

IPhO 1994

理论题与解答 · 中国北京 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1994/

题目 1: 相对论粒子

在狭义相对论中，静止质量为 m_0 的自由粒子的能量 E 与动量 P 之间的关系为

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = mc^2$$

当这样的粒子受到保守力作用时，粒子的总能量，即 $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ 与势能之和，保持不变。如果粒子的能量非常高，就可以忽略其静止能量（这样的粒子称为超相对论粒子）。

1) 考虑一个能量非常高的粒子（其静止能量可以忽略）在大小恒为 f 的吸引性有心力作用下的一维运动。设在 $t = 0$ 时，粒子位于力心，初始动量为 p_0 。分别绘制至少一个运动周期内的位置 x 随时间 t 变化的图像，以及动量 p 随空间坐标 x 变化的图像，以描述粒子的运动。用给定参数 p_0 和 f 表示“转向点”的坐标。在 (p, x) 图中用箭头标出运动的进行方向。粒子可能在某些短暂的时间间隔内不满足超相对论条件，但应忽略这些时间间隔。

请使用答题纸 1。

2) 介子是由两个夸克组成的粒子。介子的静止质量 M 等于这两个夸克组成的系统的总能量除以 c^2 。

考虑一个静止介子的一维模型，假设其中的两个夸克沿 x 轴运动，并以大小恒为 f 的力相互吸引。假设它们可以自由地穿过彼此。在分析夸克的高能运动时，可以忽略夸克的静止质量。在 $t = 0$ 时，两个夸克都位于 $x = 0$ 。分别用 (x, t) 图和 (p, x) 图表示两个夸克的运动，用 M 和 f 表示“转向点”的坐标，在 (p, x) 图中标出运动的进行方向，并求出两个夸克之间的最大距离。

请使用答题纸 2。

3) 将第 2 部分所用的参考系称为 S 系，实验室参考系称为 S' ，它以恒定速度 $v = 0.6c$ 沿 x 轴负方向运动。两个参考系的坐标选取为：在 $t = t' = 0$ 时， S 系中 $x = 0$ 的点与 S' 系中 $x' = 0$ 的点重合。在 (x', t') 图中绘出两个夸克的运动。用 M 、 f 和 c 表示转向点的坐标，并求出在实验室参考系 S' 中观测到的两个夸克之间的最大距离。

请使用答题纸 3。

在参考系 S 和 S'' 中观测到的粒子坐标由洛伦兹变换联系起来：

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + \beta ct), \\ t' = \gamma\left(t + \beta \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

其中， $\beta = v/c$ ， $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ， v 是参考系 S 相对于参考系 S'' 的运动速度。

4) 一个介子的静止能量为 $Mc^2 = 140 \text{ MeV}$ ，相对于实验室参考系 S'' 的速度为 $0.60c$ ，求它在实验室参考系 S'' 中的能量 E' 。

答案

1. 取 $p_0 > 0$, 并定义

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f}, \quad A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

位置—时间图像由依次通过下列各点的直线段组成:

$$(t, x): (0, 0) \rightarrow (\tau_0, A_0) \rightarrow (2\tau_0, 0) \rightarrow (3\tau_0, -A_0) \rightarrow (4\tau_0, 0).$$

转向点为 (τ_0, A_0) 和 $(3\tau_0, -A_0)$, 且

$$T_1 = \frac{4p_0}{f}.$$

以 x 为横轴、 p 为纵轴, 相图为沿顺时针方向行进的菱形:

$$(x, p): (0, p_0) \rightarrow (A_0, 0) \rightarrow (0, -p_0) \rightarrow (-A_0, 0) \rightarrow (0, p_0).$$

2. 定义

$$p_* = \frac{Mc}{2}, \quad \tau = \frac{Mc}{2f}, \quad a = \frac{Mc^2}{2f}.$$

夸克 1 的运动与第 1 部分中取 $p_0 = p_*$ 时的运动相同; 夸克 2 满足

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

它们在转向时刻的位置为

$$t = \tau: (x_1, x_2) = (a, -a), \quad t = 3\tau: (x_1, x_2) = (-a, a).$$

两条相轨迹从动量相反的两个顶点出发, 沿同一个菱形顺时针行进。因此

$$T = \frac{2Mc}{f}, \quad d_{\max} = \frac{Mc^2}{f}.$$

3. 此处 $\gamma = 5/4$ 。在坐标 $(t'/\tau, x'/a)$ 中, 用直线依次连接下列顶点:

$$\text{夸克 1: } (0, 0) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (5, 3),$$

$$\text{夸克 2: } (0, 0) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right) \rightarrow (5, 3).$$

每条轨迹的两个内部顶点就是其转向点。后续各周期的轨迹由平移 $(\Delta t', \Delta x') = (5\tau, 3a)$ 后重复得到。实验室系中同一时刻测得的最大间距为

$$d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f}.$$

4. 介子在实验室系中的能量为

$$E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = 175 \text{ MeV}.$$

解答

下文的位置—时间图像以时间为横轴、位置为纵轴。相图以 x 为横轴、 p 为纵轴。实验室参考系统一记为 S' 。

1) 大小恒定的有心力作用下的运动

选取初始动量方向为 x 轴正方向，因此 $p_0 > 0$ 。在超相对论近似下，

$$E_{\text{particle}} \simeq c|p|, \quad \dot{x} = \frac{pc^2}{E_{\text{particle}}} \simeq c \operatorname{sgn}(p).$$

