

IPhO 1994

Teorik sorular ve çözümler · Pekin, Çin · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1994/

Soru 1: Göreli Parçacık

Özel görelilik kuramında, durgun kütlesi m_0 olan serbest bir parçacığın enerjisi E ile momentumu P arasındaki ilişki şöyledir:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = mc^2$$

Böyle bir parçacık korunumlu bir kuvvetin etkisindeyken, $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ ile potansiyel enerjinin toplamından oluşan toplam enerjisi korunur. Parçacığın enerjisi çok yüksekse durgun enerjisi ihmal edilebilir (böyle bir parçacığa ultra göreli parçacık denir).

1) Büyüklüğü sabit f olan çekici bir merkezî kuvvetin etkisindeki çok yüksek enerjili bir parçacığın (durgun enerjisinin ihmal edilebildiği) bir boyutlu hareketini ele alınız. Parçacığın $t = 0$ anında, p_0 başlangıç momentumuyla kuvvet merkezinde bulunduğunu varsayınız. Hareketin en az bir periyodu boyunca, x 'in t zamanına ve p momentumunun x konum koordinatına göre grafiklerini ayrı ayrı çizerek parçacığın hareketini betimleyiniz. "Dönüş noktalarının" koordinatlarını verilen p_0 ve f parametreleri cinsinden belirtiniz. (p, x) diyagramında hareketin ilerleme yönünü oklarla gösteriniz. Parçacığın ultra göreli olmadığı kısa zaman aralıkları olabilir. Ancak bunlar ihmal edilmelidir.

Cevap Kâğıdı 1'i kullanınız.

2) Mezon, iki kuarktan oluşan bir parçacıktır. Mezonun durgun kütlesi M , iki kuarklı sistemin toplam enerjisinin c^2 'ye bölünmesine eşittir.

Durgun bir mezon için, iki kuarkın x eksenı boyunca hareket ettiğinin ve birbirlerini büyüklüğü sabit f olan bir kuvvetle çektiğinin varsayıldığı bir boyutlu bir model ele alınız. Kuarkların birbirlerinin içinden serbestçe geçebildiği varsayılmaktadır. Kuarkların yüksek enerjili hareketinin incelenmesinde, kuarkların durgun kütlesi ihmal edilebilir. $t = 0$ anında her iki kuark da $x = 0$ konumundadır. İki kuarkın hareketini bir (x, t) diyagramı ve bir (p, x) diyagramıyla ayrı ayrı grafiksel olarak gösteriniz, "dönüş noktalarının" koordinatlarını M ve f cinsinden belirtiniz, (p, x) diyagramınızda hareketin ilerleme yönünü gösteriniz ve iki kuark arasındaki en büyük uzaklığı belirleyiniz.

Cevap Kâğıdı 2'yi kullanınız.

3) 2. kısımda kullanılan referans çerçevesi S çerçevesi olarak adlandırılacaktır; S olarak adlandırılan laboratuvar çerçevesi, negatif x yönünde sabit $v = 0.6c$ hızıyla hareket etmektedir. İki referans çerçevesindeki koordinatlar, $t = t' = 0$ anında S' 'deki $x = 0$ noktası S'' 'deki $x' = 0$

noktasıyla çakışacak şekilde seçilmiştir. İki kuarkın hareketini bir (x', t') diyagramında grafiksel olarak çizin. Dönüş noktalarının koordinatlarını M , f ve c cinsinden belirtiniz ve S' laboratuvar çerçevesinde gözlenen iki kuark arasındaki en büyük uzaklığı belirleyiniz.

Cevap Kâğıdı 3'ü kullanınız.

S ve S'' referans çerçevelerinde gözlenen parçacığın koordinatları, Lorentz dönüşümüyle birbirine bağlıdır:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + \beta ct), \\ t' = \gamma\left(t + \beta \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

Burada $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ve v , S çerçevesinin S'' çerçevesine göre hareket hızıdır.

4) Durgun enerjisi $Mc^2 = 140 \text{ MeV}$ ve S'' laboratuvar çerçevesine göre hızı $0.60c$ olan bir mezonun, S'' laboratuvar çerçevesindeki E' enerjisini belirleyiniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. $p_0 > 0$ seçiniz ve şu tanımları yapınız:

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f}, \quad A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

Konum–zaman grafiği, şu noktalardan geçen doğru parçalarından oluşur:

$$(t, x) : (0, 0) \rightarrow (\tau_0, A_0) \rightarrow (2\tau_0, 0) \rightarrow (3\tau_0, -A_0) \rightarrow (4\tau_0, 0).$$

Dönüş noktaları (τ_0, A_0) ve $(3\tau_0, -A_0)$ 'dir ve

$$T_1 = \frac{4p_0}{f}.$$

x yatay, p düşey ekseninde olmak üzere faz diyagramı, saat yönünde izlenen şu eşkenar dörtgendir:

$$(x, p) : (0, p_0) \rightarrow (A_0, 0) \rightarrow (0, -p_0) \rightarrow (-A_0, 0) \rightarrow (0, p_0).$$

2. Şu tanımları yapınız:

$$p_* = \frac{Mc}{2}, \quad \tau = \frac{Mc}{2f}, \quad a = \frac{Mc^2}{2f}.$$

Kuark 1, 1. kısımdaki hareketi $p_0 = p_*$ ile yapar; kuark 2 için

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

Dönüş anlarındaki konumları şöyledir:

$$t = \tau : (x_1, x_2) = (a, -a), \quad t = 3\tau : (x_1, x_2) = (-a, a).$$

Her iki faz yörüngesi, momentum eksenini üzerindeki karşılıklı köşelerden başlayarak aynı eşkenar dörtgeni saat yönünde izler. Dolayısıyla

$$T = \frac{2Mc}{f}, \quad d_{\max} = \frac{Mc^2}{f}.$$

3. Burada $\gamma = 5/4$ 'tür. $(t'/\tau, x'/a)$ koordinatlarında, aşağıdaki köşeleri doğru parçalarıyla birleştiriniz:

$$\text{Kuark 1: } (0, 0) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (5, 3),$$

$$\text{Kuark 2: } (0, 0) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right) \rightarrow (5, 3).$$

