

IPhO 1995

Теоретические задачи и решения · Канберра, Австралия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1995/

Задача 1: Гравитационное красное смещение и измерение массы звезды

(а) (3 балла)

Фотон с частотой f обладает эффективной инертной массой m , определяемой его энергией. Предположим, что его гравитационная масса равна этой инертной массе. Тогда фотон, испущенный с поверхности звезды, будет терять энергию при выходе из её гравитационного поля. Покажите, что изменение частоты Δf фотона при его движении от поверхности звезды до бесконечности определяется выражением

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}$$

при $\Delta f \ll f$, где:

- G = гравитационная постоянная
- R = радиус звезды
- c = скорость света
- M = масса звезды.

Таким образом, красное смещение известной спектральной линии, измеренное на большом расстоянии от звезды, позволяет определить отношение M/R . Зная R , можно определить массу звезды.

(b) (12 баллов)

Для проведения эксперимента по измерению массы M и радиуса R звезды в нашей Галактике запускается беспилотный космический аппарат. Ионы He^+ на поверхности звезды испускают фотоны. Эти фотоны можно регистрировать благодаря резонансному поглощению ионами He^+ , находящимися в экспериментальной камере на борту космического аппарата. Резонансное поглощение происходит лишь в том случае, если ионам He^+ сообщить скорость, направленную к звезде, чтобы точно скомпенсировать красное смещение.

При приближении космического аппарата к звезде по радиальному направлению измеряется скорость ионов He^+ в экспериментальной камере относительно звезды ($v = \beta c$), при которой наблюдается резонансное поглощение, как функция расстояния d до ближайшей точки поверхности звезды. Экспериментальные данные приведены в таблице.

Используя все данные, определите графически массу M и радиус R звезды. Оценивать погрешности полученных результатов не требуется.

Данные для условия резонанса

Параметр скорости	$\beta = v/c \quad (\times 10^{-5})$	3.352	3.279	3.195	3.077	2.955
Расстояние от поверхности звезды	$d \quad (\times 10^8 \text{m})$	38.90	19.98	13.32	8.99	6.67

(с) (5 баллов)

При определении R и M в таком эксперименте обычно учитывают поправку к частоте, обусловленную отдачей излучающего атома. [Тепловое движение приводит к уширению линий излучения без смещения их максимумов, поэтому можно считать, что все тепловые эффекты уже учтены.]

(i) (4 балла)

Предположим, что первоначально покоящийся атом испытывает распад, в результате которого образуются фотон и атом, получивший импульс отдачи. Получите релятивистское выражение для энергии hf испущенного фотона через ΔE (разность энергий покоя двух атомных уровней) и начальную массу покоя m_0 атома.

(ii) (1 балл)

Используя полученный результат, численно оцените релятивистское относительное изменение частоты $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil}}$ для ионов He^+ .

Полученный результат должен быть значительно меньше гравитационного красного смещения, найденного в пункте (b).

Данные:

Скорость света	c	=	$3.0 \times 10^8 \text{m s}^{-1}$
Энергия покоя He	$m_0 c^2$	=	$4 \times 938 (\text{MeV})$
Энергия по модели Бора	E_n	=	$-\frac{13.6 Z^2}{n^2} (\text{eV})$
Гравитационная постоянная	G	=	$6.7 \times 10^{-11} \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- (a) При $\Delta f = f_\infty - f$,

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}.$$

- **(b)** График зависимости $1/\beta$ от $1/d$ представляет собой приближённо прямую линию. Использование всех пяти измерений даёт

$$R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ m}, \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Соответствующее относительное изменение частоты при движении от поверхности до бесконечности составляет приблизительно -3.46×10^{-5} .

- **(c)(i)** Точное выражение для энергии фотона имеет вид

$$hf = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right).$$

- **(c)(ii)** Для перехода $n_i \rightarrow n_f$ в ионе He^+ ,

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

Для переходов между связанными состояниями модуль этой величины меньше 7.3×10^{-9} . Например, переход $2 \rightarrow 1$ даёт -5.4×10^{-9} , что в несколько тысяч раз меньше гравитационного смещения.