因此，粒子在两次转向之间以速率 c 运动。按照题目要求，忽略转向点附近不满足超相对论条件的短暂时间间隔。

吸引力及其对应的一个势能函数为

$$\dot{p} = -f \operatorname{sgn}(x), \quad U(x) = f|x|.$$

由能量守恒可得

$$c|p| + f|x| = cp_0.$$

在空间中的转向点处， $p = 0$ ，因此最大位移为

$$A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

运动开始后， $x > 0$ ，因此 $p = p_0 - ft$ 。第一次转向发生在经过时间

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f},$$

之后，此时 $x = c\tau_0 = A_0$ 。力仍然指向原点，因此粒子以负动量返回。穿过原点后，力的符号改变。

一个完整周期如下：

t	x	p
0	0	p_0
τ_0	A_0	0
$2\tau_0$	0	$-p_0$
$3\tau_0$	$-A_0$	0
$4\tau_0$	0	p_0

用直线依次连接表中的位置点。在 τ_0 之前斜率为 $+c$ ，从 τ_0 到 $3\tau_0$ 斜率为 $-c$ ，此后斜率为 $+c$ 。在 $2\tau_0$ 时穿过原点并不发生转向。

因此，

$$T_1 = 4\tau_0 = \frac{4p_0}{f}.$$

相轨迹可直接由能量守恒得到：

$$\frac{|x|}{A_0} + \frac{|p|}{p_0} = 1.$$

它是一个菱形，顶点为 $(0, p_0)$ 、 $(A_0, 0)$ 、 $(0, -p_0)$ 和 $(-A_0, 0)$ 。从上顶点出发，运动依次经过右顶点、下顶点、左顶点，然后回到上顶点，即沿顺时针方向行进。

若初始动量为负，则将 x 和 p 同时反号；振幅和周期的表达式中使用 $|p_0|$ 。

2) 介子静止参考系中的两个夸克

取两个夸克重合时的相互作用势能为零。当间距为 $r = |x_1 - x_2|$ 时，

$$U(r) = fr.$$

由于介子静止，两个夸克的初始动量大小相等、方向相反。将初始向右运动的夸克记为夸克 1：

$$p_1(0) = p_*, \quad p_2(0) = -p_*.$$

在 $t = 0$ 时，势能为零。因此，由总能量可得

$$Mc^2 = 2cp_*, \quad p_* = \frac{Mc}{2}.$$

由对称性，始终有

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

每个夸克都受到大小为 f 、指向另一个夸克的力；当它们分开时，这个力也指向原点。因此，每个夸克都遵循第 1 部分求得的运动规律，其中

$$\tau = \frac{Mc}{2f}, \quad a = c\tau = \frac{Mc^2}{2f}.$$

完整的能量方程也证实了这一点：

$$Mc^2 = 2c|p_1| + f|x_1 - x_2| = 2(c|p_1| + f|x_1|).$$

下表给出了绘制一个周期内两种图像所需的数据：

t/τ	x_1/a	p_1/p_*	x_2/a	p_2/p_*
0	0	1	0	-1
1	1	0	-1	0
2	0	-1	0	1
3	-1	0	1	0
4	0	1	0	-1

绘制位置—时间图像时，用直线依次连接每个夸克的位置点。两条三角波曲线关于 $x = 0$ 互为镜像，两个夸克在 $t = 2\tau$ 时相互穿过。

对于任一夸克的相图，都有

$$\frac{|x_i|}{a} + \frac{|p_i|}{p_*} = 1.$$

夸克 1 从 $(x, p) = (0, p_*)$ 出发，夸克 2 则从 $(0, -p_*)$ 出发。两者都沿菱形顺时针行进。

在转向点处，两个夸克位于相对的两个极端位置，因此

$$d_{\max} = 2a = \frac{Mc^2}{f}.$$

每个夸克的运动周期为

$$T = 4\tau = \frac{2Mc}{f}.$$

3) 实验室参考系中的运动和最大间距

给定的变换中,

$$\beta = \frac{3}{5}, \quad \gamma = \frac{5}{4},$$

因此

$$\gamma(1 + \beta) = 2, \quad \gamma(1 - \beta) = \frac{1}{2}.$$

速度为 $u = \pm c$ 的运动段经变换后, 速度为

$$u' = \frac{u + \beta c}{1 + \beta u/c} = \pm c.$$

因此, 实验室系中所有轨迹线段的斜率也都是 $+c$ 或 $-c$ 。对转向事件进行变换, 即可得到这些线段的端点。

例如, 夸克 1 的第一次转向发生在 $(t, x) = (\tau, a)$, 其中 $a = c\tau$ 。因此

$$t' = \gamma\tau(1 + \beta) = 2\tau, \quad x' = \gamma a(1 + \beta) = 2a.$$

一个周期内的全部四个转向事件如下:

转向事件	t'	x'
夸克 2, 第一次转向	$\frac{\tau}{2} = \frac{Mc}{4f}$	$-\frac{a}{2} = -\frac{Mc^2}{4f}$
夸克 1, 第一次转向	$2\tau = \frac{Mc}{f}$	$2a = \frac{Mc^2}{f}$
夸克 1, 第二次转向	$3\tau = \frac{3Mc}{2f}$	$a = \frac{Mc^2}{2f}$
夸克 2, 第二次转向	$\frac{9\tau}{2} = \frac{9Mc}{4f}$	$\frac{7a}{2} = \frac{7Mc^2}{4f}$