Her yörüngeyi iki iç köşesi, o yörüngeyi dönüş noktalarıdır. Sonraki çevrimler, $(\Delta t', \Delta x') = (5\tau, 3a)$ ötelemesiyle tekrarlanır. Laboratuvarı aynı anda ölçülen en büyük uzaklık

$$d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f}.$$

4. Mezonun laboratuvarındaki enerjisi

$$E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = 175 \text{ MeV}.$$

Çözüm

Aşağıdaki konum–zaman grafiklerinde zaman yatay, konum düşey eksendedir. Faz diyagramlarında x yatay, p düşey eksendedir. Laboratuvar çerçevesi tutarlı olarak S' ile gösterilmiştir.

1) Büyüklüğü sabit merkezî kuvvetin etkisindeki hareket

Pozitif x yönünü başlangıç momentumunun yönünde seçelim; böylece $p_0 > 0$ olur. Ultra göreceli yaklaşımda,

$$E_{\text{particle}} \simeq c|p|, \quad \dot{x} = \frac{pc^2}{E_{\text{particle}}} \simeq c \operatorname{sgn}(p).$$

Dolayısıyla parçacık, yön değiştirmeler arasında c süratiyle hareket eder. Dönüş noktalarında ultra göreceli olmadığı kısa zaman aralıkları, istendiği gibi ihmal edilir.

Çekici kuvvet ve buna karşılık gelen bir potansiyel şöyledir:

$$\dot{p} = -f \operatorname{sgn}(x), \quad U(x) = f|x|.$$

Enerjinin korunumundan

$$c|p| + f|x| = cp_0.$$

Konumdaki bir dönüş noktasında $p = 0$ olduğundan en büyük yer değiştirme

$$A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

Başlangıçta $x > 0$ olduğundan $p = p_0 - ft$ olur. İlk yön değiştirme,

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f},$$

süresi sonunda, $x = c\tau_0 = A_0$ konumunda gerçekleşir. Kuvvet orijine yönelmeye devam ettiği için parçacık negatif momentumla geri döner. Orijini geçtikten sonra kuvvet işaret değiştirir.

Tam bir çevrim şöyledir:

t	x	p
0	0	p_0
τ_0	A_0	0
$2\tau_0$	0	$-p_0$
$3\tau_0$	$-A_0$	0
$4\tau_0$	0	p_0

Konum değerlerini doğru parçalarıyla birleştiriniz. Eğimler τ_0 'a kadar $+c$, τ_0 'dan $3\tau_0$ 'a kadar $-c$ ve sonrasında $+c$ 'dir. $2\tau_0$ anında orijinden geçiş bir yön değiştirme değildir.

Buna göre,

$$T_1 = 4\tau_0 = \frac{4p_0}{f}.$$

Faz eğrisi doğrudan enerjinin korunumundan elde edilir:

$$\frac{|x|}{A_0} + \frac{|p|}{p_0} = 1.$$

Bu, köşeleri $(0, p_0)$, $(A_0, 0)$, $(0, -p_0)$ ve $(-A_0, 0)$ olan bir eşkenar dörtgendir. Üst köşeden başlayan hareket, sağ köşeye, ardından alt köşeye, sonra sol köşeye ve yeniden üst köşeye doğru, yani saat yönünde ilerler.

Başlangıç momentumunun işareti negatifse hem x 'in hem de p 'nin işaretini ters çeviriniz; genlik ve periyot için $|p_0|$ kullanılır.

2) Mezonun durgunluk çerçevesindeki iki kuark

Kuarklar aynı konumdayken etkileşim potansiyelini sıfır alalım. Aralarındaki uzaklık $r = |x_1 - x_2|$ için,

$$U(r) = fr.$$

Mezon durgun olduğundan kuarkların başlangıç momentumları eşit büyüklükte ve zıt yönlüdür.

Başlangıçta sağa hareket eden kuarkı kuark 1 olarak adlandıralım:

$$p_1(0) = p_*, \quad p_2(0) = -p_*.$$

$t = 0$ anında potansiyel enerji sıfırdır. Dolayısıyla toplam enerjiden

$$Mc^2 = 2cp_*, \quad p_* = \frac{Mc}{2}.$$

Simetri nedeniyle şu ilişkiler korunur:

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

Her kuarka, diğer kuarka doğru yönelmiş, büyüklüğü f olan bir kuvvet etki eder; kuarklar birbirinden ayrı konumlardayken bu kuvvet aynı zamanda orijine doğrudur. Bu nedenle her biri, 1. kısımda bulunan hareketi şu değerlerle yapar:

$$\tau = \frac{Mc}{2f}, \quad a = c\tau = \frac{Mc^2}{2f}.$$

Toplam enerji denklemi de bunu doğrular:

$$Mc^2 = 2c|p_1| + f|x_1 - x_2| = 2(c|p_1| + f|x_1|).$$

Aşağıdaki tablo, bir periyot boyunca her iki grafiği de belirler:

t/τ	x_1/a	p_1/p_*	x_2/a	p_2/p_*
0	0	1	0	-1
1	1	0	-1	0
2	0	-1	0	1
3	-1	0	1	0
4	0	1	0	-1

Konum–zaman diyagramları için her kuarkın konum değerlerini doğru parçalarıyla birleştiriniz. Üçgen biçimli iki eğri, $x = 0$ 'a göre birbirinin yansımasıdır ve kuarklar $t = 2\tau$ anında birbirlerinin içinden geçer.

