

IPhO 1995

المسائل النظرية والحلول · كانبرا، أستراليا · 3 مسائل نظرية مع حلول كاملة

eulersolve.org/iphO/1995/

المسألة 1: الانزياح الأحمر الثقالي وقياس كتلة نجم

(a) (3 درجات)

يمتلك الفوتون ذو التردد f كتلة قصورية فعالة m تحددها طاقته. افترض أن له كتلة ثقالية تساوي هذه الكتلة القصورية. وبناءً على ذلك، يفقد الفوتون المنبعث من سطح نجم طاقةً عندما يفلت من مجال جاذبية النجم. بين أن انزياح تردد الفوتون Δf عندما يفلت من سطح النجم إلى اللانهاية يُعطى بالعلاقة

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}$$

عندما يكون $\Delta f \ll f$ ، حيث:

- G = ثابت الجذب العام
- R = نصف قطر النجم
- c = سرعة الضوء
- M = كتلة النجم.

إذن يمكن استخدام الانزياح الأحمر لخط طيفي معلوم، المقاس على مسافة بعيدة من النجم، لقياس النسبة M/R . وتتيح معرفة R تحديد كتلة النجم.

(b) (12 درجة)

تُطلق مركبة فضائية غير مأهولة في تجربة لقياس كل من كتلة نجم M ونصف قطره R في مجرتنا. تنبعث فوتونات من أيونات He^+ على سطح النجم. ويمكن رصد هذه الفوتونات عن طريق الامتصاص الرنيني بواسطة أيونات He^+ الموجودة في حجرة اختبار داخل المركبة الفضائية. ولا يحدث الامتصاص الرنيني إلا إذا أُكسبت أيونات He^+ سرعةً باتجاه النجم لتعويض الانزياحات الحمراء تعويضاً تاماً.

أثناء اقتراب المركبة الفضائية من النجم في اتجاه شعاعي، تُقاس سرعة أيونات He^+ في حجرة الاختبار بالنسبة إلى النجم $(v = \beta c)$ عند رنين الامتصاص، بوصفها دالةً في المسافة d من سطح النجم (الأقرب). وتُعرض البيانات التجريبية في الجدول المرفق.

استفد من البيانات كاملةً لتحديد كتلة النجم M ونصف قطره R بيانياً. لا حاجة إلى تقدير الارتياحات في إجابتك.

بيانات شرط الرنين

معامل السرعة	$\beta = v/c$ ($\times 10^{-5}$)	3.352	3.279	3.195	3.077	2.955
المسافة من سطح النجم	d ($\times 10^8 \text{m}$)	38.90	19.98	13.32	8.99	6.67

(c) (5 درجات)

لتحديد R و M في تجربة كهذه، يُؤخذ عادةً في الحسبان تصحيح التردد الناتج عن ارتداد الذرة الباعثة. [تؤدي الحركة الحرارية إلى اتساع خطوط الانبعاث دون إزاحة قمم الانبعاث، ولذلك يمكننا افتراض أن جميع التأثيرات الحرارية قد أُخذت في الحسبان.]

(i) (4 درجات)

افترض أن الذرة تتحلل وهي ساكنة، منتجةً فوتوناً وذرةً مرتدة. أوجد التعبير النسبي لطاقة الفوتون المنبعث hf بدلالة ΔE (فرق طاقة السكون بين المستويين الذريين) وكتلة السكون الابتدائية للذرة m_0 .

(ii) (درجة واحدة)

ومن ثم أجرِ تقديرًا عددياً لانزياح التردد النسبي $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil}}$ في حالة أيونات He^+ . ينبغي أن تكون إجابتك أصغر بكثير من الانزياح الأحمر الثقالي الذي حصلت عليه في الجزء (b).
المعطيات:

$3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	=	c	سرعة الضوء
$4 \times 938 (\text{MeV})$	=	$m_0 c^2$	طاقة سكون He
$-\frac{13.6 Z^2}{n^2} (\text{eV})$	=	E_n	طاقة بور
$6.7 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$	=	G	ثابت الجذب العام

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) باعتبار $\Delta f = f_\infty - f$ ،

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}.$$

• (b) يكون الرسم البياني لـ $1/\beta$ بدلالة $1/d$ خطأً مستقيماً تقريباً. وباستخدام القياسات الخمسة جميعها نحصل على

$$R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ m}, \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

ويبلغ الانزياح الكسري المقابل في التردد من السطح إلى اللانهاية نحو -3.46×10^{-5} .

• (c)(i) طاقة الفوتون الدقيقة هي

$$hf = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2}\right).$$

• (c)(ii) لانتقال $n_i \rightarrow n_f$ في He^+ ،

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right).$$

ويقل مقداره عن 7.3×10^{-9} للانتقالات بين الحالات المقيدة. فعلى سبيل المثال، يعطي الانتقال $2 \rightarrow 1$ القيمة -5.4×10^{-9} ، وهي أصغر بعدة آلاف من المرات من الانزياح الثقالي.