Решение

(a)

Энергия фотона равна $E = hf$, поэтому в рамках предположений задачи его эффективная инертная и гравитационная масса равна

$$m = \frac{hf}{c^2}.$$

Гравитационный потенциал вне звезды равен

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

При движении фотона от поверхности до бесконечности его гравитационная потенциальная энергия увеличивается на GMm/R . Поэтому закон сохранения энергии даёт

$$h\Delta f \simeq -\frac{GMm}{R}.$$

Здесь в первом приближении m можно считать постоянной, поскольку относительное изменение энергии фотона мало. Подставляя $m = hf/c^2$, получаем

$$h\Delta f \simeq -\frac{GM}{R} \frac{hf}{c^2},$$

откуда

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}.$$

Отрицательный знак соответствует красному смещению. Приближение применимо при $GM/(Rc^2) \ll 1$.

(b)

В точке нахождения космического аппарата расстояние до центра звезды равно $r = R + d$. Применяя те же энергетические рассуждения к движению между R и $R + d$, для частоты f_r , измеряемой наблюдателем, неподвижным относительно звезды, получаем

$$f_r \simeq f_0 \left[1 - \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) \right],$$

где f_0 — частота излучения при переходе. Поправками на отдачу здесь пренебрегаем; они будут оценены в пункте (с).

Определим положительную величину относительного уменьшения частоты вследствие гравитационного смещения:

$$\epsilon(d) = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right).$$

Фотоны движутся от звезды, а поглощающие ионы — к звезде. Поэтому в системе отсчёта ионов наблюдается доплеровское синее смещение:

$$f_{\text{ion}} = \gamma(1 + \beta)f_r = f_r \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Поскольку $\beta \sim 3 \times 10^{-5}$,

$$f_{\text{ion}} \simeq f_r(1 + \beta).$$

Для резонансного поглощения необходимо $f_{\text{ion}} = f_0$, поэтому в первом порядке

$$(1 - \epsilon)(1 + \beta) \simeq 1 \implies \beta \simeq \epsilon.$$

Следовательно,

$$\boxed{\beta = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) = \frac{GM}{Rc^2} \frac{d}{R+d}}$$

с требуемой точностью.

Переход к обратным величинам даёт линейную зависимость:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{Rc^2}{GM} + \frac{R^2c^2}{GM} \frac{1}{d}.$$

Поэтому построим график зависимости

$$Y = \frac{1}{\beta} \quad \text{от} \quad X = \frac{1}{d}.$$

Записав уравнение прямой в виде $Y = A + BX$, получаем для её отрезка на оси ординат и углового коэффициента

$$A = \frac{Rc^2}{GM}, \quad B = \frac{R^2c^2}{GM}.$$

Они определяют обе неизвестные величины:

$$\boxed{R = \frac{B}{A}}, \quad \boxed{M = \frac{c^2 B}{GA^2}}.$$

Пять точек для построения графика в удобных масштабах осей:

$X/(10^{-9} \text{ м}^{-1})$	$Y/10^4$
0.25707	2.98329
0.50050	3.04971
0.75075	3.12989
1.11235	3.24992
1.49925	3.38409

График представляет собой приближённо прямую возрастающую линию. Прямая, наилучшим образом описывающая все пять точек, имеет вид

$$\frac{Y}{10^4} \simeq 2.8917 + 0.3249 \frac{X}{10^{-9} \text{ м}^{-1}}.$$

Таким образом, отрезок на оси ординат и угловой коэффициент без масштабных множителей равны

$$A \simeq 2.8917 \times 10^4, \quad B \simeq 3.2489 \times 10^{12} \text{ м}.$$

При экстраполяции абсцисса точки пересечения с горизонтальной осью равна $-A/B \simeq -8.90 \times 10^{-9} \text{ м}^{-1}$.

Отсюда следует, что

$$R = \frac{3.2489 \times 10^{12}}{2.8917 \times 10^4} \simeq 1.12 \times 10^8 \text{ м},$$

и

$$M = \frac{(3.0 \times 10^8)^2 (3.2489 \times 10^{12})}{(6.7 \times 10^{-11})(2.8917 \times 10^4)^2} \simeq 5.2 \times 10^{30} \text{ кг}.$$

С точностью, разумной для графического определения,

$$\boxed{R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ м}, \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ кг}}.$$

Красное смещение при движении от поверхности до бесконечности равно

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2} = -\frac{1}{A} \simeq -3.46 \times 10^{-5}.$$

Это также подтверждает применимость приближения слабого поля, использованного во всём решении.

