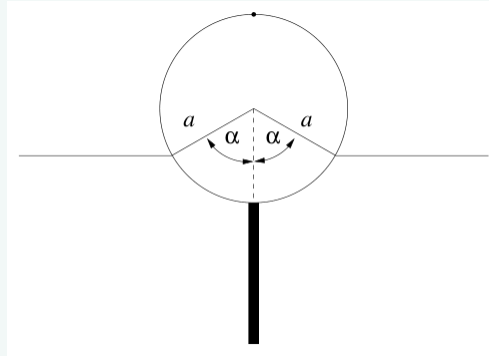
Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Silindirik Şamandıra

(a) (3 puan)

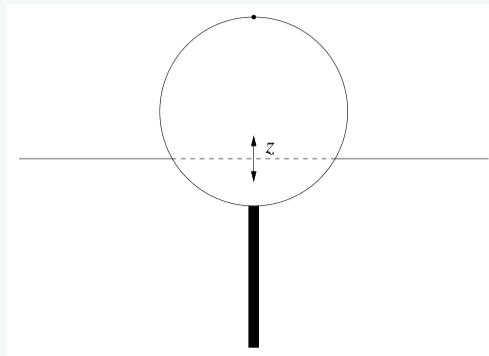
Bir şamandıra, yarıçapı a , uzunluğu l olan, düzgün d yoğunluğuna sahip hafif bir malzemeden yapılmış dolu bir silindirden ve silindirin uzunluğunun orta noktasında alt yüzeyinden doğrudan dışarıya doğru uzanan düzgün, rijit bir çubuktan oluşmaktadır. Çubuğun kütlesi silindirinkine eşittir, uzunluğu silindirin çapıyla aynıdır ve yoğunluğu deniz suyunun yoğunluğundan büyüktür. Bu şamandıra, yoğunluğu ρ olan deniz suyunda yüzmektedir.

Denge durumunda, şekilde gösterilen yüzme açısı α ile d/ρ arasında ilişki kuran bir ifade türetiniz. Çubuğun hacmini ihmal ediniz.



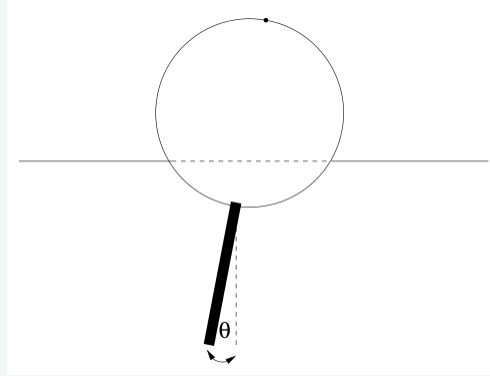
(b) (4 puan)

Şamandıra, bir bozucu etki nedeniyle düşey doğrultuda küçük bir z miktarı kadar aşağı bastırılırsa, üzerine etki eden net kuvvet, denge yüzme konumu çevresinde düşey salınımlara başlamasına neden olur. Bu düşey titreşim modunun frekansını α , g ve a cinsinden belirleyiniz; burada g yerçekimi ivmesidir. Su hareketinin şamandıranın dinamiği üzerindeki etkisinin, şamandıranın etkin kütlesini üçte biri kadar artırdığını varsayınız. α açısının küçük olmadığını varsayabilirsiniz.



(c) (8 puan)

Silindirin, merkezinden geçen yatay eksen etrafında salındığı yaklaşımı altında, açısal salınım frekansını yine g ve a cinsinden belirleyiniz. Bu durumda suyun dinamiğini ve viskozitesini ihmal ediniz. Salınım açısının küçük olduğu varsayılmaktadır.



