

IPhO 1995

Problemas teóricos y soluciones · Canberra, Australia · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1995/

Problema 1: Corrimiento gravitatorio al rojo y medición de la masa estelar

(a) (3 puntos)

Un fotón de frecuencia f posee una masa inercial efectiva m determinada por su energía. Suponga que tiene una masa gravitatoria igual a esta masa inercial. Por consiguiente, un fotón emitido en la superficie de una estrella perderá energía al escapar del campo gravitatorio de la estrella. Demuestre que la variación de frecuencia Δf del fotón al escapar desde la superficie de la estrella hasta el infinito viene dada por

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}$$

para $\Delta f \ll f$, donde:

- G = constante gravitatoria
- R = radio de la estrella
- c = velocidad de la luz
- M = masa de la estrella.

Así, el corrimiento al rojo de una línea espectral conocida, medido a gran distancia de la estrella, puede utilizarse para medir la razón M/R . El conocimiento de R permitirá determinar la masa de la estrella.

(b) (12 puntos)

Se lanza una nave espacial no tripulada en un experimento para medir tanto la masa M como el radio R de una estrella de nuestra galaxia. Los iones He^+ de la superficie de la estrella emiten fotones. Estos fotones pueden detectarse mediante absorción resonante por iones He^+ contenidos en una cámara de ensayo de la nave espacial. La absorción resonante solo se produce si se comunica a los iones He^+ una velocidad hacia la estrella que compense exactamente los corrimientos al rojo.

A medida que la nave espacial se aproxima radialmente a la estrella, se mide la velocidad respecto a la estrella ($v = \beta c$) de los iones He^+ de la cámara de ensayo en la condición de resonancia de absorción, en función de la distancia d a la superficie (más cercana) de la estrella. Los datos experimentales se muestran en la tabla adjunta.

Utilice todos los datos para determinar gráficamente la masa M y el radio R de la estrella. No es necesario estimar las incertidumbres de su respuesta.

Datos para la condición de resonancia

Parámetro de velocidad	$\beta = v/c \quad (\times 10^{-5})$	3.352	3.279	3.195	3.077	2.955
Distancia a la superficie de la estrella	$d \quad (\times 10^8 \text{m})$	38.90	19.98	13.32	8.99	6.67

(c) (5 puntos)

Para determinar R y M en un experimento de este tipo, es habitual considerar la corrección de frecuencia debida al retroceso del átomo emisor. [El movimiento térmico provoca un ensanchamiento de las líneas de emisión sin desplazar los máximos de emisión y, por tanto, podemos suponer que se han tenido en cuenta todos los efectos térmicos.]

(i) (4 puntos)

Suponga que el átomo se desexcita estando en reposo, produciendo un fotón y un átomo que retrocede. Obtenga la expresión relativista de la energía hf de un fotón emitido en función de ΔE (la diferencia de energía en reposo entre los dos niveles atómicos) y de la masa en reposo inicial m_0 del átomo.

(ii) (1 punto)

A partir de este resultado, realice una estimación numérica del corrimiento relativista de frecuencia $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil}}$ para el caso de los iones He^+ .

Su respuesta debería resultar mucho menor que el corrimiento gravitatorio al rojo obtenido en el apartado (b).

Datos:

Velocidad de la luz	c	=	$3.0 \times 10^8 \text{m s}^{-1}$
Energía en reposo del He	$m_0 c^2$	=	$4 \times 938 (\text{MeV})$
Energía de Bohr	E_n	=	$-\frac{13.6 Z^2}{n^2} (\text{eV})$
Constante gravitatoria	G	=	$6.7 \times 10^{-11} \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- (a) Con $\Delta f = f_\infty - f$,

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}}.$$

- **(b)** Una gráfica de $1/\beta$ en función de $1/d$ es aproximadamente una recta. Utilizando las cinco mediciones se obtiene

$$R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ m}, \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

El corrimiento relativo de frecuencia correspondiente entre la superficie y el infinito es aproximadamente -3.46×10^{-5} .

- **(c)(i)** La energía exacta del fotón es

$$hf = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right).$$

- **(c)(ii)** Para una transición $n_i \rightarrow n_f$ en He^+ ,

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

Su magnitud es inferior a 7.3×10^{-9} para transiciones entre estados ligados. Por ejemplo, $2 \rightarrow 1$ da -5.4×10^{-9} , varios miles de veces menor que el corrimiento gravitatorio.