(c)(i)

Пусть масса покоя атома в начальном состоянии равна m_0 , а в конечном состоянии — m_1 .

Разность энергий покоя этих двух внутренних состояний равна

$$\Delta E = (m_0 - m_1)c^2.$$

Обозначим энергию испущенного фотона через $E_\gamma = hf$. Поскольку первоначально атом покоится, из закона сохранения импульса следует, что модуль импульса атома после отдачи равен

$$p = \frac{E_\gamma}{c}.$$

Используя релятивистскую связь энергии и импульса для атома в конечном состоянии, из закона сохранения энергии получаем

$$m_0 c^2 = E_\gamma + \sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2} = E_\gamma + \sqrt{m_1^2 c^4 + E_\gamma^2}.$$

Переносим слагаемые и возводя в квадрат, получаем

$$(m_0 c^2 - E_\gamma)^2 = m_1^2 c^4 + E_\gamma^2,$$

так что

$$E_\gamma = \frac{(m_0^2 - m_1^2) c^2}{2m_0}.$$

Подстановка $m_1 = m_0 - \Delta E/c^2$ даёт

$$hf = \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2m_0 c^2} = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right).$$

Это выражение является точным для указанного двухчастичного распада. Энергия фотона меньше разности внутренних энергий, поскольку часть энергии переходит в кинетическую энергию атома, получившего отдачу.

(c)(ii)

В отсутствие отдачи частота перехода была бы равна $f_0 = \Delta E/h$. Следовательно,

$$\frac{f - f_0}{f_0} = -\frac{\Delta E}{2m_0 c^2}.$$

Поскольку поправка очень мала, относительное изменение частоты вследствие отдачи равно

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -\frac{\Delta E}{2m_0 c^2}.$$

Для He^+ имеем $Z = 2$, и приведённая формула Бора даёт

$$E_n = -\frac{54.4}{n^2} \text{ eV}.$$

Таким образом, при излучательном переходе из n_i в $n_f < n_i$,

$$\Delta E = 54.4 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \text{ eV}.$$

Данная в условии энергия покоя равна

$$m_0 c^2 = 4 \times 938 \text{ MeV} = 3.752 \times 10^9 \text{ eV}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

Для любого перехода между связанными состояниями $\Delta E < 54.4 \text{ eV}$, что даёт численную оценку сверху:

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right|_{\text{recoil}} < 7.3 \times 10^{-9}.$$

Например, для перехода $2 \rightarrow 1$ имеем

$$\Delta E = 54.4 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 40.8 \text{ eV},$$

и поэтому

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil, } 2 \rightarrow 1} \simeq -5.4 \times 10^{-9}.$$

Даже верхняя оценка в несколько тысяч раз меньше гравитационных смещений, составляющих приблизительно 3×10^{-5} в пункте (b).

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 2: Распространение звука

Введение

Скорость распространения звука в океане зависит от глубины, температуры и солёности. На рисунке 1(a) ниже показана зависимость скорости звука c от глубины z для случая, когда минимальное значение скорости c_0 достигается посередине между поверхностью океана и морским дном. Обратите внимание, что для удобства принято $z = 0$ на глубине этого минимума скорости звука, $z = z_S$ на поверхности и $z = -z_b$ на морском дне. Выше уровня $z = 0$ скорость c задаётся выражением

$$c = c_0 + bz.$$

Ниже уровня $z = 0$ скорость c задаётся выражением

$$c = c_0 - bz.$$

В обоих случаях $b = \left| \frac{dc}{dz} \right|$, то есть b — модуль градиента скорости звука по глубине; величина b считается постоянной.

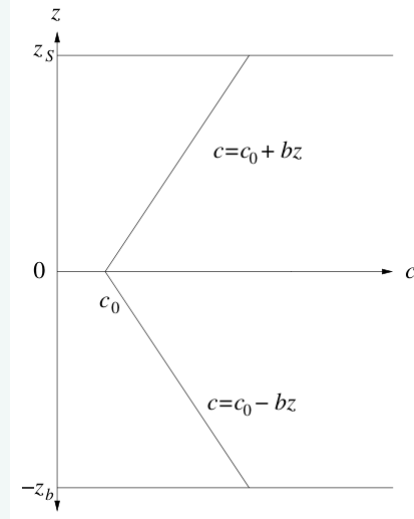


Рисунок 1 (а)