两条轨迹均始于 $(t', x') = (0, 0)$ 。静止系中发生在 $(t, x) = (2\tau, 0)$ 的相遇事件变为

$$(t', x') = \left(\frac{5\tau}{2}, \frac{3a}{2} \right).$$

静止系中周期结束时的事件 $(4\tau, 0)$ 变为

$$(t', x') = (5\tau, 3a).$$

这些点和转向点表格完全确定了实验室系中的图像: 对每个夸克, 用直线依次连接各点。后续各周期由两条曲线按以下位移平移后重复得到:

$$\Delta t' = 5\tau = \gamma T, \quad \Delta x' = 3a.$$

为了求出观测到的间距, 必须取**同一实验室时刻**两个夸克的位置:

$$d'(t') = |x'_1(t') - x'_2(t')|.$$

最初,

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = -ct',$$

因此间距按 $2ct'$ 增长。夸克 2 首先在 $t' = \tau/2$ 时转向。在该时刻,

$$x'_1 = \frac{a}{2}, \quad x'_2 = -\frac{a}{2},$$

所以 $d' = a$ 。

从 $t' = \tau/2$ 到 $t' = 2\tau$ ，两个夸克都以速率 c 向右运动：

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = ct' - a.$$

因此，它们的间距保持为 a 。随后间距减小，在 $5\tau/2$ 时降为零，再增大，在 3τ 时重新达到 a ，此后保持为 a 直到 $9\tau/2$ ，然后减小，在 5τ 时降为零。这一变化规律不断重复。

因此

$$d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f} = \frac{1}{2} d_{\max}.$$

实验室系中转向时刻的不同至关重要：静止系中同时发生的两个转向事件，在实验室系中并不同时发生。

4) 介子在实验室系中的能量

对于整个介子，其在静止系中的总动量为零，总能量为 Mc^2 。对其能量进行变换可得

$$E' = \gamma(E + \beta c P_x) = \gamma Mc^2.$$

代入给定数值，

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = \frac{1}{0.80} = 1.25,$$

因此

$$E' = 1.25(140 \text{ MeV}) = 175 \text{ MeV}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 2：超导磁体

超导磁体广泛应用于实验室。最常见的超导磁体是由超导线绕制的螺线管。超导磁体的奇妙之处在于，它能够产生强磁场而不会因焦耳热而耗散能量，这是因为当磁体浸没在温度为 4.2 K 的液氮中时，超导线的电阻变为零。通常，磁体配有一个专门设计的超导开关，如图 1 所示。开关的电阻 r 可以控制：在超导态下为 $r = 0$ ，在正常态下为 $r = r_n$ 。在持续电流模式下，电流通过磁体和超导开关无限期地循环流动。持续电流模式允许在切断外部电源后，仍长时间维持稳定的磁场。

图 1 未给出超导开关的具体结构。它通常是一小段超导线，外面缠绕着加热丝，并与液氮浴适当地热绝缘。加热时，超导线的温度升高，恢复到具有电阻的正常态。 r_n 的典型值为几欧姆。这里假设它为 5Ω 。超导磁体的电感取决于其尺寸；假设图 1 中磁体的电感为 10 H 。通过调节电阻 R ，可以改变总电流 I 。

本题仅根据所绘图线评分！

箭头表示 I 、 I_1 和 I_2 的正方向。

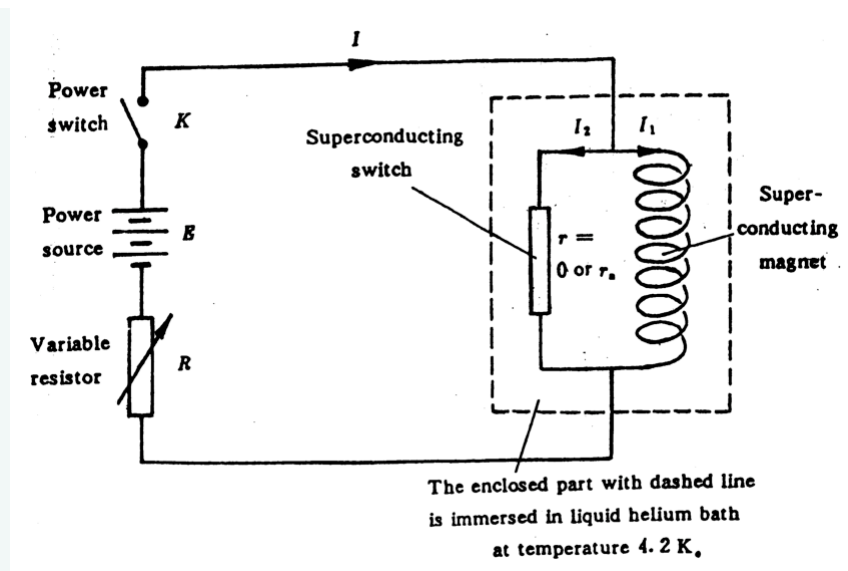


图 1

1) 如果控制总电流 I 和超导开关的电阻 r ，使它们分别按照图 2a 和图 2b 所示的方式随时间变化，并假设最初流过磁体和开关的电流 I_1 和 I_2 相等（图 2c 和图 2d），那么它们在 t_1 到 t_4 之间如何随时间变化？请在图 2c 和图 2d 中画出你的答案。

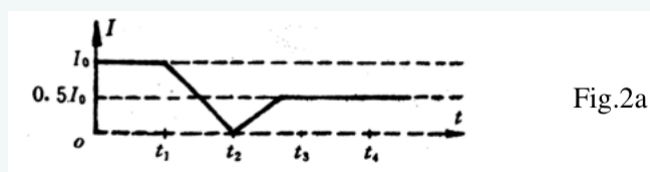
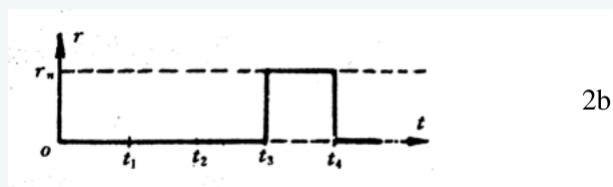
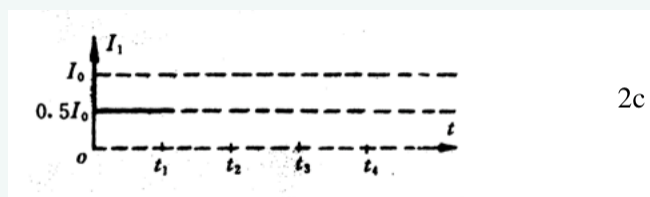


