

IPhO 1995

Theorieaufgaben und Lösungen · Canberra, Australien · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1995/

Aufgabe 1: Gravitative Rotverschiebung und die Messung der Sternmasse

(a) (3 Punkte)

Ein Photon der Frequenz f besitzt eine effektive träge Masse m , die durch seine Energie bestimmt ist. Nehmen Sie an, dass seine schwere Masse gleich dieser trägen Masse ist. Demnach verliert ein an der Oberfläche eines Sterns emittiertes Photon Energie, wenn es dem Gravitationsfeld des Sterns entkommt. Zeigen Sie, dass die Frequenzverschiebung Δf des Photons beim Weg von der Sternoberfläche ins Unendliche durch

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}$$

für $\Delta f \ll f$ gegeben ist, wobei:

- G = Gravitationskonstante
- R = Radius des Sterns
- c = Lichtgeschwindigkeit
- M = Masse des Sterns.

Somit kann die in großer Entfernung vom Stern gemessene Rotverschiebung einer bekannten Spektrallinie zur Bestimmung des Verhältnisses M/R verwendet werden. Ist R bekannt, lässt sich die Masse des Sterns bestimmen.

(b) (12 Punkte)

Im Rahmen eines Experiments zur Messung sowohl der Masse M als auch des Radius R eines Sterns in unserer Galaxie wird eine unbemannte Raumsonde gestartet. An der Oberfläche des Sterns werden Photonen von He^+ -Ionen emittiert. Diese Photonen können durch Resonanzabsorption an He^+ -Ionen in einer Messkammer der Raumsonde nachgewiesen werden. Resonanzabsorption tritt nur auf, wenn den He^+ -Ionen eine Geschwindigkeit in Richtung des Sterns verliehen wird, die die Rotverschiebungen genau ausgleicht.

Während sich die Raumsonde dem Stern radial nähert, wird die Geschwindigkeit relativ zum Stern ($v = \beta c$) der He^+ -Ionen in der Messkammer bei Absorptionsresonanz als Funktion des Abstands d von der (nächstgelegenen) Sternoberfläche gemessen. Die Messdaten sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Nutzen Sie die Daten vollständig aus, um die Masse M und den Radius R des Sterns grafisch zu bestimmen. Eine Abschätzung der Unsicherheiten Ihres Ergebnisses ist nicht erforderlich.

Daten zur Resonanzbedingung

Geschwindigkeitsparameter	$\beta = v/c \quad (\times 10^{-5})$	3.352	3.279	3.195	3.077	2.955
Abstand von der Sternoberfläche	$d \quad (\times 10^8 \text{m})$	38.90	19.98	13.32	8.99	6.67

(c) (5 Punkte)

Bei der Bestimmung von R und M in einem solchen Experiment wird üblicherweise die Frequenzkorrektur aufgrund des Rückstoßes des emittierenden Atoms berücksichtigt. [Die thermische Bewegung führt zu einer Verbreiterung der Emissionslinien, ohne die Emissionsmaxima zu verschieben. Daher dürfen wir annehmen, dass alle thermischen Effekte berücksichtigt worden sind.]

(i) (4 Punkte)

Nehmen Sie an, dass das Atom aus der Ruhe zerfällt, wobei ein Photon und ein rückstoßendes Atom entstehen. Leiten Sie den relativistischen Ausdruck für die Energie hf eines emittierten Photons in Abhängigkeit von ΔE (der Differenz der Ruheenergien der beiden atomaren Niveaus) und der anfänglichen Ruhemasse m_0 des Atoms her.

(ii) (1 Punkt)

Schätzen Sie daraus die relativistische Frequenzverschiebung $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil}}$ für He^+ -Ionen numerisch ab.

Ihr Ergebnis sollte wesentlich kleiner sein als die in Teil (b) erhaltene gravitative Rotverschiebung.

Daten:

Lichtgeschwindigkeit	c	=	$3.0 \times 10^8 \text{m s}^{-1}$
Ruheenergie von He	$m_0 c^2$	=	$4 \times 938 (\text{MeV})$
Bohrsche Energie	E_n	=	$-\frac{13.6 Z^2}{n^2} (\text{eV})$
Gravitationskonstante	G	=	$6.7 \times 10^{-11} \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- (a) Mit $\Delta f = f_\infty - f$ gilt

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}.$$

- (b) Ein Diagramm von $1/\beta$ gegen $1/d$ ergibt näherungsweise eine Gerade. Unter Verwendung aller fünf Messwerte erhält man

$$R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ m}, \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Die entsprechende relative Frequenzverschiebung von der Oberfläche bis ins Unendliche beträgt ungefähr -3.46×10^{-5} .

- **(c)(i)** Die exakte Photonenenergie ist

$$hf = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right).$$

- **(c)(ii)** Für einen Übergang $n_i \rightarrow n_f$ in He^+ gilt

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

Ihr Betrag liegt für Übergänge zwischen gebundenen Zuständen unter 7.3×10^{-9} .
Beispielsweise ergibt $2 \rightarrow 1$ den Wert -5.4×10^{-9} , der mehrere Tausend Mal kleiner ist als die gravitative Verschiebung.