الحل

(a)

الفوتون طاقة $E = hf$ ، لذا فإن كتلته القصورية والثقلالية الفعالة، وفق افتراضات المسألة، هي

$$m = \frac{hf}{c^2}.$$

الجهد الثقالي خارج النجم هو

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}.$$

عندما ينتقل الفوتون من السطح إلى اللانهاية، تزداد طاقة وضعه الثقالية بمقدار GMm/R . ومن ثم يعطي حفظ الطاقة

$$h\Delta f \simeq -\frac{GMm}{R}.$$

يمكن هنا اعتبار m ثابتةً إلى الرتبة الأولى لأن التغير الكسري في طاقة الفوتون صغير. وبالتعويض عن $m = hf/c^2$ ،

$$h\Delta f \simeq -\frac{GM}{R} \frac{hf}{c^2},$$

ومن ثم

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}}.$$

تمثل الإشارة السالبة انزياحًا نحو الأحمر. ويتطلب هذا التقريب أن يكون $GM/(Rc^2) \ll 1$.

(b)

عند موضع المركبة الفضائية، تكون المسافة من مركز النجم $r = R + d$. وبتطبيق الاستدلال نفسه القائم على الطاقة بين R و $R + d$ ، يكون التردد f_r الذي يقيسه راصد ساكن بالنسبة إلى النجم

$$f_r \simeq f_0 \left[1 - \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) \right],$$

حيث f_0 هو تردد الانتقال المنبعث. نُهمل تصحيحات الارتداد هنا ويُقِيم أثرها في الجزء (c).

نعرف النقص الكسري الموجب في التردد بفعل الجاذبية كما يلي

$$\epsilon(d) = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right).$$

تنتقل الفوتونات إلى الخارج، بينما تتحرك الأيونات الماصّة باتجاه النجم. ولذلك ترصد الأيونات انزياح دوبلر نحو الأزرق:

$$f_{\text{ion}} = \gamma(1 + \beta)f_r = f_r \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

بما أن $\beta \sim 3 \times 10^{-5}$ ،

$$f_{\text{ion}} \simeq f_r(1 + \beta).$$

يتطلب الامتصاص الرنيني أن يكون $f_{\text{ion}} = f_0$ ، لذا، إلى الرتبة الأولى،

$$(1 - \epsilon)(1 + \beta) \simeq 1 \implies \beta \simeq \epsilon.$$

وبالتالي،

$$\boxed{\beta = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right) = \frac{GM}{Rc^2} \frac{d}{R+d}}$$

ضمن الدقة المطلوبة.

بأخذ المقلوب نحصل على علاقة خطية:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{Rc^2}{GM} + \frac{R^2c^2}{GM} \frac{1}{d}.$$

لذلك نرسم

$$Y = \frac{1}{\beta} \quad \text{بدلالة} \quad X = \frac{1}{d}.$$

بكتابة معادلة الخط المستقيم على الصورة $Y = A + BX$ ، يكون مقطعه الصادي وميله

$$A = \frac{Rc^2}{GM}, \quad B = \frac{R^2c^2}{GM}.$$

وهما يحددان كلا المجهولين:

$$\boxed{R = \frac{B}{A}}, \quad \boxed{M = \frac{c^2 B}{GA^2}}.$$

النقاط الخمس المطلوب رسمها، باستخدام تدرج ملائم للمحورين، هي:

$Y/10^4$	$X/(10^{-9} \text{ m}^{-1})$
2.98329	0.25707
3.04971	0.50050
3.12989	0.75075
3.24992	1.11235
3.38409	1.49925

الرسم البياني خط صاعد مستقيم تقريباً. ومعادلة خط أفضل مطابقة باستخدام النقاط الخمس جميعها هي

$$\frac{Y}{10^4} \simeq 2.8917 + 0.3249 \frac{X}{10^{-9} \text{ m}^{-1}}.$$

إذن، بعد إزالة عوامل التدرج، يكون المقطع الصادي والميل

$$A \simeq 2.8917 \times 10^4, \quad B \simeq 3.2489 \times 10^{12} \text{ m}.$$

المقطع السيني المستنتج بالاستقراء هو $-A/B \simeq -8.90 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$.

ويترتب على ذلك أن

$$R = \frac{3.2489 \times 10^{12}}{2.8917 \times 10^4} \simeq 1.12 \times 10^8 \text{ m},$$

وأن

$$M = \frac{(3.0 \times 10^8)^2 (3.2489 \times 10^{12})}{(6.7 \times 10^{-11})(2.8917 \times 10^4)^2} \simeq 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}.$$

وبدقة مناسبة للتحديد البياني،

$$\boxed{R \approx 1.1 \times 10^8 \text{ m}, \quad M \approx 5.2 \times 10^{30} \text{ kg}}.$$

الانزياح الأحمر من السطح إلى اللانهاية هو

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2} = -\frac{1}{A} \simeq -3.46 \times 10^{-5}.$$

وهذا يؤكد أيضاً صلاحية تقريب المجال الضعيف المستخدم في جميع الخطوات.