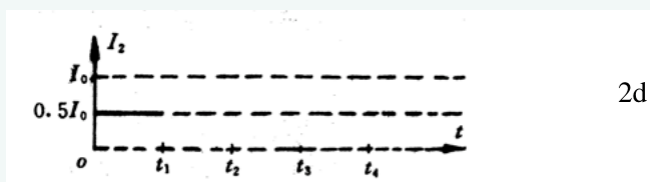
图 2a



2b



2c



2d

2) 假设在 $t = 0$ 时闭合电源开关 K , 此时 $r = 0$ 、 $I_1 = 0$ 、 $R = 7.5 \Omega$, 总电流 I 为 0.5 A 。保持 K 闭合, 使超导开关的电阻 r 按图 3b 所示的方式变化。请分别在图 3a、图 3c 和图 3d 中画出相应的 I 、 I_1 和 I_2 随时间的变化。

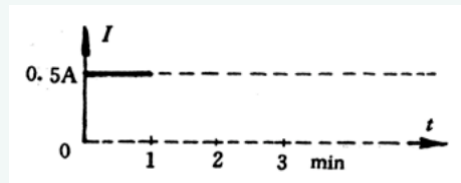
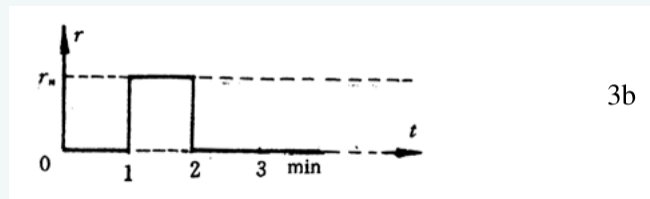
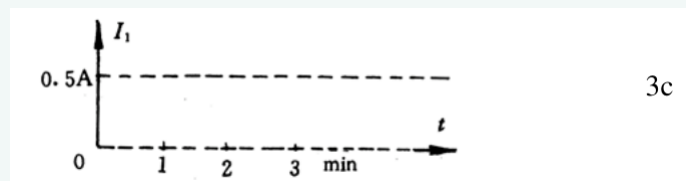


图 3a



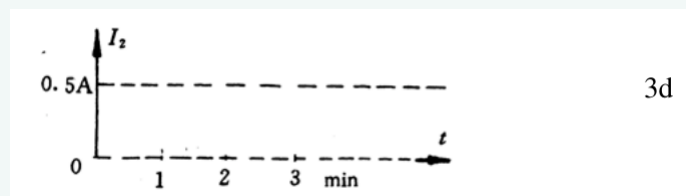
3b

3b



3c

3c



3d

3d

3) 超导开关处于正常态时, 只允许小于 0.5 A 的小电流通过; 电流较大时, 开关会烧毁。假设从 $t = 0$ 到 $t = 3 \text{ min}$, 超导磁体工作在持续电流模式, 即 $I = 0$, 且 $I_1 = i_1$ (例如 20 A)、 $I_2 = -i_1$, 如图 4 所示。如果要将通过磁体的电流减小到零以停止实验, 你会如何操作? 这需要分几个操作步骤完成。请在图 4 中画出 I 、 r 、 I_1 和 I_2 的相应变化。

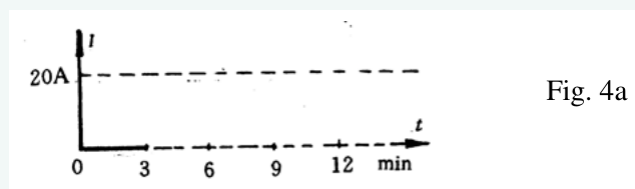
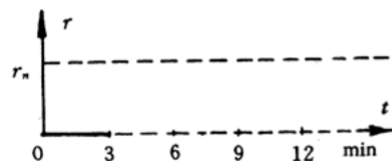


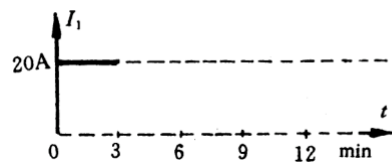
Fig. 4a

图 4a



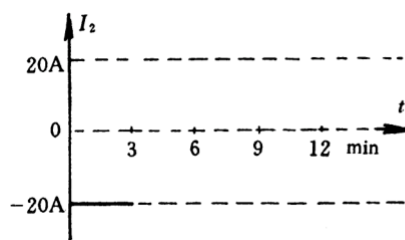
4b

4b



4c

4c



4d

4d

4) 假设磁体工作在持续电流模式，持续电流为 20 A ($t = 0$ 到 $t = 3\text{min}$ ，见图 5)。你会如何将其改变为电流为 30a 的持续电流模式？请在图 5 中画出你的答案。

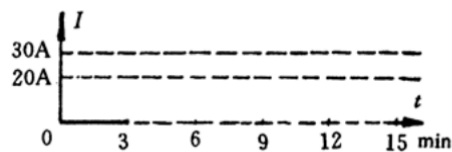
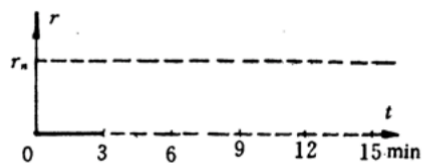