Solución

(a)

El fotón tiene una energía $E = hf$, por lo que su masa inercial y gravitatoria efectiva, según las hipótesis del enunciado, es

$$m = \frac{hf}{c^2}.$$

El potencial gravitatorio en el exterior de la estrella es

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

Al viajar el fotón desde la superficie hasta el infinito, su energía potencial gravitatoria aumenta en GMm/R . Por tanto, la conservación de la energía da

$$h\Delta f \simeq -\frac{GMm}{R}.$$

Aquí, m puede tratarse como constante a primer orden porque la variación relativa de la energía del fotón es pequeña. Sustituyendo $m = hf/c^2$,

$$h\Delta f \simeq -\frac{GM}{R} \frac{hf}{c^2},$$

y, por tanto,

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}.$$

El signo negativo representa un corrimiento al rojo. La aproximación requiere que $GM/(Rc^2) \ll 1$.

(b)

En la posición de la nave espacial, la distancia al centro de la estrella es $r = R + d$. Aplicando el mismo razonamiento energético entre R y $R + d$, la frecuencia f_r medida por un observador en reposo respecto a la estrella es

$$f_r \simeq f_0 \left[1 - \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) \right],$$

donde f_0 es la frecuencia de la transición emitida. Aquí se desprecian las correcciones por retroceso, que se evalúan en el apartado (c).

Definimos la pérdida relativa positiva de frecuencia debida a la gravitación

$$\epsilon(d) = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right).$$

Los fotones viajan hacia el exterior, mientras que los iones absorbentes se mueven hacia la estrella. Por ello, los iones observan un corrimiento Doppler al azul:

$$f_{\text{ion}} = \gamma(1 + \beta)f_r = f_r \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Puesto que $\beta \sim 3 \times 10^{-5}$,

$$f_{\text{ion}} \simeq f_r(1 + \beta).$$

La absorción resonante requiere que $f_{\text{ion}} = f_0$, de modo que, a primer orden,

$$(1 - \epsilon)(1 + \beta) \simeq 1 \implies \beta \simeq \epsilon.$$

En consecuencia,

$$\boxed{\beta = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) = \frac{GM}{Rc^2} \frac{d}{R+d}}$$

con la precisión requerida.

Tomando los inversos se obtiene una relación lineal:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{Rc^2}{GM} + \frac{R^2c^2}{GM} \frac{1}{d}.$$

Por tanto, representamos

$$Y = \frac{1}{\beta} \quad \text{en función de} \quad X = \frac{1}{d}.$$

Escribiendo la recta como $Y = A + BX$, su ordenada en el origen y su pendiente son

$$A = \frac{Rc^2}{GM}, \quad B = \frac{R^2c^2}{GM}.$$

Estas permiten determinar ambas incógnitas:

$$\boxed{R = \frac{B}{A}}, \quad \boxed{M = \frac{c^2 B}{GA^2}}.$$

Los cinco puntos que deben representarse, con escalas convenientes en los ejes, son:

$X/(10^{-9} \text{ m}^{-1})$	$Y/10^4$
0.25707	2.98329
0.50050	3.04971
0.75075	3.12989
1.11235	3.24992
1.49925	3.38409

La gráfica es aproximadamente una recta creciente. La recta de mejor ajuste obtenida utilizando los cinco puntos es

$$\frac{Y}{10^4} \simeq 2.8917 + 0.3249 \frac{X}{10^{-9} \text{ m}^{-1}}.$$

Así, la ordenada en el origen y la pendiente en unidades sin escalar son

$$A \simeq 2.8917 \times 10^4, \quad B \simeq 3.2489 \times 10^{12} \text{ m}.$$

La intersección extrapolada con el eje horizontal es $-A/B \simeq -8.90 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$.

Se deduce que

$$R = \frac{3.2489 \times 10^{12}}{2.8917 \times 10^4} \simeq 1.12 \times 10^8 \text{ m},$$

y

$$M = \frac{(3.0 \times 10^8)^2 (3.2489 \times 10^{12})}{(6.7 \times 10^{-11})(2.8917 \times 10^4)^2} \simeq 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Con una precisión razonable para una determinación gráfica,

$$R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ m}, \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

El corrimiento al rojo entre la superficie y el infinito es

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2} = -\frac{1}{A} \simeq -3.46 \times 10^{-5}.$$

Esto también verifica la aproximación de campo débil utilizada a lo largo de todo el cálculo.