(i)(c)

لتكن كتلة سكون الذرة الابتدائية m_0 ، وكتلة سكون الذرة النهائية m_1 . الفرق بين طاقتي السكون الداخليتين هو

$$\Delta E = (m_0 - m_1)c^2.$$

لنكتب طاقة الفوتون المنبعث على الصورة $E_\gamma = hf$. بما أن الذرة الابتدائية ساكنة، فإن حفظ الزخم يقتضي أن يكون للذرة المرتدة زخم مقداره

$$p = \frac{E_\gamma}{c}.$$

باستخدام العلاقة النسبية بين الطاقة والزخم للذرة النهائية، يعطي حفظ الطاقة

$$m_0 c^2 = E_\gamma + \sqrt{m_1^2 c^4 + p^2 c^2} = E_\gamma + \sqrt{m_1^2 c^4 + E_\gamma^2}.$$

بإعادة الترتيب والتربيع،

$$(m_0 c^2 - E_\gamma)^2 = m_1^2 c^4 + E_\gamma^2,$$

ومن ثم

$$E_\gamma = \frac{(m_0^2 - m_1^2)c^2}{2m_0}.$$

بالتعويض عن $m_1 = m_0 - \Delta E/c^2$ نحصل على

$$hf = \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2m_0 c^2} = \Delta E \left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right).$$

هذا التعبير دقيق للتحلل المذكور إلى جسيمين. وتكون طاقة الفوتون أصغر من فرق الطاقة الداخلية لأن جزءاً من الطاقة يتحول إلى طاقة حركية للذرة المرتدة.

(ii)(c)

في غياب الارتداد، يكون تردد الانتقال $f_0 = \Delta E/h$. ولذلك،

$$\frac{f - f_0}{f_0} = -\frac{\Delta E}{2m_0 c^2}.$$

بما أن التصحيح صغير جداً، فإن الانزياح الكسري الناتج عن الارتداد هو

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -\frac{\Delta E}{2m_0 c^2}.$$

بالنسبة إلى He^+ ، يكون $Z = 2$ ، وتعطي صيغة بور المعطاة

$$E_n = -\frac{54.4}{n^2} \text{ eV}.$$

إذن، للانبعاث من n_i إلى $n_f < n_i$ ،

$$\Delta E = 54.4 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \text{ eV}.$$

طاقة السكون المعطاة هي

$$m_0 c^2 = 4 \times 938 \text{ MeV} = 3.752 \times 10^9 \text{ eV}.$$

ومن ثم

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}} \simeq -7.25 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

لأي انتقال بين حالتين مقيدتين، يكون $\Delta E < 54.4 \text{ eV}$ ، مما يعطي التقدير العددي الأعلى

$$\left| \frac{\Delta f}{f} \right|_{\text{recoil}} < 7.3 \times 10^{-9}.$$

فعلى سبيل المثال، للانتقال $2 \rightarrow 1$ يكون

$$\Delta E = 54.4 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 40.8 \text{ eV},$$

ولذلك

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_{\text{recoil}, 2 \rightarrow 1} \simeq -5.4 \times 10^{-9}.$$

حتى التقدير الأعلى أصغر بعدة آلاف من المرات من الانزياحات الثقالية التي تبلغ نحو 3×10^{-5} في الجزء (b).

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 2: انتشار الصوت

مقدمة

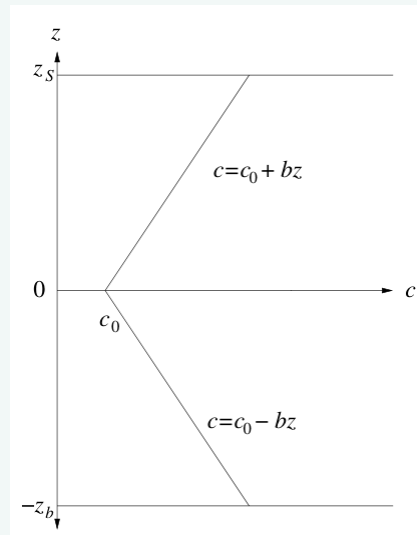
تتغير سرعة انتشار الصوت في المحيط بتغير العمق ودرجة الحرارة والملوحة. يوضح الشكل 1(a) أدناه تغير سرعة الصوت c مع العمق z في حالة تبلغ فيها السرعة قيمة صغرى c_0 في منتصف المسافة بين سطح المحيط وقاع البحر. لاحظ أنه، تيسيراً، اختير $z = 0$ عند العمق الذي تبلغ فيه سرعة الصوت قيمتها الصغرى، و $z = z_S$ عند السطح، و $z = -z_b$ عند قاع البحر. فوق $z = 0$ ، تُعطى c بالعلاقة