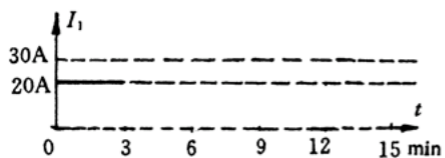
Fig. 5a

图 5a



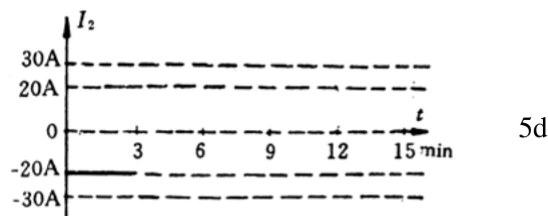
5b

5b



5c

5c



5d

题目译自官方英文原文。

答案

- 在整个规定的变化过程中,

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

因此, I_2 从 t_1 时的 $+I_0/2$ 线性下降到 t_2 时的 $-I_0/2$, 随后线性上升, 在 I 达到其平台值时变为零, 并在经过 t_3 和 t_4 的过程中始终保持为零。

- 电源电动势为 3.75 V。最初,

$$(I, I_1, I_2) = (0.50, 0, 0.50) \text{ A}.$$

在 1 min 时, I 和 I_2 跃变为 0.30 A, 而 I_1 仍为零。随后它们以指数规律趋近于 (0.50, 0.50, 0) A, 时间常数为

$$\tau_R = \frac{10}{3} \text{ s} \approx 3.33 \text{ s}.$$

在 2 min 之后, $I = 0.50 \text{ A}$, I_1 保持不变, 且 $I_2 \approx 0$ 。精确表达式见下文。

- 在 $r = 0$ 时, 先将 I 从零增大到 20 A, 同时 $I_1 = 20 \text{ A}$ 保持不变。然后令 $r = 5 \Omega$, 将 I 缓慢减小到零, 再断开 K 。剩余的磁体电流以指数规律衰减, 时间常数为 2.0 s。下文给出的具体三分钟斜坡变化方案使开关在整个正常态期间始终满足

$$|I_2| < 0.223 \text{ A} < 0.5 \text{ A}$$

- 先在 $r = 0$ 时使 $I = I_1 = 20 \text{ A}$ 。令 $r = 5 \Omega$, 并在三分钟的斜坡变化过程中保持 $I_2 = 1/9 \text{ A}$, 将 I_1 增大到 30 A。然后令 $I = 30 \text{ A}$, 冷却开关使其达到 $r = 0$, 再将 I 减小到零。最终的持续电流状态为

$$I = 0, \quad I_1 = 30 \text{ A}, \quad I_2 = -30 \text{ A}, \quad r = 0.$$

解答

将磁体视为电感恒定为 $L = 10 \text{ H}$ 的理想电感器。按照题目隐含的假设, 忽略引线电阻、杂散电感和开关切换时间。

根据所标示的电流方向, 由基尔霍夫电流定律可得

$$I = I_1 + I_2.$$

磁体和超导开关两端的电压相同：

$$V = L \frac{dI_1}{dt} = rI_2.$$

因此，核心方程为

$$L \frac{dI_1}{dt} = r(I - I_1).$$

当 $r = 0$ 时，磁体电流保持不变。此时电源电流的变化全部由通过超导开关的电流承担：

$$\frac{dI_1}{dt} = 0, \quad I_2 = I - I_1.$$

当 $r = r_n$ 且总电流已规定时，方程变为

$$\tau \frac{dI_1}{dt} + I_1 = I, \quad \tau = \frac{L}{r_n} = 2.0 \text{ s}.$$

电感器中的电流在切换瞬间保持连续； I 和 I_2 则可以跃变。

1) 规定总电流和开关电阻的变化

最初，两条支路的电流相等，因此

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2}.$$

在 t_3 之前，开关处于超导态。因此

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

到 t_3 时，外加电流已达到 $I_0/2$ 。因此，当开关变为有电阻的状态时， $I_2 = 0$ 。在 $t_3 < t < t_4$ 期间，

$$L \frac{dI_1}{dt} = r_n \left(\frac{I_0}{2} - I_1 \right) = 0.$$

所以各电流保持不变。在 t_4 时使开关恢复到 $r = 0$ ，也不会引起变化。

所要求的图线如下：

- **图 2c：**整个过程中均为位于 $I_1 = I_0/2$ 的水平线。
- **图 2d：**在 t_1 之前为位于 $I_0/2$ 的水平线，随后沿直线下降，在 t_2 时达到 $-I_0/2$ 。它在 t_1 和 t_2 的中点时刻过零。然后线性上升，在规定的 I 达到 $I_0/2$ 时变为零，并在经过 t_3 、 t_4 及之后始终保持为零。

图 2d 中的负值部分必须画在原有零轴的下方。

2) 电源电阻固定

设电源电动势为 $\mathcal{E}$ 。最初 $r = 0$ ，所以并联部分的两端电压为零：

$$\mathcal{E} = RI = (7.5 \Omega)(0.50 \text{ A}) = \boxed{3.75 \text{ V}}.$$

在 $0 \leq t < 60 \text{ s}$ 时，磁体电流保持其初始值零：

$$\boxed{I = 0.50 \text{ A}, \quad I_1 = 0, \quad I_2 = 0.50 \text{ A}.}$$

在 $t = 60 \text{ s}$ 时，开关变为有电阻的状态。由于 I_1 不能跃变，它在切换后瞬间仍为零，因此

$$I(60^+) = I_2(60^+) = \frac{\mathcal{E}}{R + r_n} = \frac{3.75}{12.5} = \boxed{0.30 \text{ A}}.$$