(c)(i)

Sea m_0 la masa en reposo del átomo inicial y m_1 la masa en reposo del átomo final. La diferencia entre las dos energías internas en reposo es

$$\Delta E = (m_0 - m_1)c^2.$$

Escribimos la energía del fotón emitido como $E_\gamma = hf$. Puesto que el átomo inicial está en reposo, la conservación de la cantidad de movimiento exige que el átomo que retrocede tenga una cantidad de movimiento de magnitud

$$p = \frac{E_\gamma}{c}.$$

Utilizando la relación relativista entre la energía y la cantidad de movimiento para el átomo final, la conservación de la energía da

$$m_0 c^2 = E_\gamma + \sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2} = E_\gamma + \sqrt{m_1^2 c^4 + E_\gamma^2}.$$

Reordenando y elevando al cuadrado,

$$(m_0 c^2 - E_\gamma)^2 = m_1^2 c^4 + E_\gamma^2,$$

de modo que

$$E_\gamma = \frac{(m_0^2 - m_1^2) c^2}{2m_0}.$$

Sustituyendo $m_1 = m_0 - \Delta E/c^2$ se obtiene

$$\boxed{hf = \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2m_0 c^2} = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right)}.$$

Esta expresión es exacta para la desexcitación de dos cuerpos planteada. La energía del fotón es menor que la diferencia de energía interna porque parte de la energía se transforma en energía cinética del átomo que retrocede.

(c)(ii)

Sin retroceso, la frecuencia de la transición sería $f_0 = \Delta E/h$. Por tanto,

$$\frac{f - f_0}{f_0} = -\frac{\Delta E}{2m_0 c^2}.$$

Como la corrección es muy pequeña, el corrimiento relativo debido al retroceso es

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -\frac{\Delta E}{2m_0 c^2}.$$

Para He^+ , $Z = 2$, y la fórmula de Bohr dada proporciona

$$E_n = -\frac{54.4}{n^2} \text{ eV}.$$

Así, para la emisión desde n_i hasta $n_f < n_i$,

$$\Delta E = 54.4 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \text{ eV}.$$

La energía en reposo dada es

$$m_0 c^2 = 4 \times 938 \text{ MeV} = 3.752 \times 10^9 \text{ eV}.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)}.$$

Para cualquier transición entre estados ligados, $\Delta E < 54.4 \text{ eV}$, lo que da la cota superior numérica

$$\boxed{\left| \frac{\Delta f}{f} \right|_{\text{recoil}} < 7.3 \times 10^{-9}}.$$

Por ejemplo, la transición $2 \rightarrow 1$ tiene

$$\Delta E = 54.4 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 40.8 \text{ eV},$$

y, por tanto,

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil, } 2 \rightarrow 1} \simeq -5.4 \times 10^{-9}.$$

Incluso la cota superior es varios miles de veces menor que los corrimientos gravitatorios de aproximadamente 3×10^{-5} del apartado (b).

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 2: Propagación del sonido

Introducción

La velocidad de propagación del sonido en el océano varía con la profundidad, la temperatura y la salinidad. La figura 1(a) muestra la variación de la velocidad del sonido c con la profundidad z para un caso en el que el valor mínimo de la velocidad c_0 se alcanza a mitad de camino entre la superficie del océano y el fondo marino. Obsérvese que, por conveniencia, $z = 0$ a la profundidad de este mínimo de la velocidad del sonido, $z = z_S$ en la superficie y $z = -z_b$ en el fondo marino. Por encima de $z = 0$, c viene dada por

$$c = c_0 + bz.$$

Por debajo de $z = 0$, c viene dada por

$$c = c_0 - bz.$$

En ambos casos, $b = \left| \frac{dc}{dz} \right|$, es decir, b es el módulo del gradiente de la velocidad del sonido con la profundidad; se supone que b es constante.

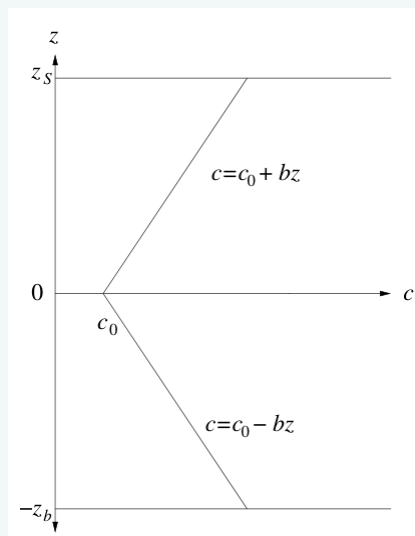


Figura 1 (a)