Her iki faz diyagramı için de

$$\frac{|x_i|}{a} + \frac{|p_i|}{p_*} = 1.$$

Kuark 1, $(x, p) = (0, p_*)$ noktasından, kuark 2 ise $(0, -p_*)$ noktasından başlar. Her ikisi de eşkenar dörtgeni saat yönünde izler.

Dönüş noktalarında kuarklar karşılıklı uç konumlarda bulunur; dolayısıyla

$$d_{\max} = 2a = \frac{Mc^2}{f}.$$

Her birinin periyodu

$$T = 4\tau = \frac{2Mc}{f}.$$

3) Laboratuvar çerçevesinde hareket ve en büyük uzaklık

Verilen dönüşümde

$$\beta = \frac{3}{5}, \quad \gamma = \frac{5}{4},$$

olduğundan

$$\gamma(1 + \beta) = 2, \quad \gamma(1 - \beta) = \frac{1}{2}.$$

Hızın $u = \pm c$ olduğu bir parça için dönüşüm

$$u' = \frac{u + \beta c}{1 + \beta u/c} = \pm c.$$

Dolayısıyla laboratuvardaki tüm yörünge parçalarının eğimleri de $+c$ veya $-c$ 'dir. Uç noktalarını, dönüş olaylarına dönüşüm uygulayarak elde ederiz.

Örneğin, kuark 1'in ilk dönüşü $(t, x) = (\tau, a)$ noktasında gerçekleşir ve $a = c\tau$ 'dur. Dolayısıyla

$$t' = \gamma\tau(1 + \beta) = 2\tau, \quad x' = \gamma a(1 + \beta) = 2a.$$

Bir çevrimdeki dört dönüş olayının tümü şöyledir:

Dönüş olayı	t'	x'
Kuark 2, ilk dönüş	$\frac{\tau}{2} = \frac{Mc}{4f}$	$-\frac{a}{2} = -\frac{Mc^2}{4f}$
Kuark 1, ilk dönüş	$2\tau = \frac{Mc}{f}$	$2a = \frac{Mc^2}{f}$
Kuark 1, ikinci dönüş	$3\tau = \frac{3Mc}{2f}$	$a = \frac{Mc^2}{2f}$
Kuark 2, ikinci dönüş	$\frac{9\tau}{2} = \frac{9Mc}{4f}$	$\frac{7a}{2} = \frac{7Mc^2}{4f}$

Her iki yörünge de $(t', x') = (0, 0)$ noktasında başlar. Durgunluk çerçevesinde $(t, x) = (2\tau, 0)$ noktasındaki karşılaşma şu noktaya dönüşür:

$$(t', x') = \left(\frac{5\tau}{2}, \frac{3a}{2} \right).$$

Durgunluk çerçevesindeki çevrimin sonu olan $(4\tau, 0)$ noktası ise şu noktaya dönüşür:

$$(t', x') = (5\tau, 3a).$$

Bu noktalar ve dönüş noktaları tablosu, laboratuvar grafiklerini tamamen belirler: her kuark için ardışık noktaları doğru parçalarıyla birleştiriniz. Sonraki çevrimler, her iki eğrinin şu miktarlarda ötelenmesiyle tekrarlanır:

$$\Delta t' = 5\tau = \gamma T, \quad \Delta x' = 3a.$$

Gözlenen uzaklığı bulmak için iki konumun **aynı laboratuvar anında** değerlendirilmesi gerekir:

$$d'(t') = |x'_1(t') - x'_2(t')|.$$

Başlangıçta,

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = -ct',$$

olduğundan aralarındaki uzaklık $2ct'$ olarak artar. Önce kuark 2, $t' = \tau/2$ anında yön değiştirir. O anda,

$$x'_1 = \frac{a}{2}, \quad x'_2 = -\frac{a}{2},$$

ve dolayısıyla $d' = a$ olur.

$t' = \tau/2$ 'den $t' = 2\tau$ 'ya kadar her iki kuark da c süratiyle sağa hareket eder:

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = ct' - a.$$

Dolayısıyla aralarındaki uzaklık a 'ya eşit kalır. Ardından $5\tau/2$ anında sıfıra iner, 3τ anında yeniden a 'ya çıkar, $9\tau/2$ 'ye kadar a 'da kalır ve 5τ anında sıfıra iner. Bu örüntü tekrarlanır.

Böylece

$$d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f} = \frac{1}{2} d_{\max}.$$

Laboratuvardaki yön değiştirme anlarının farklı olması belirleyicidir: durgunluk çerçevesinde eşzamanlı olan iki dönüş olayı laboratuvarda eşzamanlı değildir.

4) Mezonun laboratuvardaki enerjisi

Mezonun bütünü için durgunluk çerçevesindeki toplam momentum sıfır, toplam enerji ise Mc^2 'dir. Enerjisine dönüşüm uygulandığında

$$E' = \gamma(E + \beta cP_x) = \gamma Mc^2.$$

Verilen değerlerle,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = \frac{1}{0.80} = 1.25,$$

ve dolayısıyla

$$E' = 1.25(140 \text{ MeV}) = 175 \text{ MeV}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Süperiletken Mıknatıs