在正常态期间，由基尔霍夫电压定律可得

$$\mathcal{E} = R(I_1 + I_2) + r_n I_2,$$

因此

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - RI_1}{R + r_n}.$$

将其与电感器方程联立，得到

$$L \frac{dI_1}{dt} = \frac{r_n R}{R + r_n} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_1 \right).$$

于是

$$\tau_R = \frac{L(R + r_n)}{Rr_n} = \frac{10(7.5 + 5)}{7.5(5)} \text{ s} = \frac{10}{3} \text{ s}.$$

对于 $60 \leq t < 120 \text{ s}$ ，定义

$$x = \frac{t - 60 \text{ s}}{\tau_R}.$$

各电流为

$$\begin{aligned} I_1(t) &= (0.50 \text{ A})(1 - e^{-x}), \\ I_2(t) &= (0.30 \text{ A})e^{-x}, \\ I(t) &= 0.50 \text{ A} - (0.20 \text{ A})e^{-x}. \end{aligned}$$

在 $t = 120 \text{ s}$ 时， $x = 18$ ，开关恢复到 $r = 0$ 。电源电流变为 $\mathcal{E}/R = 0.50 \text{ A}$ ，而磁体电流保持在当时的数值。因此，对于所有 $t \geq 120 \text{ s}$ ，

$$\begin{aligned} I &= 0.50 \text{ A}, \\ I_1 &= (0.50 \text{ A})(1 - e^{-18}), \\ I_2 &= (0.50 \text{ A})e^{-18} \approx 7.6 \text{ nA}. \end{aligned}$$

图线的特征如下：

- **图 3a**：一分钟之前 $I = 0.50 \text{ A}$ ；随后竖直下降到 0.30 A ；然后沿凹向下的指数曲线上升，趋近于 0.50 A 。
- **图 3c**：一分钟之前 $I_1 = 0$ ；随后沿连续、凹向下的指数曲线上升，趋近于 0.50 A 。从两分钟时起，它变为严格恒定。
- **图 3d**：一分钟之前 $I_2 = 0.50 \text{ A}$ ；随后竖直下降到 0.30 A ；然后以指数规律衰减，趋近于零。

在两分钟时， I 和 I_2 均仅有约 3.0 nA 的向上跃变，在给定的图示尺度上无法分辨。所有可见的暂态过程都只占一分钟中的很小一部分。

3) 将持续电流减小到零

电流限制针对的是正常态开关电流的大小：

$$|I_2| < 0.5 \text{ A}.$$

由于

$$I_2 = \frac{L}{r_n} \frac{dI_1}{dt},$$

因此要求

$$\left| \frac{dI_1}{dt} \right| < \frac{r_n}{L} (0.5 \text{ A}) = 0.25 \text{ A s}^{-1}.$$

如果在初始持续电流状态下立即加热开关，就会有 20 A 的电流通过它。必须先使开关仍处于超导态时，将其承担的电流转由外部电源提供。

以下给出针对 20 A 这一例子的一个具体操作时序。

从 0 到 3 min：保持给定的持续电流状态：

$$I = 0, \quad r = 0, \quad I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = -20 \text{ A}.$$

从 3 到 6 min：保持 $r = 0$ ，在 R 足够大时闭合 K ，并将 I 从零线性增大到 20 A。此时

$$I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = I - 20 \text{ A}.$$

因此， I_2 从 -20 A 线性上升到零。在六分钟时，电源提供全部磁体电流。

从 6 到 9 min：令 $r = r_n = 5 \Omega$ ，并将总电流从 20 A 线性减小到零。

令

$$u = t - 360 \text{ s}, \quad T = 180 \text{ s}, \quad a = \frac{20 \text{ A}}{T} = \frac{1}{9} \text{ A s}^{-1}.$$

在此期间，

$$I = 20 \text{ A} - au.$$

在初始条件 $I_1(0) = 20 \text{ A}$ 下求解 $\tau \dot{I}_1 + I_1 = I$ ，得到

$$\begin{aligned} I_1 &= 20 \text{ A} - au + a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \\ I_2 &= -a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \end{aligned} \quad \tau = 2.0 \text{ s}.$$

因此，

$$|I_2| \leq a\tau = \frac{2}{9} \text{ A} \approx 0.222 \text{ A} < 0.5 \text{ A}.$$

磁体电流随电源电流下降，但略高于电源电流。

在 9 min 时及之后：电源电流已达到零。断开 K ，使开关保持正常态。剩余的磁体电流为

$$D = \frac{2}{9}(1 - e^{-90}) \text{ A} \approx 0.222 \text{ A}.$$

它通过磁体和正常态开关循环流动，并按下式衰减：

$$I = 0, \quad I_1 = De^{-(t-540 \text{ s})/\tau}, \quad I_2 = -De^{-(t-540 \text{ s})/\tau}.$$

再经过 10 s 后， $I_1 \approx 1.5 \text{ mA}$ ，此后继续趋近于零。

因此，图 4 的完整图线如下：

图线	所需形状
4a: I	3 min 之前为零；线性上升，在 6 min 时达到 20 A；线性下降，在 9 min 时达到零；此后为零。
4b: r	6 min 之前为零；阶跃到 5Ω ；在最终放电过程中保持正常态。

图线	所需形状
4c: I_1	6 min 之前为 20 A；平滑地过渡到近似线性下降，在 9 min 时达到约 0.222 A；随后以指数规律衰减到零。
4d: I_2	3 min 之前为 -20 A；线性上升，在 6 min 时达到零；随后变为略小于零的负值，趋近于 -0.222 A；9 min 之后从负值一侧以指数规律回升，趋近于零。