Lösung

(a)

Das Photon hat die Energie $E = hf$, sodass seine effektive träge und schwere Masse unter den Annahmen der Aufgabenstellung

$$m = \frac{hf}{c^2}$$

beträgt. Das Gravitationspotential außerhalb des Sterns ist

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

Wenn sich das Photon von der Oberfläche ins Unendliche bewegt, nimmt seine gravitative potentielle Energie um GMm/R zu. Aus der Energieerhaltung folgt daher

$$h\Delta f \simeq -\frac{GMm}{R}.$$

Dabei kann m in erster Ordnung als konstant behandelt werden, da die relative Änderung der Photonenenergie klein ist. Einsetzen von $m = hf/c^2$ ergibt

$$h\Delta f \simeq -\frac{GM}{R} \frac{hf}{c^2},$$

und somit

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}.$$

Das negative Vorzeichen kennzeichnet eine Rotverschiebung. Die Näherung setzt $GM/(Rc^2) \ll 1$ voraus.

(b)

Am Ort der Raumsonde beträgt der Abstand vom Sternzentrum $r = R + d$. Wendet man dieselbe Energiebetrachtung zwischen R und $R + d$ an, so ergibt sich für die Frequenz f_r , die ein relativ zum Stern ruhender Beobachter misst,

$$f_r \simeq f_0 \left[1 - \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) \right],$$

wobei f_0 die emittierte Übergangsfrequenz ist. Rückstoßkorrekturen werden hier vernachlässigt und in Teil (c) untersucht.

Wir definieren die positive relative gravitative Frequenzabnahme als

$$\epsilon(d) = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right).$$

Die Photonen bewegen sich nach außen, während sich die absorbierenden Ionen zum Stern hin bewegen. Daher nehmen die Ionen eine Doppler-Blauverschiebung wahr:

$$f_{\text{ion}} = \gamma(1 + \beta)f_r = f_r \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Da $\beta \sim 3 \times 10^{-5}$, gilt

$$f_{\text{ion}} \simeq f_r(1 + \beta).$$

Resonanzabsorption erfordert $f_{\text{ion}} = f_0$, sodass in erster Ordnung

$$(1 - \epsilon)(1 + \beta) \simeq 1 \implies \beta \simeq \epsilon$$

gilt. Folglich erhält man

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) = \frac{GM}{Rc^2} \frac{d}{R+d}$$

mit der erforderlichen Genauigkeit.

Durch Bildung der Kehrwerte ergibt sich ein linearer Zusammenhang:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{Rc^2}{GM} + \frac{R^2c^2}{GM} \frac{1}{d}.$$

Man trägt daher

$$Y = \frac{1}{\beta} \quad \text{gegen} \quad X = \frac{1}{d}$$

auf. Schreibt man die Gerade als $Y = A + BX$, so lauten ihr Ordinatenabschnitt und ihre Steigung

$$A = \frac{Rc^2}{GM}, \quad B = \frac{R^2c^2}{GM}.$$

Damit sind beide Unbekannten bestimmt:

$$\boxed{R = \frac{B}{A}}, \quad \boxed{M = \frac{c^2 B}{GA^2}}.$$

Die fünf einzuzeichnenden Punkte lauten bei zweckmäßiger Skalierung der Achsen:

$X/(10^{-9} \text{ m}^{-1})$	$Y/10^4$
0.25707	2.98329
0.50050	3.04971
0.75075	3.12989
1.11235	3.24992
1.49925	3.38409

Der Graph ist näherungsweise eine ansteigende Gerade. Eine unter Verwendung aller fünf Punkte bestimmte Ausgleichsgerade ist

$$\frac{Y}{10^4} \simeq 2.8917 + 0.3249 \frac{X}{10^{-9} \text{ m}^{-1}}.$$

Somit betragen der Ordinatenabschnitt und die Steigung in unskalierten Einheiten

$$A \simeq 2.8917 \times 10^4, \quad B \simeq 3.2489 \times 10^{12} \text{ m}.$$

Der extrapolierte Schnittpunkt mit der horizontalen Achse liegt bei $-A/B \simeq -8.90 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$.

Daraus folgt

$$R = \frac{3.2489 \times 10^{12}}{2.8917 \times 10^4} \simeq 1.12 \times 10^8 \text{ m},$$

und

$$M = \frac{(3.0 \times 10^8)^2 (3.2489 \times 10^{12})}{(6.7 \times 10^{-11})(2.8917 \times 10^4)^2} \simeq 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

Mit einer für eine grafische Bestimmung angemessenen Genauigkeit ergibt sich

$$\boxed{R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ m}, \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}}.$$

Die Rotverschiebung von der Oberfläche bis ins Unendliche beträgt

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2} = -\frac{1}{A} \simeq -3.46 \times 10^{-5}.$$

Dies bestätigt auch die Gültigkeit der durchgehend verwendeten Näherung eines schwachen Gravitationsfeldes.