$$c = c_0 + bz.$$

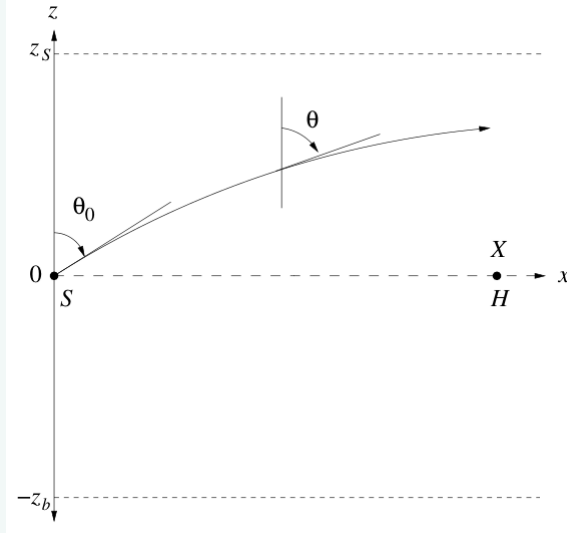
وتحت $z = 0$ ، تُعطى c بالعلاقة

$$c = c_0 - bz.$$

في كلتا الحالتين، $b = \left| \frac{dc}{dz} \right|$ ، أي إن b هو مقدار تدرج سرعة الصوت مع العمق؛ ويُفترض أن b ثابت.



الشكل 1 (a)



الشكل 1 (b)

يوضح الشكل 1(b) مقطعاً في المحيط ضمن المستوى $x-z$ ، حيث يمثل x اتجاهًا أفقيًا. ويبين الشكل 1(a) تغير c بدلالة z . يوجد مصدر صوت S عند الموضع $x = 0, z = 0$. ينبعث من S «شعاع صوتي» بزاوية θ_0 كما هو موضح. وبسبب تغير c مع z ، سينكسر الشعاع.

(a) (6 درجات)

أثبت أن مسار الشعاع المنطلق من المصدر S والمحصور في المستوى $x-z$ يشكل قوس دائرة نصف قطرها R ، حيث

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} \quad \text{عندما} \quad 0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

(b) (3 درجات)

اشتق تعبيرًا يتضمن z_S و c_0 و b ويعطي أصغر قيمة للزاوية θ_0 للأشعة المتجهة إلى أعلى التي يمكن أن تنتقل دون أن تنعكس الموجة الصوتية عن سطح البحر.

(c) (4 درجات)

يبين الشكل 1(b) موضع مستقبل صوت H يقع عند $x = X, z = 0$. اشتق تعبيرًا يتضمن b و X و c_0 ويعطي متتالية الزوايا θ_0 اللازمة لوصول الشعاع الصوتي المنطلق من S إلى المستقبل H . افترض أن z_S و z_b كبيران بما يكفي لاستبعاد احتمال الانعكاس عن سطح البحر أو قاعه.

(d) (درجتان)

احسب أصغر أربع قيم للزاوية θ_0 التي تصل عندها الأشعة المنكسرة من S إلى H ، عندما

$$\begin{aligned} X &= 10000 \text{ m} \cdot \\ c_0 &= 1500 \text{ m s}^{-1} \cdot \\ b &= 0.02000 \text{ s}^{-1} \cdot \end{aligned}$$

(e) (5 درجات)

اشتق تعبيرًا يعطي الزمن الذي يستغرقه الصوت للانتقال من S إلى H متبعًا مسار الشعاع الموافق لأصغر قيمة للزاوية θ_0 ، كما حددت في الجزء (c). احسب قيمة زمن الانتقال هذا للشروط المعطاة في الجزء (d). قد تفيدك النتيجة الآتية:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \tan \left(\frac{x}{2} \right)$$

احسب الزمن الذي يستغرقه الشعاع المباشر للانتقال من S إلى H على طول $z = 0$. أي الشعاعين يصل أولاً: الشعاع الذي تكون له $\theta_0 = \pi/2$ ، أم الشعاع ذو أصغر قيمة للزاوية θ_0 كما حُسبت في الجزء (d)؟
نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- (a) كل مقطع يقع بأكمله فوق $z = 0$ أو تحته هو قوس دائري نصف قطره

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

تمثل الحالة $\theta_0 = 0$ الشعاع الرأسي المستقيم، الموافق لـ $R \rightarrow \infty$.

- (b) الزاوية الحدية هي

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

تعطي المساواة شعاعاً مماساً للسطح؛ أما الزوايا الأكبر فتجعل الشعاع ينعطف تحت السطح.

- (c) للأشعة المنكسرة المتجهة في البداية إلى أعلى،

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

حيث يعدّ n الأقواس الدائرية بين المصدر والمستقبل. أما الشعاع المباشر فزاويته $\theta_0 = \pi/2$.

- (d) أصغر أربع زوايا هي

$$86.19^\circ, \quad 88.09^\circ, \quad 88.73^\circ, \quad 89.05^\circ.$$

- (e) لأصغر زاوية، $n = 1$ ،

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right] \approx 6.662 \text{ s}.$$

زمن انتقال الشعاع المباشر هو

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} \approx 6.667 \text{ s}.$$

يصل الشعاع المنكسر أولاً، بفارق زمني يقارب 4.93 ms .

الحل

نستخدم الصوتيات الهندسية: فالطول الموجي قصير بما يكفي لوصف الانتشار بأشعة في وسط ساكن ومتساوي الخواص محلياً. وتعتمد سرعة الصوت على z وحده.