(d) (5 puan)

Şamandıra, düşey hareketleri ve açısal salınımları ölçebilen ve bu bilgileri radyo yoluyla kıyıya iletebilen hassas ivmeölçerler içermektedir. Nispeten sakin sularda, düşey salınım periyodunun yaklaşık 1 saniye ve açısal salınım periyodunun yaklaşık 1.5 saniye olduğu kaydedilmiştir. Bu bilgilerden yararlanarak, yüzme açısı α 'nın yaklaşık 90° olduğunu gösteriniz ve buradan, silindirin uzunluğu l 'nin a 'ya eşit olduğu verildiğine göre, şamandıranın yarıçapını ve toplam kütlesini tahmin ediniz.

[$\rho \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ve $g \simeq 9.8 \text{ m s}^{-2}$ alabilirsiniz.]

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- (a) α radyan cinsinden olmak üzere,

$$\frac{d}{\rho} = \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2\pi}.$$

- (b) Düşey salınım frekansı

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}.$$

- (c) Açısal salınım frekansı

$$f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}.$$

- (d)

$$\alpha \simeq 90^\circ, \quad a \simeq 0.23 \text{ m}, \quad M \simeq 20 \text{ kg}.$$

Verilen periyot değerleri tam olarak kullanıldığında $\alpha \simeq 91.1^\circ$ elde edilir.

Çözüm

(a)

Silindirin kütlesi m olsun. Çubuğun kütlesi de aynı olduğundan

$$m = d\pi a^2 l, \quad M = 2m.$$

Suya batmış kesit, silindirin merkezinde 2α açısını gören bir daire parçasıdır. Alanı, daire diliminin alanından üçgenin alanının çıkarılmasıyla bulunur:

$$A_{\text{sub}} = \frac{1}{2}a^2(2\alpha) - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\alpha = a^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).$$

Burada ve aşağıda, bu ifadelerdeki açılar radyan cinsindendir.

Şu tanımı yapalım:

$$S(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \cos \alpha.$$

Çubuğun hacmi ihmal edildiğinde, yer değiştiren suyun hacmi $a^2 l S(\alpha)$ olur. Arşimet ilkesine göre denge için

$$\rho g a^2 l S(\alpha) = 2d\pi a^2 l g.$$

Dolayısıyla,

$$\boxed{\frac{d}{\rho} = \frac{S(\alpha)}{2\pi} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4\pi}}.$$

(b)

Denge durumunda, silindirin kesitinin su yüzeyindeki genişliği

$$w = 2a \sin \alpha.$$

Böylece su yüzeyinin silindirden kestiği yatay alan $wl = 2al \sin \alpha$ olur.

Yer değiştirme z 'yi aşağı yönde pozitif alalım. z 'ye göre birinci mertebede, yer değiştiren su hacmindeki artış

$$\Delta V = 2al \sin \alpha z.$$

Denge durumundaki kaldırma kuvveti zaten ağırlığı dengelemektedir. Bu nedenle ek kaldırma kuvveti, geri çağırıcı kuvveti verir:

$$F_z = -\rho g \Delta V = -2\rho g al \sin \alpha z.$$

Etkin kütlede belirtilen üçte birlik artış sonucunda

$$M_{\text{eff}} = M + \frac{1}{3}M = \frac{4}{3}M.$$

(a) kısmından, gerçek kütle şu bağıntıyı sağlar:

$$M = \rho a^2 l S(\alpha).$$

Dolayısıyla hareket denklemi

$$\frac{4}{3}\rho a^2 l S(\alpha) \ddot{z} + 2\rho g al \sin \alpha z = 0.$$

Bu, basit harmonik harekettir ve

$$\omega_z^2 = \frac{3g \sin \alpha}{2a S(\alpha)}.$$

Bu nedenle saniyedeki çevrim sayısı cinsinden frekans

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}.$$

Yalnızca düşey yer değiştirme doğrusallaştırılmıştır; α için küçük açı yaklaşımı yapılmamıştır.

(c)

Silindirin, merkezinden geçen sabit yatay eksen etrafında döndüğüne ilişkin belirtilen yaklaşımı kullanalım.