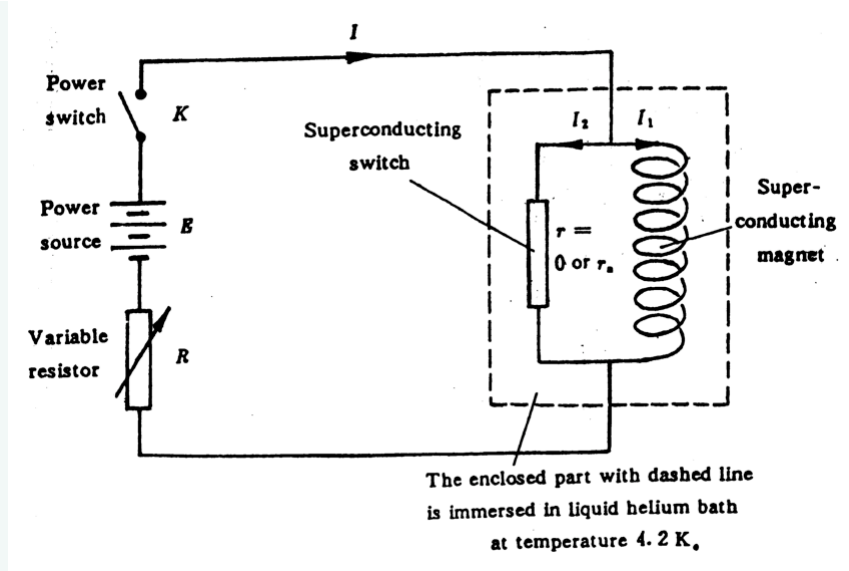
Süperiletken mıknatıslar laboratuvarlarda yaygın olarak kullanılır. Süperiletken mıknatısların en yaygın biçimi, süperiletken telden yapılmış bir solenoiddir. Süperiletken bir mıknatısın dikkat çekici özelliği, Joule ısınması nedeniyle herhangi bir enerji kaybı olmadan yüksek manyetik alanlar üretmesidir; çünkü mıknatıs 4.2 K sıcaklığındaki sıvı helyuma daldırıldığında süperiletken telin elektriksel direnci sıfır olur. Mıknatıs genellikle Şekil 1'de gösterildiği gibi özel olarak tasarlanmış bir süperiletken anahtarla donatılır. Anahtarın r direnci kontrol edilebilir: süperiletken durumda $r = 0$, normal durumda ise $r = r_n$ olur. Kalıcı akım modunda, mıknatıs ve süperiletken anahtar üzerinden süresiz olarak akım dolaşır. Kalıcı akım modu, dış kaynağın bağlantısı kesilmişken uzun süreler boyunca sabit bir manyetik alanın korunmasını sağlar.

Süperiletken anahtarın ayrıntıları Şekil 1'de verilmemiştir. Anahtar genellikle üzerine bir ısıtıcı tel sarılmış ve sıvı helyum banyosundan uygun biçimde ısı olarak yalıtılmış kısa bir süperiletken tel parçasıdır. Isıtıldığında süperiletken telin sıcaklığı artar ve tel, direnç gösterdiği normal duruma geri döner. r_n 'nin tipik değeri birkaç ohmdur. Burada bu değerin 5Ω olduğunu varsayıyoruz.

Süperiletken bir mıknatısın indüktansı boyutlarına bağlıdır; Şekil 1'deki mıknatıs için bunun 10 H olduğunu varsayın. Toplam I akımı, R direnci ayarlanarak değiştirilebilir.

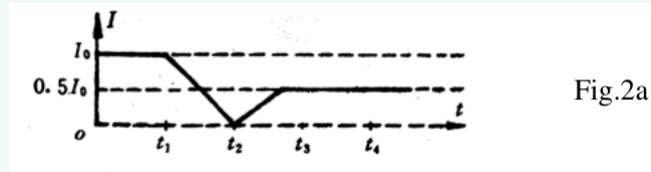
Bu soru yalnızca grafiklere göre puanlandırılacaktır!

Oklar, I , I_1 ve I_2 'nin pozitif yönlerini göstermektedir.

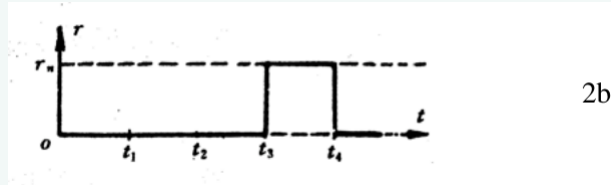


Şekil 1

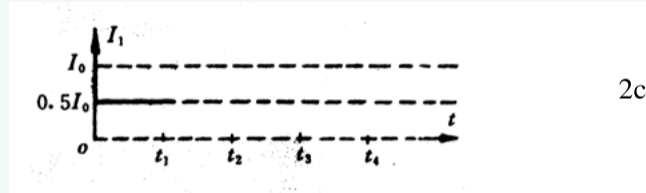
1) Toplam I akımı ve süperiletken anahtarın r direnci, zamanla sırasıyla Şekil 2a ve 2b'de gösterilen biçimde değişecek şekilde kontrol edilirse ve sırasıyla mıknatıstan ve anahtardan geçen I_1 ve I_2 akımlarının başlangıçta eşit olduğu varsayılırsa (Şekil 2c ve Şekil 2d), bu akımlar t_1 'den t_4 'e kadar zamanla nasıl değişir? Cevabınızı Şekil 2c ve Şekil 2d'de grafiklerle gösterin.