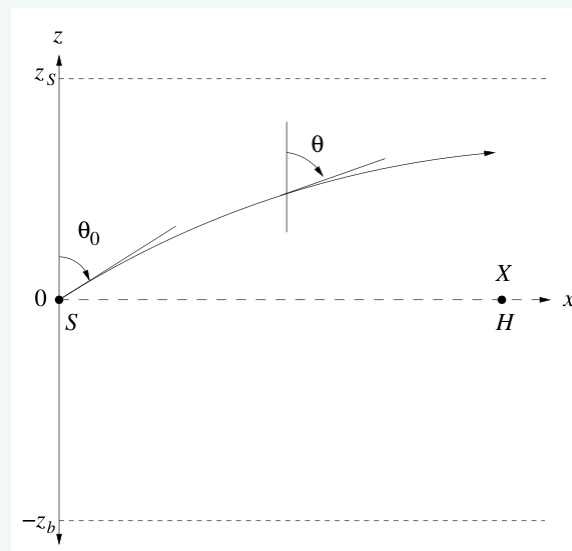


Рисунок 1 (b)

На рисунке 1(b) показано сечение океана плоскостью z - x , где ось x направлена горизонтально. Зависимость c от z показана на рисунке 1(a). В точке $z = 0, x = 0$ расположен источник звука S . Из S выходит «звуковой луч» под углом θ_0 , как показано на рисунке. Из-за зависимости c от z луч будет преломляться.

(а) (6 баллов)

Покажите, что траектория луча, выходящего из источника S и лежащего в плоскости z - x , представляет собой дугу окружности радиуса R , где

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

(b) (3 балла)

Выведите выражение через z_S , c_0 и b для наименьшего значения угла θ_0 для направленных вверх лучей, которые могут распространяться без отражения звуковой волны от поверхности моря.

(c) (4 балла)

На рисунке 1(b) показан приёмник звука H , расположенный в точке $z = 0, x = X$.

Выведите выражение через b, X и c_0 , задающее последовательность углов θ_0 , при которых звуковой луч, выходящий из S , достигает приёмника H . Считайте, что z_S и z_b достаточно велики, чтобы исключить возможность отражения от поверхности моря или морского дна.

(d) (2 балла)

Вычислите четыре наименьших значения θ_0 для преломлённых лучей, достигающих H из S , если

- $X = 10000 \text{ m}$
- $c_0 = 1500 \text{ m s}^{-1}$
- $b = 0.02000 \text{ s}^{-1}$

(e) (5 баллов)

Выведите выражение для времени распространения звука от S до H вдоль траектории луча, соответствующей наименьшему значению угла θ_0 , найденному в пункте (c).

Вычислите это время для условий, заданных в пункте (d). Может оказаться полезной следующая формула:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \tan \left(\frac{x}{2} \right)$$

Вычислите время распространения прямого луча от S до H вдоль $z = 0$. Какой из двух лучей придёт первым: луч с $\theta_0 = \pi/2$ или луч с наименьшим значением θ_0 , вычисленным в пункте (d)?

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **(a)** Каждый участок, целиком лежащий выше или ниже $z = 0$, представляет собой дугу окружности радиуса

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

Случай $\theta_0 = 0$ соответствует прямому вертикальному лучу, для которого $R \rightarrow \infty$.

- **(b)** Предельный угол равен

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

При равенстве этому значению луч касается поверхности; при больших углах луч поворачивает ниже неё.

- (с) Для преломлённых лучей, первоначально направленных вверх,

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где n — число дуг окружностей между источником и приёмником. Для прямого луча $\theta_0 = \pi/2$.

- (d) Четыре наименьших угла равны

$$86.19^\circ, \quad 88.09^\circ, \quad 88.73^\circ, \quad 89.05^\circ.$$

- (e) Для наименьшего угла, $n = 1$,

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right] \approx 6.662 \text{ s}.$$

Время распространения прямого луча равно

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} \approx 6.667 \text{ s}.$$

Преломлённый луч приходит первым, опережая прямой приблизительно на 4.93 ms .

Решение

Используем геометрическую акустику: длина волны достаточно мала, чтобы распространение можно было описывать лучами в стационарной, локально изотропной среде. Скорость звука зависит только от z .

(a)

Представим среду как последовательность тонких горизонтальных слоёв. Закон Снеллиуса, в котором угол отсчитывается от вертикальной нормали к этим слоям, даёт

$$\frac{\sin \theta}{c(z)} = \frac{\sin \theta_0}{c_0} \equiv p,$$

где p постоянно вдоль луча.