与任何无源 RL 放电过程一样，电流只能渐近趋于严格的零。在以分钟为尺度的图中，最终的尾部与零无法区分。若在这一尾部衰减完毕之前使开关恢复到 $r = 0$ ，就会保留剩余电流。

对于不同的初始 i_1 ，同样的步骤也适用，只需使斜坡变化足够缓慢，以满足 0.25 A s^{-1} 的限制。

4) 将持续电流从 20 A 改变为 30 A

同样，在加热开关之前，先使电源电流与现有磁体电流相等。

可以选择让磁体电流在三分钟内严格线性增大：

$$\alpha = \frac{30 - 20}{180} \text{ A s}^{-1} = \frac{1}{18} \text{ A s}^{-1}.$$

在这一斜坡变化过程中，所需的开关电流为

$$\delta = \frac{L}{r_n} \alpha = \frac{1}{9} \text{ A} \approx 0.111 \text{ A},$$

远低于正常态的电流限制。

为了精确实现这一斜坡变化，规定

$$I = I_1 + \delta.$$

对于 $u = t - 360 \text{ s}$ 、 $0 < u < 180 \text{ s}$,

$$I_1 = 20 \text{ A} + \alpha u, \quad I_2 = \delta, \quad I = 20 \text{ A} + \alpha u + \delta.$$

确实， $r_n I_2 = r_n \delta = L \alpha = L dI_1/dt$ 。

给出全部四条图线的完整操作时序如下：

时间 (min)	I (A), 图 5a	r (Ω), 图 5b	I_1 (A), 图 5c	I_2 (A), 图 5d
0–3	0	0	20	-20
3–6	线性变化 $0 \rightarrow 20$	0	20	线性变化 $-20 \rightarrow 0$
6–9	线性变化 $20 + \delta \rightarrow 30 + \delta$	5	线性变化 $20 \rightarrow 30$	$\delta = 1/9$
9–12	30	5	30	0
12–15	线性变化 $30 \rightarrow 0$	0	30	线性变化 $0 \rightarrow -30$
15 之后	0	0	30	-30

这里，表中 δ 的数值以安培为单位。

切换细节很重要：

- 在 6 min 时： $I = I_1 = 20 \text{ A}$ ，因此 $I_2 = 0$ 。先使开关进入正常态，再将 I 增大小量 δ 。这样就开始了磁体电流的线性斜坡变化，而 I_1 不会发生任何跃变。
- 在 9 min 时： I_1 已恰好达到 30 A。将 I 从 $30 + \delta$ 减小到 30 A。此时 $I_2 = 0$ ，所以磁体电流保持不变。

- 在 12 min 时：使开关恢复到 $r = 0$ 。在接下来的三分钟内将 I 减小到零。磁体电流保持为 30 A，而 I_2 变得越来越负。
- 在 15 min 时：断开 K 。磁体和超导开关中的电流大小均为 30 A，方向相反。

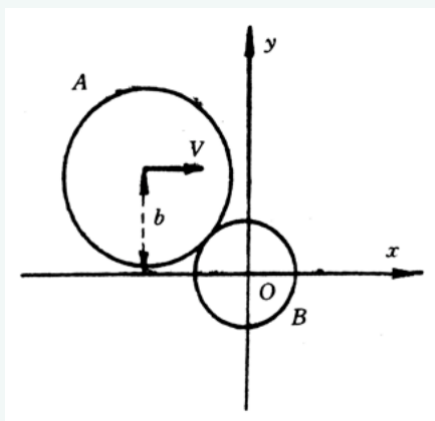
因此，图 5a 在 6 min 和 9 min 时包含大小为 0.111 A 的小阶跃。图 5d 在 6—9 min 期间有一个小的正矩形脉冲。开关中较大的负电流仅在 $r = 0$ 时出现，因此不违反题目给出的正常态电流限制。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 3：有表面摩擦的圆盘碰撞

一个质量为 m 、半径为 R_A 的均匀圆盘 A，在光滑的水平 x - y 平面内以速度 V 沿 x 方向平动（见下一页的图）。圆盘中心到 x 轴的距离为 b 。它与一个静止的均匀圆盘 B 发生碰撞，B 的中心最初位于坐标系原点。圆盘 B 的质量和厚度均与 A 相同，但其半径为 R_B 。假设碰撞后，两圆盘接触点处的速度在垂直于两圆心连线方向上的分量相等。还假设碰撞前后，两圆盘沿圆心连线方向的相对速度大小相同。

- 1) 对于这样的碰撞，用 m 、 R_A 、 R_B 、 V 和 b 表示碰撞后两圆盘速度的 X 和 Y 分量，即 V'_{AX} 、 V'_{AY} 、 V'_{BX} 和 V'_{BY} 。
- 2) 用 m 、 R_A 、 R_B 、 V 和 b 表示碰撞后圆盘 A 的动能 E'_A 和圆盘 B 的动能 E'_B 。



题目译自官方英文原文。

答案

令 $D = R_A + R_B$ 。发生碰撞时， $0 \leq b < D$ ，且 A 如图所示位于 x 轴上方。

1. 速度分量为

$$\boxed{V'_{AX} = \frac{5Vb^2}{6D^2}}, \quad \boxed{V'_{AY} = \frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2}},$$

$$\boxed{V'_{BX} = V \left(1 - \frac{5b^2}{6D^2}\right)}, \quad \boxed{V'_{BY} = -\frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2}}.$$

2. 计入平动和转动的动能,

$$E'_A = \frac{3mV^2b^2}{8D^2}, \quad E'_B = \frac{mV^2}{2} \left(1 - \frac{11b^2}{12D^2} \right).$$