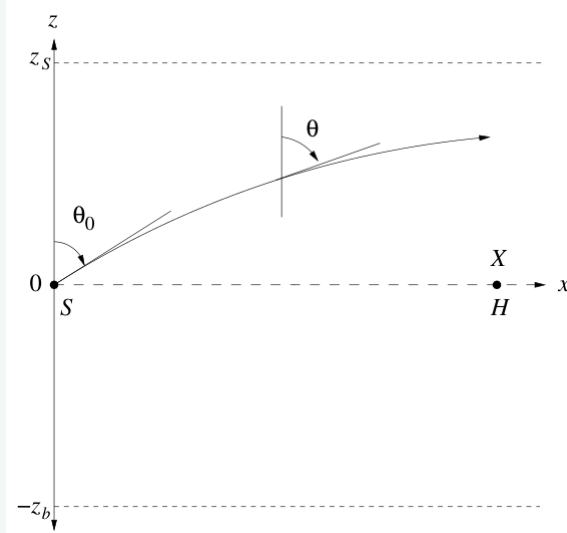


Figura 1 (b)

La figura 1(b) muestra una sección del océano en el plano z - x , donde x es una dirección horizontal. La variación de c con respecto a z se muestra en la figura 1(a). En la posición $z = 0$, $x = 0$, se encuentra una fuente sonora S . Desde S se emite un «rayo sonoro» con un ángulo θ_0 , como se muestra. Debido a la variación de c con z , el rayo se refractará.

(a) (6 puntos)

Demuestre que la trayectoria del rayo que sale de la fuente S y está confinado al plano z - x forma un arco de circunferencia de radio R , donde

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

(b) (3 puntos)

Obtenga una expresión en función de z_S , c_0 y b para el menor valor del ángulo θ_0 de los rayos dirigidos hacia arriba que pueden transmitirse sin que la onda sonora se refleje en la superficie del mar.

(c) (4 puntos)

La figura 1(b) muestra la posición de un receptor de sonido H , situado en $z = 0$, $x = X$. Obtenga una expresión en función de b , X y c_0 para la serie de ángulos θ_0 necesarios para que el rayo sonoro que sale de S alcance el receptor H . Suponga que z_S y z_b son suficientemente grandes para descartar la posibilidad de reflexión en la superficie del mar o en el fondo marino.

(d) (2 puntos)

Calcule los cuatro valores más pequeños de θ_0 para que los rayos refractados procedentes de S alcancen H cuando

- $X = 10000 \text{ m}$
- $c_0 = 1500 \text{ m s}^{-1}$
- $b = 0.02000 \text{ s}^{-1}$

(e) (5 puntos)

Obtenga una expresión para el tiempo que tarda el sonido en viajar de S a H siguiendo la trayectoria del rayo asociada al menor valor del ángulo θ_0 , determinado en el apartado (c). Calcule este tiempo de tránsito para las condiciones dadas en el apartado (d). El siguiente resultado puede ser útil:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \tan \left(\frac{x}{2} \right)$$

Calcule el tiempo que tarda el rayo directo en viajar de S a H a lo largo de $z = 0$. ¿Cuál de los dos rayos llegará primero, el rayo para el que $\theta_0 = \pi/2$ o el rayo con el menor valor de θ_0 calculado en el apartado (d)?

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **(a)** Cada tramo situado enteramente por encima o por debajo de $z = 0$ es un arco de circunferencia con

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

El caso $\theta_0 = 0$ es el rayo vertical rectilíneo, que corresponde a $R \rightarrow \infty$.

- **(b)** El ángulo límite es

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

La igualdad corresponde a un rayo tangente a la superficie; los rayos con ángulos mayores invierten su sentido vertical por debajo de ella.

- **(c)** Para los rayos refractados dirigidos inicialmente hacia arriba,

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde n cuenta los arcos de circunferencia entre la fuente y el receptor. El rayo directo tiene $\theta_0 = \pi/2$.

- **(d)** Los cuatro ángulos más pequeños son

$$86.19^\circ, \quad 88.09^\circ, \quad 88.73^\circ, \quad 89.05^\circ.$$

- (e) Para el ángulo más pequeño, $n = 1$,

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right] \approx 6.662 \text{ s}.$$

El tiempo del rayo directo es

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} \approx 6.667 \text{ s}.$$

El rayo refractado llega primero, con una ventaja de aproximadamente 4.93 ms .