(c)(i)

Das Atom habe anfangs die Ruhemasse m_0 und im Endzustand die Ruhemasse m_1 . Die Differenz zwischen den beiden inneren Ruheenergien ist

$$\Delta E = (m_0 - m_1)c^2.$$

Wir schreiben die Energie des emittierten Photons als $E_\gamma = hf$. Da das Atom anfangs ruht, muss das rückstoßende Atom aufgrund der Impulserhaltung einen Impuls mit dem Betrag

$$p = \frac{E_\gamma}{c}$$

besitzen. Unter Verwendung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung für das Atom im Endzustand liefert die Energieerhaltung

$$m_0 c^2 = E_\gamma + \sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2} = E_\gamma + \sqrt{m_1^2 c^4 + E_\gamma^2}.$$

Umstellen und Quadrieren ergibt

$$(m_0 c^2 - E_\gamma)^2 = m_1^2 c^4 + E_\gamma^2,$$

also

$$E_\gamma = \frac{(m_0^2 - m_1^2)c^2}{2m_0}.$$

Einsetzen von $m_1 = m_0 - \Delta E/c^2$ liefert

$$hf = \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2m_0c^2} = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0c^2} \right).$$

Dieser Ausdruck ist für den beschriebenen Zweikörperzerfall exakt. Die Photonenenergie ist kleiner als die Differenz der inneren Energien, da ein Teil der Energie in kinetische Energie des rückstoßenden Atoms übergeht.

(c)(ii)

Ohne Rückstoß wäre die Übergangsfrequenz $f_0 = \Delta E/h$. Daher gilt

$$\frac{f - f_0}{f_0} = -\frac{\Delta E}{2m_0c^2}.$$

Da die Korrektur sehr klein ist, beträgt die relative Rückstoßverschiebung

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -\frac{\Delta E}{2m_0c^2}.$$

Für He^+ gilt $Z = 2$, und die angegebene Bohrsche Formel liefert

$$E_n = -\frac{54.4}{n^2} \text{ eV}.$$

Somit gilt für die Emission beim Übergang von n_i nach $n_f < n_i$

$$\Delta E = 54.4 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \text{ eV}.$$

Die angegebene Ruheenergie beträgt

$$m_0c^2 = 4 \times 938 \text{ MeV} = 3.752 \times 10^9 \text{ eV}.$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

Für jeden Übergang zwischen gebundenen Zuständen gilt $\Delta E < 54.4 \text{ eV}$, woraus sich die numerische obere Abschätzung

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right|_{\text{recoil}} < 7.3 \times 10^{-9}$$

ergibt. Beispielsweise gilt für den Übergang $2 \rightarrow 1$

$$\Delta E = 54.4 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 40.8 \text{ eV},$$

und daher

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil, } 2 \rightarrow 1} \simeq -5.4 \times 10^{-9}.$$

Selbst die obere Abschätzung ist mehrere Tausend Mal kleiner als die gravitativen Verschiebungen von ungefähr 3×10^{-5} in Teil (b).

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 2: Schallausbreitung

Einleitung

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall im Ozean hängt von der Tiefe, der Temperatur und dem Salzgehalt ab. Abbildung 1(a) unten zeigt den Verlauf der Schallgeschwindigkeit c mit der Tiefe z für einen Fall, in dem der minimale Geschwindigkeitswert c_0 auf halber Strecke zwischen der Meeresoberfläche und dem Meeresboden auftritt. Beachten Sie, dass der Einfachheit halber $z = 0$ in der Tiefe dieses Schallgeschwindigkeitsminimums, $z = z_S$ an der Oberfläche und $z = -z_b$ am Meeresboden gewählt ist. Oberhalb von $z = 0$ ist c gegeben durch

$$c = c_0 + bz .$$

Unterhalb von $z = 0$ ist c gegeben durch

$$c = c_0 - bz .$$

In beiden Fällen gilt $b = \left| \frac{dc}{dz} \right|$, das heißt, b ist der Betrag des Schallgeschwindigkeitsgradienten bezüglich der Tiefe; b wird als konstant angenommen.

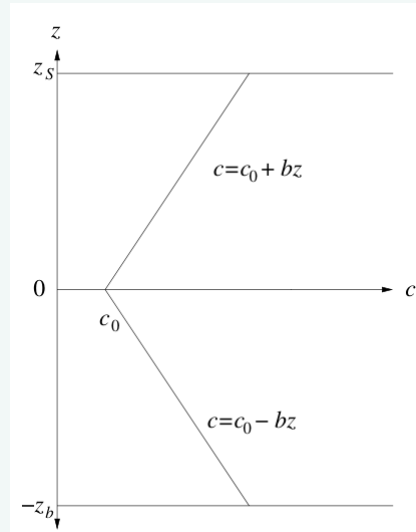


Abbildung 1 (a)