Пусть s — длина пути вдоль луча. Для луча, распространяющегося в сторону увеличения x ,

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta.$$

В верхней области $c = c_0 + bz$. Дифференцируя $\sin \theta = pc$ вдоль луча, получаем

$$\cos \theta \frac{d\theta}{ds} = pb \frac{dz}{ds} = pb \cos \theta.$$

Таким образом, определяя значение в точке поворота, где луч горизонтален, по непрерывности, получаем

$$\frac{d\theta}{ds} = pb = \frac{b \sin \theta_0}{c_0}.$$

Скорость изменения направления касательной по длине дуги равна кривизне. Поскольку она постоянна, траектория представляет собой дугу окружности радиуса

$$R = \frac{1}{pb} = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

Уравнение окружности можно также найти в явном виде. Используя $ds = R d\theta$ и начальное положение $x = z = 0$, получаем

$$x = R(\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad z = R(\sin \theta - \sin \theta_0).$$

Поскольку $R \sin \theta_0 = c_0/b$, из этих уравнений следует

$$(x - R \cos \theta_0)^2 + \left(z + \frac{c_0}{b}\right)^2 = R^2.$$

Следовательно, центр окружности, которой принадлежит верхняя дуга, находится в точке

$$\left(R \cos \theta_0, -\frac{c_0}{b}\right).$$

Ниже $z = 0$ градиент меняет знак, поэтому $d\theta/ds = -pb$. Кривизна меняет знак, а её модуль остаётся равным $1/R$. Поэтому луч, пересекающий $z = 0$, последовательно проходит по дугам окружностей одинакового радиуса.

При $\theta_0 = 0$ закон Снеллиуса даёт вертикальный луч с нулевой кривизной. Приведённая формула радиуса понимается в предельном смысле: $R \rightarrow \infty$.

(b)

В высшей точке верхней дуги луч горизонтален, поэтому $\theta = \pi/2$. Тогда закон Снеллиуса даёт

$$\frac{1}{c_0 + bz_{\max}} = \frac{\sin \theta_0}{c_0},$$

откуда

$$z_{\max} = \frac{c_0}{b} \left(\frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right).$$

Для предельного луча, не пересекающего поверхность моря, выполняется $z_{\max} = z_S$. Следовательно,

$$\sin \theta_{0,\min} = \frac{c_0}{c_0 + bz_S},$$

так что

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

Поскольку с увеличением θ_0 величина $z_{\max}$ уменьшается, при углах выше этого порога луч поворачивает ниже поверхности. Равенство соответствует касанию поверхности; чтобы луч оставался строго ниже поверхности, требуется $\theta_0 > \theta_{0,\min}$.

(c)

Проходя первую верхнюю дугу, луч возвращается на уровень $z = 0$, когда

$$\sin \theta = \sin \theta_0, \quad \theta = \pi - \theta_0.$$

Его горизонтальное перемещение к моменту этого пересечения равно

$$D = R [\cos \theta_0 - \cos(\pi - \theta_0)] = 2R \cos \theta_0.$$

Используя радиус из пункта (a), получаем

$$D = \frac{2c_0}{b} \cot \theta_0.$$

Скорость непрерывна при $z = 0$, поэтому направление луча там также непрерывно. Одинаковые модули градиента выше и ниже $z = 0$ приводят к чередованию верхних и нижних дуг, каждой из которых соответствует одно и то же горизонтальное перемещение D .

Луч достигает приёмника, пройдя целое число n таких дуг:

$$X = nD = \frac{2nc_0}{b} \cot \theta_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно,

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right).$$

Эти углы возрастают с n , поэтому наименьший угол соответствует одной верхней дуге:

$$\theta_{0,1} = \tan^{-1} \left(\frac{2c_0}{bX} \right).$$

В силу симметрии существуют также соответствующие траектории лучей, первоначально направленных вниз. Горизонтальный прямой луч, $\theta_0 = \pi/2$, представляет собой ещё одну траекторию.