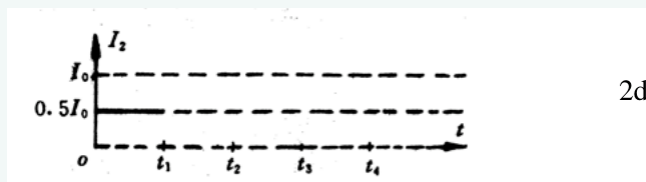
Şekil 2a



2b

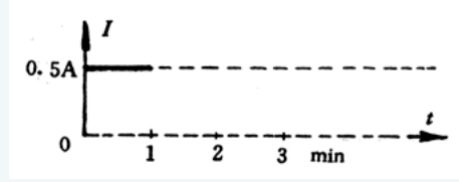


2c

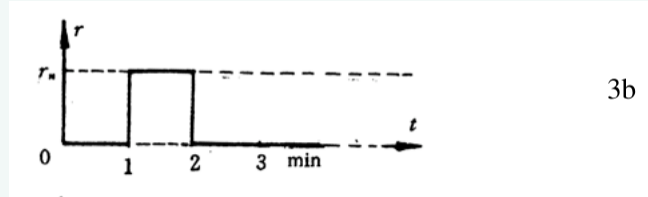


2d

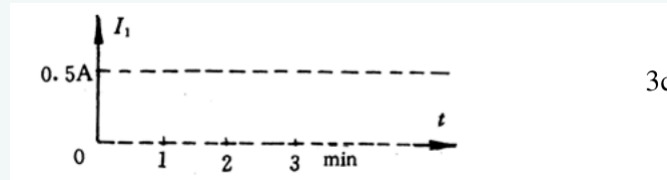
2) $r = 0$, $I_1 = 0$ ve $R = 7.5 \Omega$ iken güç anahtarı K 'nin $t = 0$ anında kapatıldığını ve toplam I akımının 0.5 A olduğunu varsayın. K kapalı tutulurken, süperiletken anahtarın r direnci Şekil 3b'de gösterilen biçimde değiştiriliyor. I , I_1 ve I_2 'nin buna karşılık gelen zamana bağlı değişimlerini sırasıyla Şekil 3a, 3c ve 3d'de çizin.



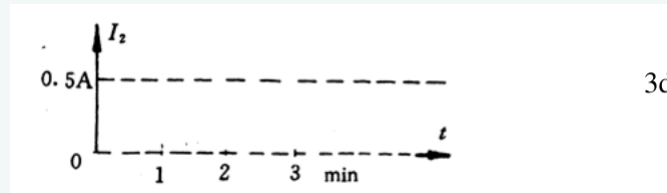
Şekil 3a



3b



3c



3d

3) Süperiletken anahtar normal durumdayken üzerinden yalnızca 0.5 A 'den küçük akımların geçmesine izin verilir; daha büyük akımlarda anahtar yanar. Süperiletken mıknatısın, Şekil 4'te gösterildiği gibi $t = 0$ 'dan $t = 3 \text{ min}$ 'e kadar kalıcı akım modunda, yani $I = 0$, $I_1 = i_1$ (örneğin 20 A) ve $I_2 = -i_1$ olacak şekilde çalıştırıldığını varsayın. Mıknatıstan geçen akım sıfıra indirilerek deney sonlandırılacaksa, bunu nasıl yaparsınız? Bunun birkaç işlem adımında yapılması gerekir. I , r , I_1 ve I_2 'nin buna karşılık gelen değişimlerini Şekil 4'te çizin.

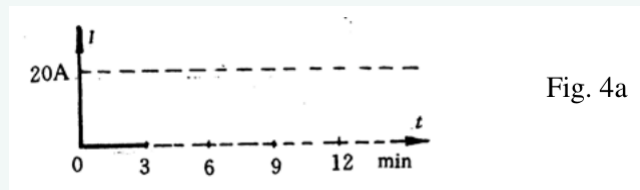
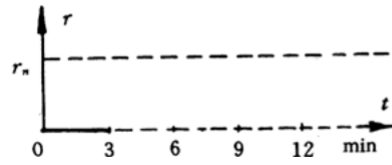


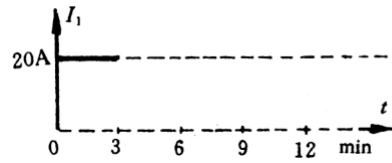
Fig. 4a

Şekil 4a



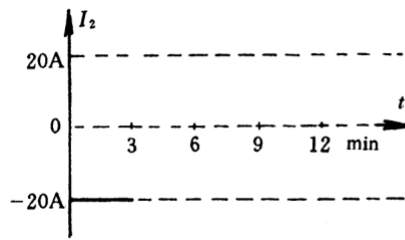
4b

4b



4c

4c



4d

4d

4) Mıknatısın 20 A'lık kalıcı akımla kalıcı akım modunda çalıştırıldığını varsayın ($t = 0$ 'dan $t = 3\text{ min}$ 'e kadar. Şekil 5'e bakın). Bunu 30 A akımlı bir kalıcı akım moduna nasıl geçirirsiniz? Cevabınızı Şekil 5'te grafikte gösterin.

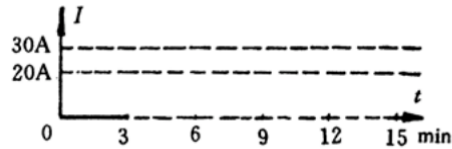
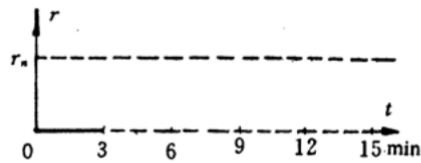


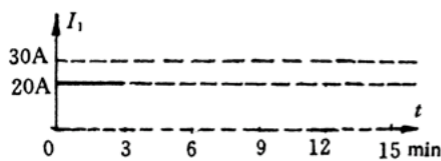
Fig. 5a

Şekil 5a



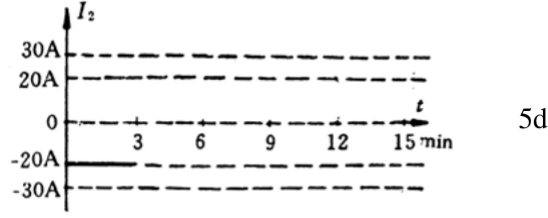
5b

5b



5c

5c



5d

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. Verilen işlem dizisinin tamamı boyunca,

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

Dolayısıyla I_2 , t_1 anındaki $+I_0/2$ değerinden t_2 anında $-I_0/2$ 'ye doğrusal olarak düşer, I sabit değerine ulaşırken doğrusal olarak sıfıra yükselir ve t_3 ile t_4 boyunca sıfır kalır.