解答

1) 碰撞后的速度

将碰撞视为瞬时过程, 因此碰撞过程中两圆心的连线保持不变。光滑的水平面不提供水平方向的冲量, 也不提供绕竖直轴的力矩。最初两个圆盘均不转动。

定义

$$s = \frac{b}{D}, \quad c = \sqrt{1 - s^2}, \quad D = R_A + R_B.$$

刚接触时, A 的中心位于 $(-Dc, b)$, 而 B 的中心位于原点。因此, 沿 A 指向 B 的连线方向及垂直于该连线方向的单位矢量分别为

$$\mathbf{n} = (c, -s), \quad \mathbf{t} = (s, c).$$

A 的初速度为

$$\mathbf{v}_A = Vc\mathbf{n} + Vs\mathbf{t}.$$

设 B 所受的冲量为

$$\mathbf{J} = J_n\mathbf{n} + J_t\mathbf{t}.$$

A 所受的冲量为 $-\mathbf{J}$ 。因此, 由动量定理得

$$\begin{aligned} v'_{An} &= Vc - \frac{J_n}{m}, & v'_{Bn} &= \frac{J_n}{m}, \\ v'_{At} &= Vs - \frac{J_t}{m}, & v'_{Bt} &= \frac{J_t}{m}. \end{aligned}$$

法向相对速度的方向反转, 而大小保持不变: 两圆盘在碰撞前相互接近, 碰撞后相互分离。因此,

$$v'_{Bn} - v'_{An} = Vc,$$

所以

$$\frac{2J_n}{m} - Vc = Vc \implies J_n = mVc.$$

于是

$$v'_{An} = 0, \quad v'_{Bn} = Vc.$$

要确定切向冲量, 必须考虑转动。转动惯量为

$$I_A = \frac{1}{2}mR_A^2, \quad I_B = \frac{1}{2}mR_B^2.$$

取逆时针方向的角速度为正。接触点相对于 A 圆心的位置矢量为 $R_A\mathbf{n}$, 相对于 B 圆心的位置矢量为 $-R_B\mathbf{n}$ 。由角动量定理得

$$I_A\omega'_A = -R_AJ_t, \quad I_B\omega'_B = -R_BJ_t.$$

因此,

$$\omega'_A = -\frac{2J_t}{mR_A}, \quad \omega'_B = -\frac{2J_t}{mR_B}.$$

相互接触的两个物质点的切向速度为

$$u'_{At} = v'_{At} + R_A \omega'_A = Vs - \frac{3J_t}{m},$$

$$u'_{Bt} = v'_{Bt} - R_B \omega'_B = \frac{3J_t}{m}.$$

题设要求这两个速度相等，即

$$Vs - \frac{3J_t}{m} = \frac{3J_t}{m},$$

由此得到

$$J_t = \frac{mVs}{6}.$$

因此

$$v'_{At} = \frac{5}{6}Vs, \quad v'_{Bt} = \frac{1}{6}Vs,$$

而第 2 问所需的角速度为

$$\omega'_A = -\frac{Vs}{3R_A}, \quad \omega'_B = -\frac{Vs}{3R_B}.$$

在图示的几何位置关系下，两圆盘均沿顺时针方向转动。

转换回直角坐标，

$$\mathbf{v}'_A = \frac{5}{6}Vs \mathbf{t} = \left(\frac{5}{6}Vs^2, \frac{5}{6}Vsc \right),$$

$$\mathbf{v}'_B = Vc \mathbf{n} + \frac{1}{6}Vs \mathbf{t} = \left(V \left(c^2 + \frac{s^2}{6} \right), -\frac{5}{6}Vsc \right).$$

利用 $c^2 = 1 - s^2$ 、 $s = b/D$ 和 $c = \sqrt{D^2 - b^2}/D$ ，即可得到“答案”一节中的四个分量。它们的和满足动量守恒：

$$V'_{AX} + V'_{BX} = V, \quad V'_{AY} + V'_{BY} = 0.$$

2) 碰撞后的动能

每个圆盘的动能包括其圆心平动的动能和绕圆心转动的动能：

$$E'_i = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'_i|^2 + \frac{1}{2}I_i(\omega'_i)^2.$$

对于 A，

$$E'_A = \frac{1}{2}m \left(\frac{5}{6}Vs \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mR_A^2 \right) \left(\frac{Vs}{3R_A} \right)^2$$

$$= \left(\frac{25}{72} + \frac{1}{36} \right) mV^2 s^2$$

$$= \frac{3}{8} mV^2 s^2.$$

因此,

$$E'_A = \frac{3mV^2b^2}{8(R_A + R_B)^2}.$$

对于 B, 法向与切向速度分量相互垂直, 因此

$$|\mathbf{v}'_B|^2 = V^2c^2 + \frac{V^2s^2}{36}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} E'_B &= \frac{1}{2}mV^2 \left(c^2 + \frac{s^2}{36} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mR_B^2 \right) \left(\frac{Vs}{3R_B} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}mV^2c^2 + \frac{1}{24}mV^2s^2 \\ &= \frac{1}{2}mV^2 \left(1 - \frac{11s^2}{12} \right). \end{aligned}$$

因此

$$E'_B = \frac{mV^2}{2} \left(1 - \frac{11b^2}{12(R_A + R_B)^2} \right).$$

作为一致性检验, 总动能损失为

$$\frac{1}{2}mV^2 - (E'_A + E'_B) = \frac{mV^2b^2}{12(R_A + R_B)^2} \geq 0.$$

这一损失源于切向摩擦; 题设的弹性条件仅适用于法向相对运动。对于对心碰撞, $b = 0$, A 停止运动, B 获得速度 V , 两圆盘均不转动, 且没有动能损失。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处, 均为官方解答中的错误或印刷错误。