(d)

Числовой коэффициент в формуле для угла равен

$$\frac{2c_0}{bX} = \frac{2(1500)}{(0.02000)(10000)} = 15.$$

Таким образом, $\theta_{0,n} = \tan^{-1}(15n)$, что даёт

n	$\tan \theta_{0,n}$	$\theta_{0,n}$
1	15	86.19°
2	30	88.09°
3	45	88.73°
4	60	89.05°

(e)

Обозначим наименьший начальный угол через $\theta_1 = \theta_{0,1}$. Этот луч проходит по одной верхней дуге, причём θ возрастает от θ_1 до $\pi - \theta_1$.

Время распространения равно

$$t_1 = \int \frac{ds}{c}.$$

Вдоль этой дуги

$$ds = R d\theta, \quad c = \frac{c_0}{\sin \theta_1} \sin \theta = bR \sin \theta.$$

Следовательно,

$$t_1 = \frac{1}{b} \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{1}{b} \left[\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}.$$

Используя $\tan[(\pi - \theta_1)/2] = \cot(\theta_1/2)$, получаем

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right).$$

Чтобы выразить это время через заданные величины, введём обозначение

$$u = \frac{bX}{2c_0} = \cot \theta_1.$$

Формула половинного угла даёт

$$\cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right) = \frac{1 + \cos \theta_1}{\sin \theta_1} = \csc \theta_1 + \cot \theta_1 = \sqrt{1 + u^2} + u.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right].$$

Для заданных числовых данных

$$u = \frac{(0.02000)(10000)}{2(1500)} = \frac{1}{15},$$

так что

$$t_1 = \frac{2}{0.02000} \ln \left[\sqrt{1 + \frac{1}{225}} + \frac{1}{15} \right] \text{ s} = \boxed{6.662 \text{ s}}.$$

Прямой луч остаётся на уровне $z = 0$, где его скорость равна c_0 . Поэтому время его распространения равно

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} = \frac{10000}{1500} \text{ s} = \boxed{6.667 \text{ s}}.$$

При использовании неокруглённых значений разность равна

$$t_{\text{direct}} - t_1 = 0.00492842 \dots \text{ s} \approx \boxed{4.93 \text{ ms}}.$$

Таким образом, **преломлённый луч с наименьшим начальным углом приходит первым.**

Увеличение скорости звука при удалении от $z = 0$ с избытком компенсирует увеличение длины его пути.

Этот результат сравнения также следует в общем случае из соотношений

$$t_1 = \frac{2}{b} \operatorname{arsinh} u, \quad t_{\text{direct}} = \frac{2u}{b},$$

поскольку при $u > 0$

$$\operatorname{arsinh} u = \int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} < u.$$

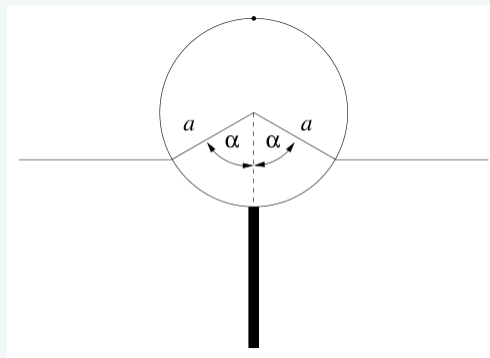
Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Цилиндрический буй

(a) (3 балла)

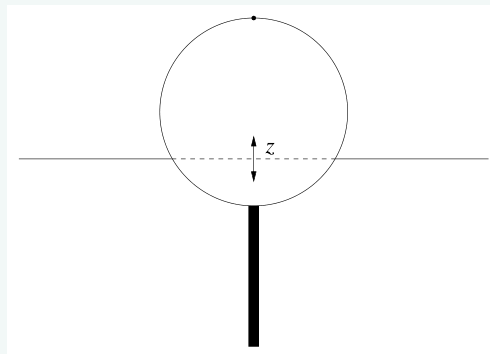
Буй состоит из сплошного цилиндра радиуса a и длины l , изготовленного из лёгкого материала с однородной плотностью d , и однородного жёсткого стержня, выступающего радиально наружу из нижней части цилиндра посередине его длины. Масса стержня равна массе цилиндра, его длина равна диаметру цилиндра, а плотность стержня больше плотности морской воды. Этот буй плавает в морской воде плотностью ρ .

Для положения равновесия выведите выражение, связывающее угол α , показанный на рисунке и характеризующий погружение буя, с отношением d/ρ . Объёмом стержня пренебрегите.