2. Kaynağın elektromotor kuvveti 3.75 V'tur. Başlangıçta,

$$(I, I_1, I_2) = (0.50, 0, 0.50) \text{ A}.$$

1 min anında I ve I_2 aniden 0.30 A'e düşerken I_1 sıfır kalır. Ardından, zaman sabiti

$$\tau_R = \frac{10}{3} \text{ s} \approx 3.33 \text{ s}.$$

olacak şekilde üstel olarak $(0.50, 0.50, 0)$ A değerlerine yaklaşırlar. 2 min'den sonra $I = 0.50$ A, I_1 sabit ve $I_2 \approx 0$ olur. Tam ifadeler aşağıda verilmiştir.

3. $r = 0$ iken önce I 'yı sıfırdan 20 A'e yükseltin; bu sırada $I_1 = 20$ A olarak kalır. Ardından $r = 5 \Omega$ yapın, I 'yı yavaşça sıfıra indirin ve K 'yı açın. Mıknatısta kalan akım, 2.0 s zaman sabitiyle üstel olarak azalır. Aşağıda açıkça verilen üç dakikalık doğrusal değişim, normal durumun tamamı boyunca

$$|I_2| < 0.223 \text{ A} < 0.5 \text{ A}$$

koşulunu sağlar.

4. Önce $r = 0$ iken $I = I_1 = 20$ A eşitliğini sağlayın. $r = 5 \Omega$ yapın ve üç dakikalık doğrusal artış boyunca $I_2 = 1/9$ A kullanarak I_1 'i 30 A'e yükseltin. Ardından $I = 30$ A yapın, anahtarı soğutarak $r = 0$ durumuna getirin ve I 'yı sıfıra indirin. Son kalıcı akım durumu

$$I = 0, \quad I_1 = 30 \text{ A}, \quad I_2 = -30 \text{ A}, \quad r = 0.$$

olur.

Çözüm

Mıknatısı, indüktansı sabit ve $L = 10 \text{ H}$ olan ideal bir bobin olarak ele alıyoruz. Soruda örtük olarak varsayıldığı üzere bağlantı tellerinin direncini, parazitik indüktansı ve anahtarlama süresini ihmal ediyoruz.

Belirtilen akım yönleriyle Kirchhoff'un akım yasası

$$I = I_1 + I_2.$$

sonucunu verir. Mıknatıs ile süperiletken anahtarın uçları arasındaki gerilim aynıdır:

$$V = L \frac{dI_1}{dt} = rI_2.$$

Dolayısıyla temel denklem

$$L \frac{dI_1}{dt} = r(I - I_1).$$

olur.

$r = 0$ olduğunda mıknatıs akımı sabittir. Bu durumda kaynak akımındaki değişimler bütünüyle süperiletken anahtardan geçer:

$$\frac{dI_1}{dt} = 0, \quad I_2 = I - I_1.$$

$r = r_n$ olduğunda ve toplam akımın değişimi verildiğinde denklem şu biçimi alır:

$$\tau \frac{dI_1}{dt} + I_1 = I, \quad \tau = \frac{L}{r_n} = 2.0 \text{ s.}$$

Bobin akımı anahtarlama anlarında sürekliliğini korur; I ve I_2 ani sıçramalar yapabilir.

1) Değişimleri verilen toplam akım ve anahtar direnci

Başlangıçta iki kol akımı eşittir; dolayısıyla

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2}.$$

t_3 anına kadar anahtar süperiletkendir. Bu nedenle

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

t_3 anına gelindiğinde uygulanan akım $I_0/2$ 'ye ulaşmıştır. Dolayısıyla anahtar dirençli duruma geçtiğinde $I_2 = 0$ olur. $t_3 < t < t_4$ aralığında,

$$L \frac{dI_1}{dt} = r_n \left(\frac{I_0}{2} - I_1 \right) = 0.$$

Bu nedenle akımlar değişmeden kalır. Anahtarın t_4 anında yeniden $r = 0$ durumuna getirilmesi de herhangi bir değişime yol açmaz.

İstenen grafikler şöyledir:

- **Şekil 2c:** tüm süreç boyunca $I_1 = I_0/2$ düzeyinde yatay bir çizgi.
- **Şekil 2d:** t_1 anına kadar $I_0/2$ düzeyinde yatay bir çizgi, ardından t_2 anında $-I_0/2$ 'ye ulaşan doğrusal bir düşüş. t_1 ile t_2 'nin tam ortasında sıfırdan geçer. Daha sonra, verilen I akımı $I_0/2$ 'ye

ulaştığında sıfıra varacak şekilde doğrusal olarak yükselir ve t_3 , t_4 anlarında ve sonrasında sıfırda kalır.

Şekil 2d'nin negatif kısmı, verilen sıfır ekseninin altına çizilmelidir.

2) Sabit kaynak direnci

Kaynağın elektromotor kuvveti $\mathcal{E}$ olsun. Başlangıçta $r = 0$ olduğundan paralel bağlı kolların uçları arasındaki gerilim sıfırdır:

$$\mathcal{E} = RI = (7.5 \, \Omega)(0.50 \, \text{A}) = \boxed{3.75 \, \text{V}}.$$

$0 \leq t < 60 \, \text{s}$ aralığında mıknatıs akımı, başlangıç değeri olan sıfırda kalır:

$$\boxed{I = 0.50 \, \text{A}, \quad I_1 = 0, \quad I_2 = 0.50 \, \text{A}.}$$

$t = 60 \, \text{s}$ anında anahtar dirençli duruma geçer. I_1 ani bir sıçrama yapamayacağından bu anın hemen sonrasındaki değeri sıfır kalır ve

$$I(60^+) = I_2(60^+) = \frac{\mathcal{E}}{R + r_n} = \frac{3.75}{12.5} = \boxed{0.30 \, \text{A}}.$$

elde edilir.