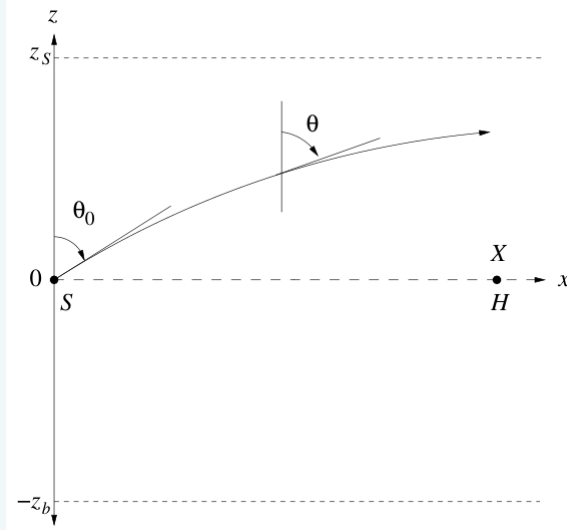


Abbildung 1 (b)

Abbildung 1(b) zeigt einen Schnitt durch den Ozean in der z - x -Ebene, wobei x eine horizontale Richtung bezeichnet. Die Abhängigkeit von c von z ist in Abbildung 1(a) dargestellt. An der Position $z = 0, x = 0$ befindet sich eine Schallquelle S . Von S geht ein „Schallstrahl“ unter einem Winkel θ_0 aus, wie in der Abbildung gezeigt. Aufgrund der Abhängigkeit von c von z wird der Strahl gebrochen.

(a) (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Bahn des Strahls, der von der Quelle S ausgeht und auf die z - x -Ebene beschränkt ist, einen Kreisbogen mit dem Radius R bildet, wobei

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} \quad \text{für} \quad 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

(b) (3 Punkte)

Leiten Sie einen Ausdruck mit z_S , c_0 und b her, der den kleinsten Wert des Winkels θ_0 für nach oben gerichtete Strahlen angibt, die sich ausbreiten können, ohne dass die Schallwelle an der Meeresoberfläche reflektiert wird.

(c) (4 Punkte)

Abbildung 1(b) zeigt die Lage eines Schallempfängers H , der sich an der Position $z = 0, x = X$ befindet. Leiten Sie einen Ausdruck mit b , X und c_0 her, der die Folge der Winkel θ_0 angibt, unter denen der Schallstrahl von S ausgehen muss, um den Empfänger H zu erreichen. Nehmen Sie an, dass z_S und z_b hinreichend groß sind, sodass eine Reflexion an der Meeresoberfläche oder am Meeresboden ausgeschlossen ist.

(d) (2 Punkte)

Berechnen Sie die vier kleinsten Werte von θ_0 , für die gebrochene Strahlen von S aus H erreichen, wenn

- $X = 10000 \text{ m}$
- $c_0 = 1500 \text{ m s}^{-1}$
- $b = 0.02000 \text{ s}^{-1}$

(e) (5 Punkte)

Leiten Sie einen Ausdruck für die Zeit her, die der Schall benötigt, um von S nach H entlang der Strahlbahn zu gelangen, die dem kleinsten Wert des Winkels θ_0 aus Teil (c) entspricht. Berechnen Sie diese Laufzeit für die in Teil (d) angegebenen Bedingungen. Das folgende Ergebnis kann hilfreich sein:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \tan \left(\frac{x}{2} \right)$$

Berechnen Sie die Zeit, die der direkte Strahl benötigt, um von S nach H entlang von $z = 0$ zu gelangen. Welcher der beiden Strahlen kommt zuerst an: der Strahl mit $\theta_0 = \pi/2$ oder der Strahl mit dem kleinsten Wert von θ_0 , der in Teil (d) berechnet wurde?

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **(a)** Jeder Abschnitt, der vollständig oberhalb oder unterhalb von $z = 0$ liegt, ist ein Kreisbogen mit

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

Der Fall $\theta_0 = 0$ ist der gerade, vertikale Strahl und entspricht $R \rightarrow \infty$.

- **(b)** Der Grenzwinkel ist

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

Bei Gleichheit berührt der Strahl die Oberfläche tangential; bei größeren Winkeln kehrt er unterhalb der Oberfläche um.

- **(c)** Für anfänglich nach oben gerichtete, gebrochene Strahlen gilt

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

wobei n die Anzahl der Kreisbögen zwischen Quelle und Empfänger angibt. Für den direkten Strahl gilt $\theta_0 = \pi/2$.

- **(d)** Die vier kleinsten Winkel sind

$$86.19^\circ, \quad 88.09^\circ, \quad 88.73^\circ, \quad 89.05^\circ.$$

- (e) Für den kleinsten Winkel, $n = 1$, gilt

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right] \approx 6.662 \text{ s}.$$

Die Laufzeit des direkten Strahls beträgt

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} \approx 6.667 \text{ s}.$$

Der gebrochene Strahl kommt zuerst an, und zwar um etwa **4.93 ms** früher.

Lösung

Wir verwenden die geometrische Akustik: Die Wellenlänge ist hinreichend kurz, sodass sich die Ausbreitung durch Strahlen in einem stationären, lokal isotropen Medium beschreiben lässt. Die Schallgeschwindigkeit hängt nur von z ab.