(a)

نعتبر الوسط تتابعاً من طبقات أفقية رقيقة. يعطي قانون سنيل، مع قياس الزاوية من العمود الرأسي على هذه الطبقات،

$$\frac{\sin \theta}{c(z)} = \frac{\sin \theta_0}{c_0} \equiv p,$$

حيث p ثابت على طول الشعاع.

لتكن s المسافة على طول الشعاع. لشعاع ينتقل في اتجاه تزايد x ,

$$\frac{dx}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta.$$

في المنطقة العلوية، $c = c_0 + bz$. وباشتقاق $\sin \theta = pc$ على طول الشعاع نحصل على

$$\cos \theta \frac{d\theta}{ds} = pb \frac{dz}{ds} = pb \cos \theta.$$

ومن ثم، مع الحصول على القيمة عند نقطة الانعطاف التي يكون فيها الشعاع أفقياً بالاستمرارية،

$$\frac{d\theta}{ds} = pb = \frac{b \sin \theta_0}{c_0}.$$

معدل تغير اتجاه المماس مع طول القوس هو الانحناء. ولأنه ثابت، فإن المسار دائري، حيث

$$R = \frac{1}{pb} = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

يمكن أيضاً إيجاد الدائرة صراحةً. باستخدام $ds = R d\theta$ والموضع الابتدائي $x = z = 0$,

$$x = R(\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad z = R(\sin \theta - \sin \theta_0).$$

بما أن $R \sin \theta_0 = c_0/b$ ، فإن هاتين المعادلتين تقتضيان

$$(x - R \cos \theta_0)^2 + \left(z + \frac{c_0}{b}\right)^2 = R^2.$$

ولذلك يقع مركز القوس العلوي عند

$$\left(R \cos \theta_0, -\frac{c_0}{b}\right).$$

تحت $z = 0$ ، تتغير إشارة التدرج، ومن ثم $d\theta/ds = -pb$. وينعكس اتجاه الانحناء، بينما يبقى مقداره $1/R$. لذلك يتبع الشعاع الذي يعبر $z = 0$ أقواساً دائرية متعاقبة متساوية أنصاف الأقطار.

عندما تكون $\theta_0 = 0$ ، يعطي قانون سنيل شعاعاً رأسياً انحناءه معدوم. وتُفهم صيغة نصف القطر المذكورة بمعناها الحدي $R \rightarrow \infty$.

(b)

عند أعلى نقطة من قوس متجه إلى أعلى، يكون الشعاع أفقياً، ومن ثم $\theta = \pi/2$. عندئذ يعطي قانون سنيل

$$\frac{1}{c_0 + bz_{\max}} = \frac{\sin \theta_0}{c_0},$$

وبالتالي

$$z_{\max} = \frac{c_0}{b} \left(\frac{1}{\sin \theta_0} - 1 \right).$$

يحقق الشعاع الحدي الذي يتجنب عبور سطح البحر الشرط $z_{\max} = z_S$. ولذلك،

$$\sin \theta_{0,\min} = \frac{c_0}{c_0 + bz_S},$$

ومن ثم

$$\theta_{0,\min} = \sin^{-1} \left(\frac{c_0}{c_0 + bz_S} \right).$$

لأن زيادة θ_0 تقلل $z_{\max}$ ، فإن الزوايا الأكبر من هذه العتبة تجعل الشعاع ينعطف تحت السطح. وتمثل المساواة حالة ملاصقة السطح؛ أما البقاء منفصلاً تماماً عن السطح فيطلب $\theta_0 > \theta_{0,\min}$.

(c)

خلال القوس العلوي الأول، يعود الشعاع إلى $z = 0$ عندما

$$\sin \theta = \sin \theta_0, \quad \theta = \pi - \theta_0.$$

تكون إزاحته الأفقية عند ذلك العبور

$$D = R [\cos \theta_0 - \cos(\pi - \theta_0)] = 2R \cos \theta_0.$$

وباستخدام نصف القطر من الجزء (a)،

$$D = \frac{2c_0}{b} \cot \theta_0.$$

السرعة متصلة عند $z = 0$ ، ولذلك يكون اتجاه الشعاع متصلًا هناك. وينتج عن تساوي مقداري التدرج فوق $z = 0$ وتحت أقباس علوية وسفلية متتالية، يمتد كل منها على المسافة الأفقية نفسها D .

يصل الشعاع إلى المستقبل بعد عدد صحيح n من هذه الأقباس:

$$X = nD = \frac{2nc_0}{b} \cot \theta_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ولذلك،

$$\theta_{0,n} = \tan^{-1} \left(\frac{2nc_0}{bX} \right).$$

تزداد هذه الزوايا بزيادة n ، ولذلك توافق أصغر زاوية قوسًا علويًا واحدًا:

$$\theta_{0,1} = \tan^{-1} \left(\frac{2c_0}{bX} \right).$$

يعطي التناظر أيضًا مسارات مقابلة تنطلق إلى أسفل. ويمثل الشعاع الأفقي المباشر، $\theta_0 = \pi/2$ ، مسارًا إضافيًا.