Solución

Utilizamos la acústica geométrica: la longitud de onda es suficientemente corta para que la propagación pueda describirse mediante rayos en un medio estacionario y localmente isótropo. La velocidad del sonido depende únicamente de z .

(a)

Consideremos el medio como una sucesión de capas horizontales delgadas. La ley de Snell, con el ángulo medido respecto a la normal vertical a estas capas, da

$$\frac{\sin \theta}{c(z)} = \frac{\sin \theta_0}{c_0} \equiv p,$$

donde p es constante a lo largo del rayo.

Sea s la distancia recorrida a lo largo del rayo. Para un rayo que se propaga en el sentido de x creciente,

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta.$$

En la región superior, $c = c_0 + bz$. Derivando $\sin \theta = pc$ a lo largo del rayo, se obtiene

$$\cos \theta \frac{d\theta}{ds} = pb \frac{dz}{ds} = pb \cos \theta.$$

Por tanto, obteniendo por continuidad el valor en el punto de retorno, donde el rayo es horizontal,

$$\frac{d\theta}{ds} = pb = \frac{b \sin \theta_0}{c_0}.$$

La tasa de variación de la dirección de la tangente con la longitud de arco es la curvatura. Puesto que es constante, la trayectoria es circular, con

$$R = \frac{1}{pb} = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

La circunferencia también puede determinarse explícitamente. Utilizando $ds = R d\theta$ y la posición inicial $x = z = 0$,

$$x = R(\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad z = R(\sin \theta - \sin \theta_0).$$

Como $R \sin \theta_0 = c_0/b$, estas ecuaciones implican

$$\left(x - R \cos \theta_0\right)^2 + \left(z + \frac{c_0}{b}\right)^2 = R^2.$$

Por tanto, el arco superior tiene su centro en

$$\left(R \cos \theta_0, -\frac{c_0}{b}\right).$$

Por debajo de $z = 0$, el gradiente cambia de signo, de modo que $d\theta/ds = -pb$. La curvatura cambia de signo, mientras que su módulo sigue siendo $1/R$. En consecuencia, un rayo que cruza $z = 0$ sigue sucesivos arcos de circunferencia de igual radio.

Para $\theta_0 = 0$, la ley de Snell da un rayo vertical con curvatura nula. La fórmula indicada para el radio se entiende en el sentido del límite $R \rightarrow \infty$.

(b)

En el punto más alto de un arco ascendente, el rayo es horizontal, por lo que $\theta = \pi/2$. La ley de Snell da entonces

$$\frac{1}{c_0 + bz_{\max}} = \frac{\sin \theta_0}{c_0},$$

y, por tanto,

$$z_{\max} = \frac{c_0}{b} \left(\frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right).$$

El rayo límite que evita atravesar la superficie del mar satisface $z_{\max} = z_S$. Por tanto,

$$\sin \theta_{0,\min} = \frac{c_0}{c_0 + bz_S},$$

de modo que

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

Como al aumentar θ_0 disminuye $z_{\max}$, los rayos con ángulos superiores a este umbral invierten su sentido vertical por debajo de la superficie. La igualdad corresponde al caso de incidencia rasante; para que el rayo se mantenga estrictamente separado de la superficie se requiere $\theta_0 > \theta_{0,\min}$.

(c)

Durante el primer arco superior, el rayo vuelve a $z = 0$ cuando

$$\sin \theta = \sin \theta_0, \quad \theta = \pi - \theta_0.$$

Su desplazamiento horizontal en ese cruce es

$$D = R [\cos \theta_0 - \cos(\pi - \theta_0)] = 2R \cos \theta_0.$$

Utilizando el radio del apartado (a),

$$D = \frac{2c_0}{b} \cot \theta_0.$$

La velocidad es continua en $z = 0$, por lo que la dirección del rayo también es continua allí. Los módulos iguales del gradiente por encima y por debajo de $z = 0$ producen arcos superiores e inferiores alternados, cada uno de los cuales abarca la misma distancia horizontal D .

El receptor se alcanza tras un número entero n de estos arcos:

$$X = nD = \frac{2nc_0}{b} \cot \theta_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por tanto,

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right).$$

Estos ángulos aumentan con n , por lo que el ángulo más pequeño corresponde a un único arco superior:

$$\theta_{0,1} = \tan^{-1} \left(\frac{2c_0}{bX} \right).$$

Por simetría, también existen las trayectorias correspondientes para los rayos emitidos hacia abajo. El rayo directo horizontal, $\theta_0 = \pi/2$, constituye una trayectoria adicional.