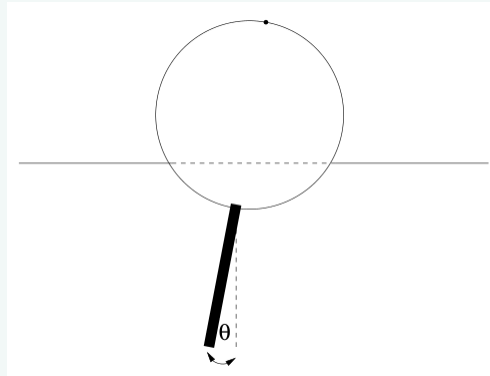
(b) (4 балла)

Если вследствие некоторого возмущения буй сместится вертикально вниз на малую величину z , на него будет действовать результирующая сила, под действием которой он начнёт совершать вертикальные колебания около положения равновесия. Определите частоту этих вертикальных колебаний через α , g и a , где g — ускорение свободного падения. Считайте, что влияние движения воды на динамику буя приводит к увеличению его эффективной массы на одну треть. Можно считать, что угол α не мал.



(c) (8 баллов)

В приближении, в котором цилиндр совершает угловые колебания вокруг своей горизонтальной центральной оси, определите частоту этих колебаний, также выразив её через g и a . В этом случае пренебрегите динамикой и вязкостью воды. Угол отклонения при колебаниях считается малым.



(d) (5 баллов)

Внутри бую установлены чувствительные акселерометры, которые позволяют измерять вертикальные и угловые колебания и передавать эту информацию по радио на берег. В относительно спокойной воде зарегистрировано, что период вертикальных колебаний составляет около 1 секунды, а период угловых колебаний — около 1.5 секунды. На основании этих данных покажите, что угол α , характеризующий погружение бую, составляет около 90° , и затем оцените радиус бую и его полную массу, если длина цилиндра l равна a .

[Можно принять, что $\rho \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3}$ и $g \simeq 9.8 \text{ m s}^{-2}$.]

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- (a) Если α выражен в радианах,

$$\frac{d}{\rho} = \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2\pi}.$$

- (b) Частота вертикальных колебаний равна

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}.$$

- (c) Частота угловых колебаний равна

$$f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}.$$

• (d)

$$\alpha \simeq 90^\circ, \quad a \simeq 0.23 \text{ m}, \quad M \simeq 20 \text{ kg}.$$

Если использовать указанные значения периодов как точные, получим $\alpha \simeq 91.1^\circ$.

Решение

(a)

Обозначим массу цилиндра через m . Стержень имеет такую же массу, поэтому

$$m = d\pi a^2 l, \quad M = 2m.$$

Погружённая часть поперечного сечения представляет собой круговой сегмент, которому соответствует угол 2α при центре цилиндра. Его площадь равна разности площадей сектора и треугольника:

$$A_{\text{sub}} = \frac{1}{2}a^2(2\alpha) - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\alpha = a^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).$$

Здесь и далее углы в этих выражениях заданы в радианах.

Введём обозначение

$$S(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \cos \alpha.$$

Если пренебречь объёмом стержня, объём вытесненной воды равен $a^2 l S(\alpha)$. По закону Архимеда условие равновесия имеет вид

$$\rho g a^2 l S(\alpha) = 2d\pi a^2 l g.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{\rho} = \frac{S(\alpha)}{2\pi} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4\pi}.$$

(b)

В положении равновесия ширина поперечного сечения цилиндра на уровне поверхности воды равна

$$w = 2a \sin \alpha.$$

Следовательно, площадь горизонтального сечения цилиндра плоскостью поверхности воды равна $wl = 2al \sin \alpha$.

Будем считать смещение z положительным при движении вниз. В первом порядке по z увеличение объёма вытесненной воды равно

$$\Delta V = 2al \sin \alpha z.$$

В положении равновесия выталкивающая сила уже уравнивает силу тяжести. Поэтому дополнительная выталкивающая сила создаёт возвращающую силу

$$F_z = -\rho g \Delta V = -2\rho g al \sin \alpha z.$$

Указанное в условии увеличение эффективной массы на одну треть даёт

$$M_{\text{eff}} = M + \frac{1}{3}M = \frac{4}{3}M.$$

Согласно пункту (а), фактическая масса удовлетворяет соотношению

$$M = \rho a^2 l S(\alpha).$$

Таким образом, уравнение движения имеет вид

$$\frac{4}{3} \rho a^2 l S(\alpha) \ddot{z} + 2 \rho g a l \sin \alpha z = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний, для которых

$$\omega_z^2 = \frac{3g \sin \alpha}{2a S(\alpha)}.$$

Следовательно, частота, выраженная числом колебаний в секунду, равна

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}.$$

Линеаризация проведена только по вертикальному смещению; приближение малого угла α не использовалось.