(a)

Wir betrachten das Medium als eine Abfolge dünner horizontaler Schichten. Das Snelliussche Brechungsgesetz liefert, wenn der Winkel zur vertikalen Normalen dieser Schichten gemessen wird,

$$\frac{\sin \theta}{c(z)} = \frac{\sin \theta_0}{c_0} \equiv p,$$

wobei p entlang des Strahls konstant ist.

Es sei s die Weglänge entlang des Strahls. Für einen Strahl, der sich in Richtung zunehmender x -Werte ausbreitet, gilt

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta.$$

Im oberen Bereich gilt $c = c_0 + bz$. Differenzieren von $\sin \theta = pc$ entlang des Strahls ergibt

$$\cos \theta \frac{d\theta}{ds} = pb \frac{dz}{ds} = pb \cos \theta.$$

Damit gilt, wobei sich der Wert am horizontalen Umkehrpunkt durch stetige Fortsetzung ergibt,

$$\frac{d\theta}{ds} = pb = \frac{b \sin \theta_0}{c_0}.$$

Die Änderungsrate der Tangentenrichtung bezüglich der Bogenlänge ist die Krümmung. Da sie konstant ist, verläuft die Bahn kreisförmig, mit

$$R = \frac{1}{pb} = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

Der Kreis lässt sich auch explizit bestimmen. Mit $ds = R d\theta$ und der Anfangsposition $x = z = 0$ erhält man

$$x = R(\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad z = R(\sin \theta - \sin \theta_0).$$

Da $R \sin \theta_0 = c_0/b$ gilt, folgt aus diesen Gleichungen

$$\left(x - R \cos \theta_0\right)^2 + \left(z + \frac{c_0}{b}\right)^2 = R^2.$$

Der Mittelpunkt des oberen Kreisbogens liegt somit bei

$$\left(R \cos \theta_0, -\frac{c_0}{b}\right).$$

Unterhalb von $z = 0$ wechselt der Gradient sein Vorzeichen, sodass $d\theta/ds = -pb$ gilt. Die Krümmung wechselt ihr Vorzeichen, während ihr Betrag $1/R$ bleibt. Ein Strahl, der $z = 0$ durchquert, folgt daher aufeinanderfolgenden Kreisbögen gleichen Radius.

Für $\theta_0 = 0$ ergibt das Snelliussche Brechungsgesetz einen vertikalen Strahl mit der Krümmung null. Die angegebene Radiusformel ist im Sinne des Grenzfalles $R \rightarrow \infty$ zu verstehen.

(b)

Am höchsten Punkt eines nach oben verlaufenden Bogens ist der Strahl horizontal, sodass $\theta = \pi/2$ gilt. Das Snelliussche Brechungsgesetz ergibt dann

$$\frac{1}{c_0 + bz_{\max}} = \frac{\sin \theta_0}{c_0},$$

und somit

$$z_{\max} = \frac{c_0}{b} \left(\frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right).$$

Für den Grenzstrahl, der die Meeresoberfläche gerade nicht durchquert, gilt $z_{\max} = z_S$. Daher ist

$$\sin \theta_{0,\min} = \frac{c_0}{c_0 + bz_S},$$

also

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

Da $z_{\max}$ mit zunehmendem θ_0 abnimmt, kehren Strahlen mit Winkeln oberhalb dieses Grenzwerts unterhalb der Oberfläche um. Gleichheit entspricht dem Fall einer streifenden Berührung; ein strikt positiver Abstand zur Oberfläche erfordert $\theta_0 > \theta_{0,\min}$.

(c)

Auf dem ersten oberen Kreisbogen kehrt der Strahl zu $z = 0$ zurück, wenn

$$\sin \theta = \sin \theta_0, \quad \theta = \pi - \theta_0.$$

Seine horizontale Verschiebung an diesem Durchgangspunkt beträgt

$$D = R [\cos \theta_0 - \cos(\pi - \theta_0)] = 2R \cos \theta_0.$$

Mit dem Radius aus Teil (a) ergibt sich

$$D = \frac{2c_0}{b} \cot \theta_0.$$

Die Geschwindigkeit ist bei $z = 0$ stetig, sodass dort auch die Richtung des Strahls stetig ist. Die gleichen Beträge des Gradienten oberhalb und unterhalb von $z = 0$ führen zu abwechselnd oberen und unteren Kreisbögen, die jeweils dieselbe horizontale Entfernung D überspannen.

Der Empfänger wird nach einer ganzzahligen Anzahl n dieser Bögen erreicht:

$$X = nD = \frac{2nc_0}{b} \cot \theta_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Daher gilt

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right).$$

Diese Winkel nehmen mit n zu, sodass der kleinste Winkel einem einzigen oberen Kreisbogen entspricht:

$$\theta_{0,1} = \tan^{-1} \left(\frac{2c_0}{bX} \right).$$

Aus der Symmetrie ergeben sich auch entsprechende Bahnen für anfänglich nach unten gerichtete Strahlen. Der horizontale direkte Strahl, $\theta_0 = \pi/2$, stellt eine zusätzliche Bahn dar.