Silindirin kesiti dairesel olduğundan, bu eksen etrafındaki dönme, suya batmış kısmın geometrisini değiştirmez. Kaldırma kuvveti merkez ekseninden geçerek düşey yönde etki eder ve bu eksene göre tork oluşturmaz. Silindirin kendi ağırlığı da bu eksenden geçerek etki eder. Bu nedenle geri çağırıcı torkun tamamı çubuğun ağırlığından kaynaklanır.

Çubuk, eksenden a uzaklıktan $3a$ uzaklığa kadar uzanır. Dolayısıyla kütle merkezi eksenden $2a$ uzaklıktadır. Aşağı yönlü düşey doğrultudan θ kadar açisal yer değiştirme için,

$$\tau = -2mga \sin \theta \simeq -2mga \theta,$$

burada son yaklaşımda $|\theta| \ll 1$ kullanılmıştır.

Silindirin merkez eksenine göre eylemsizlik momenti

$$I_{\text{cyl}} = \frac{1}{2}ma^2.$$

İnce, düzgün çubuk için paralel eksen teoremi

$$I_{\text{rod}} = \frac{1}{12}m(2a)^2 + m(2a)^2 = \frac{13}{3}ma^2.$$

Böylece

$$I = I_{\text{cyl}} + I_{\text{rod}} = \frac{29}{6}ma^2.$$

İstendiği gibi suyun dinamiğini ve viskozitesini ihmal ederek,

$$I\ddot{\theta} = -2mga \theta,$$

ya da

$$\ddot{\theta} + \frac{12g}{29a}\theta = 0.$$

Dolayısıyla,

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{12g}{29a}}, \quad f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}.$$

(d)

Düşey ve açisal salınım periyotları sırasıyla T_z ve T_θ olsun. Frekansların karelerinin oranı alındığında a ve g elenir:

$$\left(\frac{T_\theta}{T_z}\right)^2 = \frac{\omega_z^2}{\omega_\theta^2} = \frac{29 \sin \alpha}{8S(\alpha)}.$$

$T_z \simeq 1$ s ve $T_\theta \simeq 1.5$ s kullanıldığında,

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} \simeq \frac{29}{8(1.5)^2} = \frac{29}{18} \simeq 1.611.$$

$\alpha = 90^\circ = \pi/2$ için,

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\pi}{2} \simeq 1.571,$$

ve öngörülen periyot oranı

$$\frac{T_\theta}{T_z} = \sqrt{\frac{29}{4\pi}} \simeq 1.519,$$

olup ölçülen yaklaşık 1.5 oranıyla tutarlıdır. Verilen periyot değerleriyle çözüm yapıldığında $\alpha \simeq 91.15^\circ$ elde edilir. Böylece

$$\boxed{\alpha \simeq 90^\circ},$$

yani silindirin yaklaşık yarısı suya batmıştır.

Açısal salınım periyodu yarıçapı doğrudan verir:

$$T_\theta = 2\pi \sqrt{\frac{29a}{12g}},$$

dolayısıyla

$$a = \frac{3gT_\theta^2}{29\pi^2} = \frac{3(9.8)(1.5)^2}{29\pi^2} \text{ m} \simeq 0.231 \text{ m}.$$

Böylece,

$$\boxed{a \simeq 0.23 \text{ m}}.$$

$l = a$ olduğundan, denge koşulu toplam kütleyi şöyle verir:

$$M = \rho a^3 S(\alpha).$$

$\alpha \simeq \pi/2$ için,

$$M \simeq \frac{\pi}{2} \rho a^3 \simeq \frac{\pi}{2} (1000)(0.231)^3 \text{ kg} \simeq 19.4 \text{ kg}.$$

Verilen periyotlardan elde edilen $\alpha \simeq 91.15^\circ$ değeri kullanıldığında $M \simeq 19.9 \text{ kg}$ bulunur. Belirtilen periyotların izin verdiği hassasiyet düzeyinde,

$$\boxed{M \simeq 20 \text{ kg}}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.