(d)

El factor numérico en la fórmula del ángulo es

$$\frac{2c_0}{bX} = \frac{2(1500)}{(0.02000)(10000)} = 15.$$

Así, $\theta_{0,n} = \tan^{-1}(15n)$, lo que da

n	$\tan \theta_{0,n}$	$\theta_{0,n}$
1	15	86.19°
2	30	88.09°
3	45	88.73°
4	60	89.05°

(e)

Denotemos el menor ángulo de emisión por $\theta_1 = \theta_{0,1}$. Este rayo recorre un único arco superior, con θ aumentando de θ_1 a $\pi - \theta_1$.

El tiempo de recorrido es

$$t_1 = \int \frac{ds}{c}.$$

A lo largo de este arco,

$$ds = R d\theta, \quad c = \frac{c_0}{\sin \theta_1} \sin \theta = bR \sin \theta.$$

En consecuencia,

$$t_1 = \frac{1}{b} \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{1}{b} \left[\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}.$$

Utilizando $\tan[(\pi - \theta_1)/2] = \cot(\theta_1/2)$,

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right).$$

Para expresar este resultado en función de las magnitudes dadas, definimos

$$u = \frac{bX}{2c_0} = \cot \theta_1.$$

La identidad del ángulo mitad da

$$\cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right) = \frac{1 + \cos \theta_1}{\sin \theta_1} = \csc \theta_1 + \cot \theta_1 = \sqrt{1 + u^2} + u.$$

Por tanto,

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right].$$

Para los datos numéricos,

$$u = \frac{(0.02000)(10000)}{2(1500)} = \frac{1}{15},$$

de modo que

$$t_1 = \frac{2}{0.02000} \ln \left[\sqrt{1 + \frac{1}{225}} + \frac{1}{15} \right] \text{ s} = \boxed{6.662 \text{ s}}.$$

El rayo directo permanece en $z = 0$, donde su velocidad es c_0 . Por tanto, su tiempo de recorrido es

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} = \frac{10000}{1500} \text{ s} = \boxed{6.667 \text{ s}}.$$

Utilizando valores sin redondear, la diferencia es

$$t_{\text{direct}} - t_1 = 0.00492842 \dots \text{ s} \approx \boxed{4.93 \text{ ms}}.$$

Por tanto, **el rayo refractado con el menor ángulo de emisión llega primero**. El aumento de la velocidad del sonido al alejarse de $z = 0$ compensa con creces la mayor longitud de su trayectoria.

Esta comparación también se deduce, en general, de

$$t_1 = \frac{2}{b} \operatorname{arsinh} u, \quad t_{\text{direct}} = \frac{2u}{b},$$

porque, para $u > 0$,

$$\operatorname{arsinh} u = \int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} < u.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

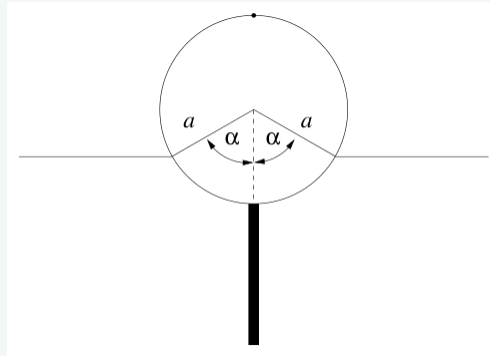
Problema 3: Boya cilíndrica

(a) (3 puntos)

Una boya consiste en un cilindro macizo de radio a y longitud l , hecho de un material ligero de densidad uniforme d , con una varilla rígida y uniforme que sobresale radialmente hacia fuera desde su parte inferior, a la mitad de su longitud. La masa de la varilla es igual a la del cilindro, su

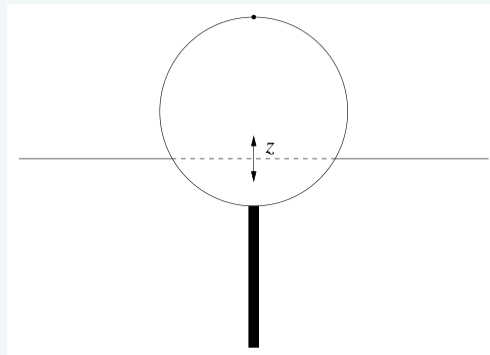
longitud es igual al diámetro del cilindro y su densidad es mayor que la del agua de mar. Esta boya flota en agua de mar de densidad ρ .