(d)

Der Zahlenfaktor in der Winkelformel beträgt

$$\frac{2c_0}{bX} = \frac{2(1500)}{(0.02000)(10000)} = 15.$$

Damit gilt $\theta_{0,n} = \tan^{-1}(15n)$, woraus sich ergibt:

n	$\tan \theta_{0,n}$	$\theta_{0,n}$
1	15	86.19°
2	30	88.09°
3	45	88.73°
4	60	89.05°

(e)

Wir bezeichnen den kleinsten Abstrahlwinkel mit $\theta_1 = \theta_{0,1}$. Dieser Strahl verläuft entlang eines einzigen oberen Kreisbogens, wobei θ von θ_1 auf $\pi - \theta_1$ zunimmt.

Die Laufzeit ist

$$t_1 = \int \frac{ds}{c}.$$

Entlang dieses Bogens gilt

$$ds = R d\theta, \quad c = \frac{c_0}{\sin \theta_1} \sin \theta = bR \sin \theta.$$

Folglich ist

$$t_1 = \frac{1}{b} \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{1}{b} \left[\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}.$$

Mit $\tan[(\pi - \theta_1)/2] = \cot(\theta_1/2)$ erhält man

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right).$$

Um dies durch die gegebenen Größen auszudrücken, definieren wir

$$u = \frac{bX}{2c_0} = \cot \theta_1.$$

Die Halbwinkelformel ergibt

$$\cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right) = \frac{1 + \cos \theta_1}{\sin \theta_1} = \csc \theta_1 + \cot \theta_1 = \sqrt{1 + u^2} + u.$$

Somit gilt

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right].$$

Für die angegebenen Zahlenwerte ist

$$u = \frac{(0.02000)(10000)}{2(1500)} = \frac{1}{15},$$

also

$$t_1 = \frac{2}{0.02000} \ln \left[\sqrt{1 + \frac{1}{225}} + \frac{1}{15} \right] \text{ s} = \boxed{6.662 \text{ s}}.$$

Der direkte Strahl bleibt bei $z = 0$, wo seine Geschwindigkeit c_0 beträgt. Seine Laufzeit ist daher

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} = \frac{10000}{1500} \text{ s} = \boxed{6.667 \text{ s}}.$$

Mit ungerundeten Werten ergibt sich die Differenz

$$t_{\text{direct}} - t_1 = 0.00492842 \dots \text{ s} \approx \boxed{4.93 \text{ ms}}.$$

Somit **kommt der gebrochene Strahl mit dem kleinsten Abstrahlwinkel zuerst an**. Die erhöhte Schallgeschwindigkeit abseits von $z = 0$ gleicht seine längere Wegstrecke mehr als aus.

Dieser Vergleich folgt auch allgemein aus

$$t_1 = \frac{2}{b} \operatorname{arsinh} u, \quad t_{\text{direct}} = \frac{2u}{b},$$

denn für $u > 0$ gilt

$$\operatorname{arsinh} u = \int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} < u.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

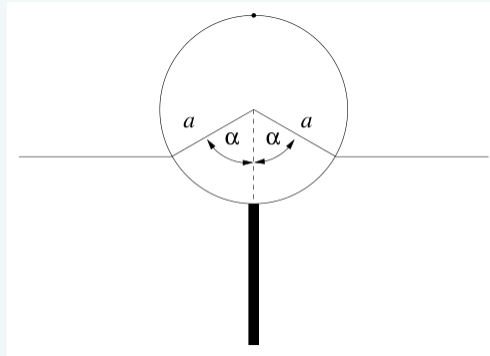
Aufgabe 3: Zylindrische Boje

(a) (3 Punkte)

Eine Boje besteht aus einem Vollzylinder mit Radius a und Länge l , der aus einem leichten Material mit einheitlicher Dichte d gefertigt ist. An seiner Unterseite ragt auf halber Länge ein homogener, starrer Stab radial nach außen. Die Masse des Stabes ist gleich der Masse des Zylinders, seine

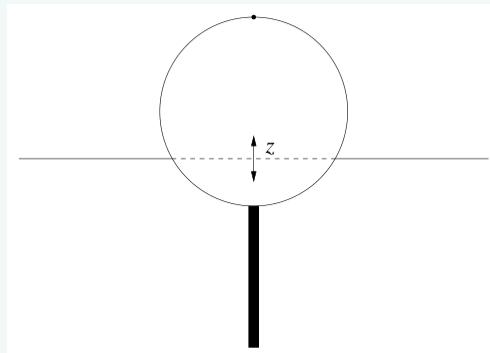
Länge entspricht dem Durchmesser des Zylinders, und seine Dichte ist größer als die von Meerwasser. Diese Boje schwimmt in Meerwasser der Dichte ρ .

Leiten Sie für den Gleichgewichtszustand einen Ausdruck her, der den eingezeichneten Schwimmwinkel α mit d/ρ verknüpft. Vernachlässigen Sie das Volumen des Stabes.