(с)

Воспользуемся заданным приближением, согласно которому цилиндр вращается вокруг своей неподвижной горизонтальной центральной оси.

Поскольку поперечное сечение цилиндра является кругом, вращение вокруг этой оси не меняет геометрию погружённой части. Выталкивающая сила направлена вертикально, её линия действия проходит через центральную ось, поэтому она не создаёт момента относительно этой оси. Линия действия силы тяжести самого цилиндра также проходит через эту ось. Таким образом, возвращающий момент целиком обусловлен силой тяжести стержня.

Стержень занимает участок от расстояния a до расстояния $3a$ от оси. Следовательно, его центр масс находится на расстоянии $2a$. При отклонении на угол θ от вертикали, направленной вниз,

$$\tau = -2mga \sin \theta \simeq -2mga \theta,$$

где в последнем приближении использовано условие $|\theta| \ll 1$.

Момент инерции цилиндра относительно его центральной оси равен

$$I_{\text{cyl}} = \frac{1}{2} m a^2.$$

Для тонкого однородного стержня по теореме Штейнера получаем

$$I_{\text{rod}} = \frac{1}{12} m (2a)^2 + m (2a)^2 = \frac{13}{3} m a^2.$$

Таким образом,

$$I = I_{\text{cyl}} + I_{\text{rod}} = \frac{29}{6} m a^2.$$

Пренебрегая динамикой и вязкостью воды, как указано в условии, получаем

$$I \ddot{\theta} = -2mga \theta,$$

или

$$\ddot{\theta} + \frac{12g}{29a}\theta = 0.$$

Следовательно,

$$\omega_{\theta} = \sqrt{\frac{12g}{29a}}, \quad f_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}.$$

(d)

Обозначим периоды вертикальных и угловых колебаний через T_z и T_{θ} . Взяв отношение квадратов частот, исключим a и g :

$$\left(\frac{T_{\theta}}{T_z}\right)^2 = \frac{\omega_z^2}{\omega_{\theta}^2} = \frac{29 \sin \alpha}{8S(\alpha)}.$$

Подставляя $T_z \simeq 1$ s и $T_{\theta} \simeq 1.5$ s, получаем

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} \simeq \frac{29}{8(1.5)^2} = \frac{29}{18} \simeq 1.611.$$

При $\alpha = 90^\circ = \pi/2$

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\pi}{2} \simeq 1.571,$$

а расчётное отношение периодов равно

$$\frac{T_{\theta}}{T_z} = \sqrt{\frac{29}{4\pi}} \simeq 1.519,$$

что согласуется с приближённым измеренным отношением 1.5. Решение с указанными значениями периодов даёт $\alpha \simeq 91.15^\circ$. Таким образом,

$$\boxed{\alpha \simeq 90^\circ},$$

то есть цилиндр погружён приблизительно наполовину.

Период угловых колебаний позволяет непосредственно определить радиус:

$$T_{\theta} = 2\pi \sqrt{\frac{29a}{12g}},$$

откуда

$$a = \frac{3gT_{\theta}^2}{29\pi^2} = \frac{3(9.8)(1.5)^2}{29\pi^2} \text{ m} \simeq 0.231 \text{ m}.$$

Следовательно,

$$\boxed{a \simeq 0.23 \text{ m}}.$$

Поскольку $l = a$, из условия равновесия получаем полную массу

$$M = \rho a^3 S(\alpha).$$

При $\alpha \simeq \pi/2$

$$M \simeq \frac{\pi}{2} \rho a^3 \simeq \frac{\pi}{2} (1000)(0.231)^3 \text{ kg} \simeq 19.4 \text{ kg}.$$

Использование значения $\alpha \simeq 91.15^\circ$, полученного из указанных периодов, даёт $M \simeq 19.9 \text{ kg}$. С точностью, соответствующей заданным периодам,

$$\boxed{M \simeq 20 \text{ kg}}.$$

Решение проверено по официальному решению.