Normal durumda geçen süre boyunca Kirchhoff'un gerilim yasası

$$\mathcal{E} = R(I_1 + I_2) + r_n I_2,$$

ve dolayısıyla

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - RI_1}{R + r_n}.$$

sonucunu verir. Bunu bobin denklemiyle birleştirecek,

$$L \frac{dI_1}{dt} = \frac{r_n R}{R + r_n} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_1 \right).$$

Böylece

$$\boxed{\tau_R = \frac{L(R + r_n)}{Rr_n} = \frac{10(7.5 + 5)}{7.5(5)} \, \text{s} = \frac{10}{3} \, \text{s}.}$$

$60 \leq t < 120 \, \text{s}$ için

$$x = \frac{t - 60 \, \text{s}}{\tau_R}.$$

tanımını yapalım. Akımlar şöyledir:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1(t) &= (0.50 \, \text{A})(1 - e^{-x}), \\ I_2(t) &= (0.30 \, \text{A})e^{-x}, \\ I(t) &= 0.50 \, \text{A} - (0.20 \, \text{A})e^{-x}. \end{aligned}}$$

$t = 120 \, \text{s}$ anında $x = 18$ olur ve anahtar yeniden $r = 0$ durumuna geçer. Kaynak akımı $\mathcal{E}/R = 0.50 \, \text{A}$ olurken mıknatıs akımı o andaki değerinde sabitlenir. Dolayısıyla tüm $t \geq 120 \, \text{s}$ için,

$$\begin{aligned} I &= 0.50 \text{ A}, \\ I_1 &= (0.50 \text{ A})(1 - e^{-18}), \\ I_2 &= (0.50 \text{ A})e^{-18} \approx 7.6 \text{ nA}. \end{aligned}$$

Grafiklerin özellikleri şöyledir:

- **Şekil 3a:** birinci dakikaya kadar $I = 0.50 \text{ A}$; 0.30 A 'e dikey bir düşüş; ardından 0.50 A 'e doğru aşağı konkav, üstel bir yükseliş.
- **Şekil 3c:** birinci dakikaya kadar $I_1 = 0$; ardından 0.50 A 'e doğru sürekli, aşağı konkav, üstel bir yükseliş. İkinci dakikada tam olarak sabit hâle gelir.
- **Şekil 3d:** birinci dakikaya kadar $I_2 = 0.50 \text{ A}$; 0.30 A 'e dikey bir düşüş; ardından sıfıra doğru üstel azalma.

İkinci dakikada I ve I_2 , yalnızca yaklaşık 3.0 nA büyüklüğünde yukarı yönlü sıçramalar yapar; bunlar verilen ölçekte görünmez. Görünür tüm geçici değişimler, bir dakikanın yalnızca küçük bir kesri kadar sürer.

3) Kalıcı akımın sıfıra indirilmesi

Akım kısıtlaması, normal durumdaki anahtar akımının büyüklüğü için geçerlidir:

$$\begin{aligned} |I_2| &< 0.5 \text{ A}, \\ I_2 &= \frac{L}{r_n} \frac{dI_1}{dt}, \end{aligned}$$

olduğundan bu kısıtlama

$$\left| \frac{dI_1}{dt} \right| < \frac{r_n}{L} (0.5 \text{ A}) = 0.25 \text{ A s}^{-1}.$$

koşulunu gerektirir.

Başlangıçtaki kalıcı akım durumunda anahtarın hemen ısıtılması, üzerinden 20 A geçmesine neden olurdu. Önce, anahtar hâlâ süperiletkenken onun taşıdığı akımı dış kaynağa aktarmalıyız.

20 A örneği için belirli bir işlem programı aşağıda verilmiştir.

0 ile 3 dakika arasında: verilen kalıcı akım durumunu koruyun:

$$I = 0, \quad r = 0, \quad I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = -20 \text{ A}.$$

3 ile 6 dakika arasında: $r = 0$ durumunu koruyun, R yeterince büyükken K 'yı kapatın ve I 'yı sıfırdan 20 A 'e doğrusal olarak yükseltin. Bu durumda

$$I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = I - 20 \text{ A}.$$

Dolayısıyla I_2 , -20 A 'den sıfıra doğrusal olarak yükselir. Altıncı dakikada kaynak, mıknatıs akımının tamamını sağlar.

6 ile 9 dakika arasında: $r = r_n = 5 \Omega$ yapın ve toplam akımı 20 A 'den sıfıra doğrusal olarak indirin.

Şu tanımları yapalım:

$$u = t - 360 \text{ s}, \quad T = 180 \text{ s}, \quad a = \frac{20 \text{ A}}{T} = \frac{1}{9} \text{ A s}^{-1}.$$

Bu aralıkta,

$$I = 20 \text{ A} - au.$$

$\tau \dot{I}_1 + I_1 = I$ denklemi $I_1(0) = 20 \text{ A}$ başlangıç koşuluyla çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} I_1 &= 20 \text{ A} - au + a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \\ I_2 &= -a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \end{aligned} \quad \tau = 2.0 \text{ s.}$$

elde edilir.

Bunun sonucunda,

$$|I_2| \leq a\tau = \frac{2}{9} \text{ A} \approx 0.222 \text{ A} < 0.5 \text{ A}.$$

Mıknatıs akımı, azalan kaynak akımını onun biraz üzerinde kalarak izler.

9. dakikada ve sonrasında: kaynak akımı sıfıra ulaşmıştır. Anahtarı normal durumda bırakarak K 'yı açın. Mıknatısta kalan akım

$$D = \frac{2}{9}(1 - e^{-90}) \text{ A} \approx 0.222 \text{ A}.$$

olur. Bu akım, mıknatıs ve normal durumdaki anahtar üzerinden dolaşır ve şu şekilde azalır:

$$I = 0, \quad I_1 = De^{-(t-540 \text{ s})/\tau}, \quad I_2 = -De^{-(t-540 \text{ s})/\tau}.$$

Bir 10 s daha geçtikten sonra $I_1 \approx 1.5 \text{ mA}$ olur ve sıfıra doğru azalmaya devam eder.