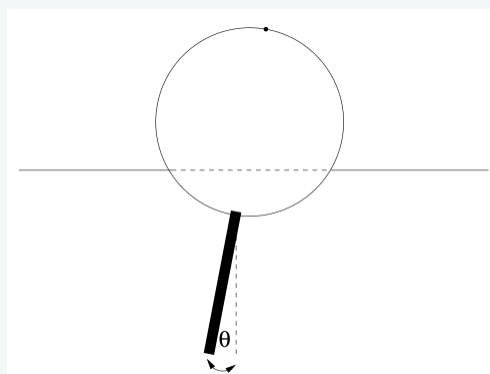
(b) (4 Punkte)

Wird die Boje durch eine Störung vertikal um eine kleine Strecke z nach unten gedrückt, so wirkt auf sie eine resultierende Kraft, durch die sie beginnt, vertikal um ihre Gleichgewichtslage zu schwingen. Bestimmen Sie die Frequenz dieser vertikalen Schwingungsform in Abhängigkeit von α , g und a , wobei g die Fallbeschleunigung ist. Nehmen Sie an, dass der Einfluss der Wasserbewegung auf die Dynamik der Boje deren effektive Masse um ein Drittel erhöht. Sie dürfen annehmen, dass α nicht klein ist.



(c) (8 Punkte)

Bestimmen Sie in der Näherung, dass der Zylinder um seine horizontale Mittelachse pendelt, die Frequenz dieser Pendelschwingung, wiederum in Abhängigkeit von g und a . Vernachlässigen Sie in diesem Fall die Dynamik und die Viskosität des Wassers. Der Auslenkwinkel sei klein.



(d) (5 Punkte)

Die Boje enthält empfindliche Beschleunigungsmesser, die die vertikalen Bewegungen und die Pendelbewegungen messen und diese Informationen per Funk an die Küste übermitteln können. In relativ ruhigem Wasser wird für die vertikale Schwingung eine Periodendauer von etwa 1 Sekunde und für die Pendelschwingung eine Periodendauer von etwa 1.5 Sekunden gemessen. Zeigen Sie anhand dieser Angaben, dass der Schwimmwinkel α etwa 90° beträgt, und schätzen Sie damit den Radius der Boje und ihre Gesamtmasse ab, wenn die Zylinderlänge l gleich a ist.

[Sie dürfen $\rho \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3}$ und $g \simeq 9.8 \text{ m s}^{-2}$ annehmen.]

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- (a) Mit α im Bogenmaß gilt

$$\frac{d}{\rho} = \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2\pi}.$$

- (b) Die Frequenz der vertikalen Schwingung beträgt

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}.$$

- (c) Die Frequenz der Pendelschwingung beträgt

$$f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}.$$

- (d)

$$\alpha \simeq 90^\circ, \quad a \simeq 0.23 \text{ m}, \quad M \simeq 20 \text{ kg}.$$

Werden die angegebenen Periodendauern als exakte Werte verwendet, ergibt sich $\alpha \simeq 91.1^\circ$.

Lösung

(a)

Die Masse des Zylinders sei m . Der Stab hat dieselbe Masse, also gilt

$$m = d\pi a^2 l, \quad M = 2m.$$

Der eingetauchte Querschnitt ist ein Kreissegment, das am Mittelpunkt des Zylinders einen Winkel 2α einschließt. Seine Fläche ist die Sektorfläche abzüglich der Dreiecksfläche:

$$A_{\text{sub}} = \frac{1}{2} a^2 (2\alpha) - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha = a^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).$$

Hier und im Folgenden sind die Winkel in diesen Ausdrücken im Bogenmaß angegeben.

Wir definieren

$$S(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \cos \alpha.$$

Bei Vernachlässigung des Stabvolumens beträgt das verdrängte Volumen $a^2 l S(\alpha)$. Nach dem archimedischen Prinzip erfordert das Gleichgewicht

$$\rho g a^2 l S(\alpha) = 2 d \pi a^2 l g.$$

Folglich gilt

$$\boxed{\frac{d}{\rho} = \frac{S(\alpha)}{2\pi} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4\pi}}.$$

(b)

Im Gleichgewicht beträgt die Breite des Zylinderquerschnitts an der Wasseroberfläche

$$w = 2a \sin \alpha.$$

Die horizontale Schnittfläche mit der Wasseroberfläche beträgt daher $wl = 2al \sin \alpha$.