En equilibrio, deduzca una expresión que relacione el ángulo de flotación α , tal como se muestra en la figura, con d/ρ . Desprecie el volumen de la varilla.



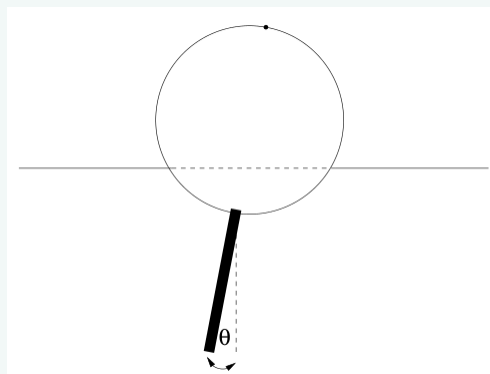
(b) (4 puntos)

Si, debido a alguna perturbación, la boya se desplaza verticalmente hacia abajo una pequeña distancia z , experimentará una fuerza neta que hará que comience a oscilar verticalmente en torno a su posición de flotación de equilibrio. Determine la frecuencia de este modo de vibración vertical en función de α , g y a , donde g es la aceleración de la gravedad. Suponga que la influencia del movimiento del agua sobre la dinámica de la boya hace que su masa efectiva aumente en un tercio. Puede suponer que α no es pequeño.



(c) (8 puntos)

En la aproximación de que el cilindro oscila alrededor de su eje central horizontal, determine la frecuencia de oscilación angular, de nuevo en función de g y a . Desprecie en este caso la dinámica y la viscosidad del agua. Se supone que el ángulo de oscilación es pequeño.



(d) (5 puntos)

La boya contiene acelerómetros sensibles que pueden medir los movimientos verticales y angulares y transmitir esta información por radio a la costa. En aguas relativamente tranquilas, se registra que el período de oscilación vertical es de aproximadamente 1 segundo y el período de oscilación angular es de aproximadamente 1.5 segundos. A partir de esta información, demuestre que el ángulo de flotación α es de aproximadamente 90° y estime así el radio de la boya y su masa total, sabiendo que la longitud del cilindro l es igual a a .

[Puede tomar $\rho \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3}$ y $g \simeq 9.8 \text{ m s}^{-2}$.]

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- (a) Con α en radianes,

$$\frac{d}{\rho} = \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2\pi}.$$

- (b) La frecuencia de oscilación vertical es

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}.$$

- (c) La frecuencia de oscilación angular es

$$f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}.$$

- (d)

$$\alpha \simeq 90^\circ, \quad a \simeq 0.23 \text{ m}, \quad M \simeq 20 \text{ kg}.$$

Al utilizar exactamente los períodos nominales se obtiene $\alpha \simeq 91.1^\circ$.

Solución

(a)

Sea m la masa del cilindro. La varilla tiene la misma masa, de modo que

$$m = d\pi a^2 l, \quad M = 2m.$$

La sección transversal sumergida es un segmento circular que subtiende un ángulo 2α en el centro del cilindro. Su área es el área del sector menos el área del triángulo:

$$A_{\text{sub}} = \frac{1}{2}a^2(2\alpha) - \frac{1}{2}a^2 \sin 2\alpha = a^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).$$

Aquí y en lo que sigue, los ángulos de estas expresiones se miden en radianes.

Definimos

$$S(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \cos \alpha.$$

Despreciando el volumen de la varilla, el volumen desplazado es $a^2 l S(\alpha)$. Según el principio de Arquímedes, el equilibrio exige

$$\rho g a^2 l S(\alpha) = 2 d \pi a^2 l g.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\frac{d}{\rho} = \frac{S(\alpha)}{2\pi} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4\pi}}.$$

(b)

En equilibrio, la anchura de la sección transversal del cilindro a la altura de la superficie del agua es

$$w = 2a \sin \alpha.$$

Por tanto, el área horizontal de la sección cortada por la superficie del agua es $wl = 2al \sin \alpha$.