(d)

العامل العددي في صيغة الزاوية هو

$$\frac{2c_0}{bX} = \frac{2(1500)}{(0.02000)(10000)} = 15.$$

إن $\theta_{0,n} = \tan^{-1}(15n)$ ، فنحصل على

$\theta_{0,n}$	$\tan \theta_{0,n}$	n
86.19°	15	1
88.09°	30	2
88.73°	45	3
89.05°	60	4

(e)

لنكتب أصغر زاوية انطلاق على الصورة $\theta_1 = \theta_{0,1}$. ينتقل هذا الشعاع على طول قوس علوي واحد، مع ازدياد θ من θ_1 إلى $\pi - \theta_1$.

زمن الانتقال هو

$$t_1 = \int \frac{ds}{c}.$$

على طول هذا القوس،

$$ds = R d\theta, \quad c = \frac{c_0}{\sin \theta_1} \sin \theta = bR \sin \theta.$$

وبناءً على ذلك،

$$t_1 = \frac{1}{b} \int_{\theta_1}^{\pi-\theta_1} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{1}{b} \left[\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_1}^{\pi-\theta_1}.$$

وباستخدام $\tan[(\pi - \theta_1)/2] = \cot(\theta_1/2)$

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right).$$

للتعبير عن ذلك بدلالة الكميات المعطاة، نعرّف

$$u = \frac{bX}{2c_0} = \cot \theta_1.$$

تعطي متطابقة نصف الزاوية

$$\cot \left(\frac{\theta_1}{2} \right) = \frac{1 + \cos \theta_1}{\sin \theta_1} = \csc \theta_1 + \cot \theta_1 = \sqrt{1 + u^2} + u.$$

ومن ثم،

$$t_1 = \frac{2}{b} \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{bX}{2c_0} \right)^2} + \frac{bX}{2c_0} \right].$$

بالنسبة إلى المعطيات العددية،

$$u = \frac{(0.02000)(10000)}{2(1500)} = \frac{1}{15},$$

ومن ثم

$$t_1 = \frac{2}{0.02000} \ln \left[\sqrt{1 + \frac{1}{225}} + \frac{1}{15} \right] \text{ s} = \boxed{6.662 \text{ s}}.$$

يبقى الشعاع المباشر عند $z = 0$ ، حيث سرعته c_0 . ولذلك فإن زمن انتقاله هو

$$t_{\text{direct}} = \frac{X}{c_0} = \frac{10000}{1500} \text{ s} = \boxed{6.667 \text{ s}}.$$

وباستخدام القيم غير المقربة، يكون الفرق

$$t_{\text{direct}} - t_1 = 0.00492842 \dots \text{ s} \approx \boxed{4.93 \text{ ms}}.$$

إن يصل الشعاع المنكسر ذو أصغر زاوية انطلاق أولاً. فزيادة سرعة الصوت بعيداً عن $z = 0$ تعوض، بل تتجاوز، أثر الزيادة في طول مساره.

وتنتج هذه المقارنة أيضاً بصورة عامة من

$$t_1 = \frac{2}{b} \operatorname{arsinh} u, \quad t_{\text{direct}} = \frac{2u}{b},$$

لأنه، عندما يكون $u > 0$

$$\operatorname{arsinh} u = \int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} < u.$$

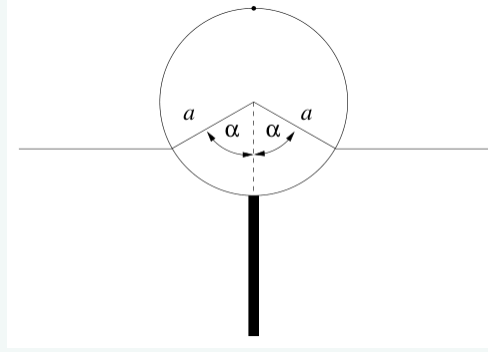
تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: عوامة أسطوانية

(a) (3 درجات)

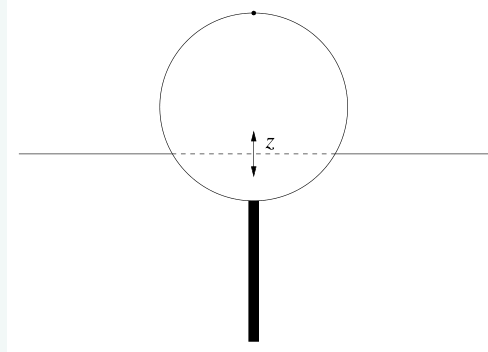
تتكون عوامة من أسطوانة مصمتة نصف قطرها a وطولها l ، مصنوعة من مادة خفيفة ذات كثافة منتظمة d ، ويبرز من أسفلها، عند منتصف طولها، قضيب صلب منتظم متجه مباشرة إلى الخارج. تساوي كتلة القضيب كتلة الأسطوانة، ويساوي طول قطر الأسطوانة، وكثافته أكبر من كثافة ماء البحر. تطفو هذه العوامة في ماء بحر كثافته ρ .

اشتق في حالة الاتزان علاقة تربط زاوية الطفو α ، كما هي مبينة في الرسم، بالنسبة d/ρ . أهمل حجم القضيب.