Wir wählen die Auslenkung z nach unten positiv. In erster Ordnung in z beträgt die Zunahme des verdrängten Volumens

$$\Delta V = 2al \sin \alpha z.$$

Der Auftrieb im Gleichgewicht gleicht bereits die Gewichtskraft aus. Der zusätzliche Auftrieb liefert daher die Rückstellkraft

$$F_z = -\rho g \Delta V = -2\rho g al \sin \alpha z.$$

Die angegebene Erhöhung der effektiven Masse um ein Drittel ergibt

$$M_{\text{eff}} = M + \frac{1}{3}M = \frac{4}{3}M.$$

Nach Teil (a) gilt für die tatsächliche Masse

$$M = \rho a^2 l S(\alpha).$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{4}{3} \rho a^2 l S(\alpha) \ddot{z} + 2\rho g al \sin \alpha z = 0.$$

Dies ist eine harmonische Schwingung mit

$$\omega_z^2 = \frac{3g \sin \alpha}{2a S(\alpha)}.$$

Die Frequenz in Schwingungen pro Sekunde beträgt daher

$$\boxed{f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}}.$$

Es wurde nur bezüglich der vertikalen Auslenkung linearisiert; eine Näherung für kleine α wurde nicht verwendet.

(c)

Wir verwenden die vorgegebene Näherung, dass sich der Zylinder um seine feste horizontale Mittelachse dreht.

Da der Zylinder einen kreisförmigen Querschnitt hat, bleibt die Geometrie des eingetauchten Bereichs bei einer Drehung um diese Achse unverändert. Die Auftriebskraft wirkt vertikal durch die Mittelachse und erzeugt bezüglich dieser kein Drehmoment. Auch die Gewichtskraft des Zylinders wirkt durch diese Achse. Das rückstellende Drehmoment stammt daher ausschließlich von der Gewichtskraft des Stabes.

Der Stab erstreckt sich von einem Abstand a bis zu einem Abstand $3a$ von der Achse. Sein Schwerpunkt liegt folglich im Abstand $2a$. Für eine Auslenkung θ gegenüber der nach unten gerichteten Vertikalen gilt

$$\tau = -2mga \sin \theta \simeq -2mga \theta,$$

wobei die letzte Näherung $|\theta| \ll 1$ voraussetzt.

Das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich seiner Mittelachse beträgt

$$I_{\text{cyl}} = \frac{1}{2}ma^2.$$

Für den dünnen homogenen Stab liefert der Satz von Steiner

$$I_{\text{rod}} = \frac{1}{12}m(2a)^2 + m(2a)^2 = \frac{13}{3}ma^2.$$

Somit gilt

$$I = I_{\text{cyl}} + I_{\text{rod}} = \frac{29}{6}ma^2.$$

Bei der geforderten Vernachlässigung der Dynamik und der Viskosität des Wassers gilt

$$I\ddot{\theta} = -2mga \theta,$$

oder

$$\ddot{\theta} + \frac{12g}{29a}\theta = 0.$$

Daher gilt

$$\boxed{\omega_{\theta} = \sqrt{\frac{12g}{29a}}, \quad f_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}}.$$

(d)

Die Periodendauern der vertikalen Schwingung und der Pendelschwingung seien T_z bzw. T_{θ} . Durch Bildung des Verhältnisses der quadrierten Frequenzen werden a und g eliminiert:

$$\left(\frac{T_{\theta}}{T_z}\right)^2 = \frac{\omega_z^2}{\omega_{\theta}^2} = \frac{29 \sin \alpha}{8S(\alpha)}.$$

Mit $T_z \simeq 1$ s und $T_{\theta} \simeq 1.5$ s ergibt sich

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} \simeq \frac{29}{8(1.5)^2} = \frac{29}{18} \simeq 1.611.$$

Für $\alpha = 90^\circ = \pi/2$ gilt

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\pi}{2} \simeq 1.571,$$

und das vorhergesagte Verhältnis der Periodendauern beträgt

$$\frac{T_\theta}{T_z} = \sqrt{\frac{29}{4\pi}} \simeq 1.519,$$

was mit dem näherungsweise gemessenen Verhältnis 1.5 vereinbar ist. Löst man die Gleichung mit den angegebenen Periodendauern, ergibt sich $\alpha \simeq 91.15^\circ$. Somit gilt

$$\boxed{\alpha \simeq 90^\circ},$$

sodass der Zylinder ungefähr zur Hälfte eingetaucht ist.

Die Periodendauer der Pendelschwingung liefert unmittelbar den Radius:

$$T_\theta = 2\pi\sqrt{\frac{29a}{12g}},$$

also

$$a = \frac{3gT_\theta^2}{29\pi^2} = \frac{3(9.8)(1.5)^2}{29\pi^2} \text{ m} \simeq 0.231 \text{ m}.$$

Daher gilt

$$\boxed{a \simeq 0.23 \text{ m}}.$$

Da $l = a$, ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung für die Gesamtmasse

$$M = \rho a^3 S(\alpha).$$

Für $\alpha \simeq \pi/2$ gilt

$$M \simeq \frac{\pi}{2} \rho a^3 \simeq \frac{\pi}{2} (1000)(0.231)^3 \text{ kg} \simeq 19.4 \text{ kg}.$$

Mit dem aus den angegebenen Periodendauern ermittelten Wert $\alpha \simeq 91.15^\circ$ ergibt sich $M \simeq 19.9 \text{ kg}$. Bei der durch die angegebenen Periodendauern gerechtfertigten Genauigkeit gilt

$$\boxed{M \simeq 20 \text{ kg}}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.