Tomemos el desplazamiento z como positivo hacia abajo. A primer orden en z , el aumento del volumen desplazado es

$$\Delta V = 2al \sin \alpha z.$$

El empuje en equilibrio ya compensa el peso. Por tanto, el empuje adicional proporciona la fuerza restauradora

$$F_z = -\rho g \Delta V = -2\rho g al \sin \alpha z.$$

El aumento de un tercio de la masa efectiva indicado en el enunciado da

$$M_{\text{eff}} = M + \frac{1}{3}M = \frac{4}{3}M.$$

Según el apartado (a), la masa real satisface

$$M = \rho a^2 l S(\alpha).$$

Así pues, la ecuación de movimiento es

$$\frac{4}{3} \rho a^2 l S(\alpha) \ddot{z} + 2\rho g al \sin \alpha z = 0.$$

Este es un movimiento armónico simple, con

$$\omega_z^2 = \frac{3g \sin \alpha}{2a S(\alpha)}.$$

Por tanto, la frecuencia en ciclos por segundo es

$$\boxed{f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}}.$$

Solo se ha linealizado el desplazamiento vertical; no se ha utilizado ninguna aproximación de α pequeño.

(c)

Utilizamos la aproximación indicada de que el cilindro gira alrededor de su eje central horizontal fijo.

Como el cilindro tiene una sección transversal circular, la rotación alrededor de este eje no modifica la geometría sumergida. El empuje actúa verticalmente a través del eje central y no produce ningún momento de fuerza respecto a él. El peso del propio cilindro también actúa a través de este eje. Por

tanto, el momento restaurador se debe enteramente al peso de la varilla.

La varilla se extiende desde una distancia a hasta una distancia $3a$ del eje. Por consiguiente, su centro de masas se encuentra a una distancia $2a$. Para un desplazamiento θ respecto a la vertical hacia abajo,

$$\tau = -2mga \sin \theta \simeq -2mga \theta,$$

donde la última aproximación utiliza $|\theta| \ll 1$.

El momento de inercia del cilindro respecto a su eje central es

$$I_{\text{cyl}} = \frac{1}{2}ma^2.$$

Para la varilla delgada y uniforme, el teorema de los ejes paralelos da

$$I_{\text{rod}} = \frac{1}{12}m(2a)^2 + m(2a)^2 = \frac{13}{3}ma^2.$$

Así,

$$I = I_{\text{cyl}} + I_{\text{rod}} = \frac{29}{6}ma^2.$$

Despreciando la dinámica y la viscosidad del agua, tal como se indica,

$$I\ddot{\theta} = -2mga \theta,$$

o bien

$$\ddot{\theta} + \frac{12g}{29a}\theta = 0.$$

Por tanto,

$$\boxed{\omega_{\theta} = \sqrt{\frac{12g}{29a}}, \quad f_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}}.$$

(d)

Sean T_z y T_{θ} los períodos de oscilación vertical y angular. Al tomar el cociente de los cuadrados de las frecuencias se eliminan a y g :

$$\left(\frac{T_{\theta}}{T_z}\right)^2 = \frac{\omega_z^2}{\omega_{\theta}^2} = \frac{29 \sin \alpha}{8S(\alpha)}.$$

Utilizando $T_z \simeq 1$ s y $T_{\theta} \simeq 1.5$ s,

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} \simeq \frac{29}{8(1.5)^2} = \frac{29}{18} \simeq 1.611.$$

Para $\alpha = 90^\circ = \pi/2$,

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\pi}{2} \simeq 1.571,$$

y el cociente de períodos predicho es

$$\frac{T_{\theta}}{T_z} = \sqrt{\frac{29}{4\pi}} \simeq 1.519,$$

lo cual es compatible con el cociente medido aproximado de 1.5. Al resolver con los períodos nominales se obtiene $\alpha \simeq 91.15^\circ$. Así,

$$\boxed{\alpha \simeq 90^\circ},$$

por lo que aproximadamente la mitad del cilindro está sumergida.

El período de oscilación angular proporciona directamente el radio:

$$T_\theta = 2\pi \sqrt{\frac{29a}{12g}},$$

de donde

$$a = \frac{3gT_\theta^2}{29\pi^2} = \frac{3(9.8)(1.5)^2}{29\pi^2} \text{ m} \simeq 0.231 \text{ m}.$$

Por tanto,

$$\boxed{a \simeq 0.23 \text{ m}}.$$

Como $l = a$, el equilibrio da la masa total como

$$M = \rho a^3 S(\alpha).$$

Para $\alpha \simeq \pi/2$,

$$M \simeq \frac{\pi}{2} \rho a^3 \simeq \frac{\pi}{2} (1000)(0.231)^3 \text{ kg} \simeq 19.4 \text{ kg}.$$

Al utilizar el valor $\alpha \simeq 91.15^\circ$ obtenido con los períodos nominales se obtiene $M \simeq 19.9 \text{ kg}$. Con la precisión que permiten los períodos indicados,

$$\boxed{M \simeq 20 \text{ kg}}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.