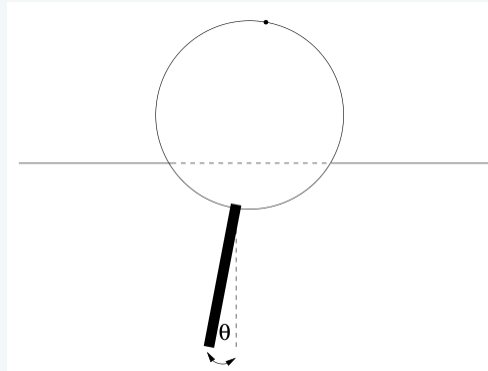
(b) (4 درجات)

إذا أُزِيحت العوامة رأسياً إلى أسفل بمقدار صغير z نتيجة اضطراب ما، فإنها تتعرض لقوة محصلة تجعلها تبدأ بالاهتزاز رأسياً حول موضع اتزانها أثناء الطفو. حدد تردد هذا النمط الرأسي من الاهتزاز بدلالة α و g و a ، حيث g هو تسارع الجاذبية. افترض أن تأثير حركة الماء في ديناميكا العوامة يزيد كتلتها الفعالة بمقدار ثلث كتلتها. يمكنك افتراض أن α ليست صغيرة.



(c) (8 درجات)

باستخدام التقريب الذي تتأرجح فيه الأسطوانة حول محورها المركزي الأفقي، حدد تردد التآرجح، أيضاً بدلالة g و a . أهمل ديناميكا الماء ولزوجته في هذه الحالة. يُفترض أن زاوية التآرجح صغيرة.



(d) (5 درجات)

تحتوي العوامة على مقاييس تسارع حساسة تستطيع قياس الحركتين الرأسية والتأرجحية وإرسال هذه المعلومات لاسلكياً إلى الشاطئ. في مياه هادئة نسبياً، سُجِّل أن الزمن الدوري للاهتزاز الرأسي يساوي نحو ثانية واحدة، وأن الزمن الدوري للاهتزاز التأرجحي يساوي نحو 1.5 ثانية. انطلاقاً من هذه المعلومات، بيّن أن زاوية الطفو α تساوي نحو 90° ، ثم قدّر نصف قطر العوامة وكتلتها الكلية، علماً بأن طول الأسطوانة l يساوي a .

[يمكنك اعتبار أن $\rho \simeq 1000 \text{ kg m}^{-3}$ وأن $g \simeq 9.8 \text{ m s}^{-2}$]

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) عندما تكون α مقيسة بالراديان،

$$\frac{d}{\rho} = \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2\pi}.$$

• (b) تردد الاهتزاز الرأسي هو

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}.$$

• (c) تردد التأرجح هو

$$f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}.$$

• (d)

$$\alpha \simeq 90^\circ, \quad a \simeq 0.23 \text{ m}, \quad M \simeq 20 \text{ kg}.$$

باستخدام القيم الاسمية للزمنين الدوريين على وجه الدقة نحصل على $\alpha \simeq 91.1^\circ$.

الحل

(a)

لتكن كتلة الأسطوانة m . للقضيب الكتلة نفسها، لذا

$$m = d\pi a^2 l, \quad M = 2m.$$

المقطع العرضي المغمور قطعة دائرية تقابل زاوية 2α عند مركز الأسطوانة. وتساوي مساحتها مساحة القطاع الدائري مطروحاً منها مساحة المثلث:

$$A_{\text{sub}} = \frac{1}{2} a^2 (2\alpha) - \frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha = a^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).$$

هنا وفيما يلي، تُقاس الزوايا في هذه العبارات بالراديان.

نعرف

$$S(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \cos \alpha.$$

بإهمال حجم القضيب، يكون حجم الماء المزاح $a^2 l S(\alpha)$. ووفقاً لمبدأ أرخميدس، يتطلب الاتزان أن

$$\rho g a^2 l S(\alpha) = 2d\pi a^2 l g.$$

ومن ثم،

$$\boxed{\frac{d}{\rho} = \frac{S(\alpha)}{2\pi} = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4\pi}}.$$

(b)

عند الاتزان، يكون عرض المقطع العرضي للأسطوانة عند سطح الماء

$$w = 2a \sin \alpha.$$

ومن ثم فإن مساحة المقطع الأفقي الذي يحدده سطح الماء هي $wl = 2al \sin \alpha$.

نعتبر الإزاحة z موجبة نحو الأسفل. إلى الرتبة الأولى في z ، تكون الزيادة في حجم الماء المزاح

$$\Delta V = 2al \sin \alpha z.$$

توازن قوة الطفو عند الاتزان الوزن بالفعل. لذلك تعطي قوة الطفو الإضافية قوة الإرجاع

$$F_z = -\rho g \Delta V = -2\rho g al \sin \alpha z.$$

الزيادة المذكورة في الكتلة الفعالة بمقدار الثلث تعطي

$$M_{\text{eff}} = M + \frac{1}{3}M = \frac{4}{3}M.$$

من الجزء (a)، تحقق الكتلة الفعالية العلاقة

$$M = \rho a^2 l S(\alpha).$$

وعليه تكون معادلة الحركة

$$\frac{4}{3} \rho a^2 l S(\alpha) \ddot{z} + 2\rho g al \sin \alpha z = 0.$$

هذه حركة توافقية بسيطة، حيث

$$\omega_z^2 = \frac{3g \sin \alpha}{2aS(\alpha)}.$$

لذلك يكون التردد، مقيساً بعدد الدورات في الثانية،

$$\boxed{f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}}}.$$

اقتصر التقريب الخطي على الإزاحة الرأسية؛ ولم يُستخدم أي تقريب يفترض صغر α .

(c)

نستخدم التقريب المطلوب، وهو أن الأسطوانة تدور حول محورها المركزي الأفقي الثابت.

لأن المقطع العرضي للأسطوانة دائري، فإن الدوران حول هذا المحور لا يغيّر هندسة الجزء المغمور. تؤثر قوة الطفو رأسياً مارّةً بالمحور المركزي، فلا تولّد عزمًا حوله. كما يؤثر وزن الأسطوانة نفسها مارّاً بهذا المحور. لذلك ينشأ عزم الإرجاع بالكامل من وزن القضيب.

يمتد القضيب من مسافة a إلى مسافة $3a$ من المحور. ولذلك يقع مركز كتلته على مسافة $2a$. عند إزاحة زاوية مقدارها θ عن الاتجاه الرأسى نحو الأسفل،

$$\tau = -2mga \sin \theta \simeq -2mga \theta,$$

حيث يستند التقريب الأخير إلى $|\theta| \ll 1$.

عزم القصور الذاتي للأسطوانة حول محورها المركزي هو

$$I_{\text{cyl}} = \frac{1}{2}ma^2.$$

وبالنسبة إلى القضيب الرفيع المنتظم، تعطي نظرية المحاور المتوازية

$$I_{\text{rod}} = \frac{1}{12}m(2a)^2 + m(2a)^2 = \frac{13}{3}ma^2.$$

إذن

$$I = I_{\text{cyl}} + I_{\text{rod}} = \frac{29}{6}ma^2.$$

بإهمال ديناميكا الماء ولزوجته وفقاً للمطلوب،

$$I\ddot{\theta} = -2mga\theta,$$

أو

$$\ddot{\theta} + \frac{12g}{29a}\theta = 0.$$

ومن ثم،

$$\boxed{\omega_{\theta} = \sqrt{\frac{12g}{29a}}, \quad f_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{12g}{29a}}}.$$

(d)

ليكن الزمنان الدوريان للاهتزاز الرأسى والتأرجحي هما T_z و T_{θ} . بأخذ نسبة مربعي الترددین تُحذف a و g :

$$\left(\frac{T_{\theta}}{T_z}\right)^2 = \frac{\omega_z^2}{\omega_{\theta}^2} = \frac{29 \sin \alpha}{8S(\alpha)}.$$

باستخدام $T_z \simeq 1$ s و $T_{\theta} \simeq 1.5$ s،

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} \simeq \frac{29}{8(1.5)^2} = \frac{29}{18} \simeq 1.611.$$

عند $\alpha = 90^\circ = \pi/2$ ،

$$\frac{S(\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\pi}{2} \simeq 1.571,$$

وتكون النسبة المتوقعة للزمنين الدوريين

$$\frac{T_{\theta}}{T_z} = \sqrt{\frac{29}{4\pi}} \simeq 1.519,$$

وهي متوافقة مع النسبة المقيسة التقريبية 1.5. ويعطي الحل باستخدام القيم الاسمية للزمنين الدوريين $\alpha \simeq 91.15^\circ$. إذن

$$\boxed{\alpha \simeq 90^\circ},$$

فيكون نحو نصف الأسطوانة مغموراً.

يعطي الزمن الدوري للتأرجح نصف القطر مباشرة:

$$T_{\theta} = 2\pi \sqrt{\frac{29a}{12g}},$$

ومن ثم

$$a = \frac{3gT_{\theta}^2}{29\pi^2} = \frac{3(9.8)(1.5)^2}{29\pi^2} \text{ m} \simeq 0.231 \text{ m}.$$

وعليه،

$$\boxed{a \simeq 0.23 \text{ m}}.$$

بما أن $l = a$ ، فإن شرط الاتزان يعطي الكتلة الكلية على الصورة

$$M = \rho a^3 S(\alpha).$$

عندما تكون $\alpha \simeq \pi/2$ ،

$$M \simeq \frac{\pi}{2} \rho a^3 \simeq \frac{\pi}{2} (1000) (0.231)^3 \text{ kg} \simeq 19.4 \text{ kg}.$$

باستخدام القيمة $\alpha \simeq 91.15^\circ$ المستنتجة من القيم الاسمية للزمنين الدوريين نحصل على $M \simeq 19.9 \text{ kg}$. وضمن الدقة التي تسمح بها قيمتا الزمن الدوري المعطاتان،

$$\boxed{M \simeq 20 \text{ kg}}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.