Dolayısıyla Şekil 4'teki grafiklerin tamamı şöyledir:

Grafik	İstenen biçim
4a: I	3. dakikaya kadar sıfır; 6. dakikada 20 A'e ulaşan doğrusal yükseliş; 9. dakikada sıfıra ulaşan doğrusal düşüş; sonrasında sıfır.
4b: r	6. dakikaya kadar sıfır; 5 Ω 'a basamak biçiminde geçiş; son boşalma boyunca normal durumda kalış.
4c: I_1	6. dakikaya kadar 20 A; yumuşak bir geçişle başlayan, hemen hemen doğrusal bir azalma ve 9. dakikada yaklaşık 0.222 A'e ulaşma; ardından sıfıra doğru üstel azalma.
4d: I_2	3. dakikaya kadar -20 A ; 6. dakikada sıfıra ulaşan doğrusal yükseliş; hafifçe negatif olup -0.222 A 'e yaklaşma; 9. dakikadan sonra negatif taraftan sıfıra doğru üstel dönüş.

Her pasif RL boşalmasında olduğu gibi, tam sıfıra asimptotik olarak yaklaşılır. Dakika ölçeğindeki grafikte son kuyruk sıfırdan ayırt edilemez. Bu kuyruk sönümlenmeden önce anahtarın yeniden $r = 0$ durumuna getirilmesi, kalan akımın hapsolmesine yol açar.

Farklı bir başlangıç i_1 değeri için de 0.25 A s^{-1} sınırına uyacak kadar yavaş bir doğrusal değişimle aynı yöntem uygulanır.

4) Kalıcı akımın 20 A'den 30 A'e değiştirilmesi

Yine, anahtarı ısıtmadan önce kaynak akımını mevcut mıknatıs akımına eşitleyin.

Mıknatıs akımı için üç dakika süren tam doğrusal bir artış seçebiliriz:

$$\alpha = \frac{30 - 20}{180} \text{ A s}^{-1} = \frac{1}{18} \text{ A s}^{-1}.$$

Bu doğrusal artış sırasında gereken anahtar akımı

$$\delta = \frac{L}{r_n} \alpha = \frac{1}{9} \text{ A} \approx 0.111 \text{ A},$$

olup normal durum sınırının çok altındadır.

Bu doğrusal artışı tam olarak elde etmek için

$$I = I_1 + \delta.$$

olacak şekilde akımı ayarlayın. $u = t - 360$ s, $0 < u < 180$ s için,

$$I_1 = 20 \text{ A} + \alpha u, \quad I_2 = \delta, \quad I = 20 \text{ A} + \alpha u + \delta.$$

Gerçekten de $r_n I_2 = r_n \delta = L \alpha = L dI_1/dt$ olur.

Dört grafiğin tümünü belirleyen eksiksiz bir işlem programı şöyledir:

Zaman (dakika)	I (A), Şekil 5a	r (Ω), Şekil 5b	I_1 (A), Şekil 5c	I_2 (A), Şekil 5d
0–3	0	0	20	–20
3–6	Doğrusal $0 \rightarrow 20$	0	20	Doğrusal $-20 \rightarrow 0$
6–9	Doğrusal $20 + \delta \rightarrow 30 + \delta$	5	Doğrusal $20 \rightarrow 30$	$\delta = 1/9$
9–12	30	5	30	0
12–15	Doğrusal $30 \rightarrow 0$	0	30	Doğrusal $0 \rightarrow -30$
15'ten sonra	0	0	30	–30

Burada tabloda verilen δ 'nın sayısal değeri amper cinsindendir.

Anahtarlama ayrıntıları önemlidir:

- **6. dakikada:** $I = I_1 = 20$ A, dolayısıyla $I_2 = 0$ olur. Anahtarı normal duruma getirin, ardından I 'yı küçük bir δ miktarı kadar artırın. Bu, I_1 'de herhangi bir sıçrama olmadan mıknatıs akımının doğrusal artışı başlatır.
- **9. dakikada:** I_1 tam olarak 30 A'e ulaşmıştır. I 'yı $30 + \delta$ 'dan 30 A'e indirin. Böylece $I_2 = 0$ olur ve mıknatıs akımı sabit kalır.
- **12. dakikada:** anahtarı yeniden $r = 0$ durumuna getirin. Sonraki üç dakika boyunca I 'yı sıfıra indirin. Mıknatıs akımı 30 A'de sabit kalırken I_2 giderek daha negatif olur.
- **15. dakikada:** K 'yı açın. Mıknatıs ve süperiletken anahtar, büyüklükleri 30 A olan eşit ve zıt yönlü akımlar taşır.

Böylece Şekil 5a, 6. ve 9. dakikalarda küçük 0.111 A'lik basamaklar içerir. Şekil 5d'de 6–9. dakikalar arasında küçük, pozitif bir dikdörtgen darbe vardır. Anahtardan geçen büyük negatif akımlar yalnızca $r = 0$ iken oluşur; dolayısıyla belirtilen normal durum kısıtlamasını ihlal etmezler.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

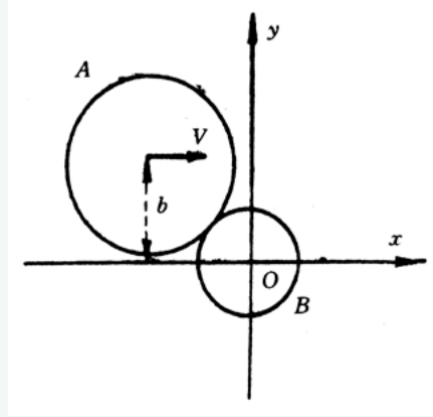
Soru 3: Yüzey Sürtünmesi Olan Disklerin Çarpışması

Kütlesi m ve yarıçapı R_A olan homojen bir A diski, sürtünmesiz yatay bir x - y düzleminde x doğrultusunda V hızıyla öteleme hareketi yapmaktadır (bir sonraki sayfadaki şekle bakınız). Diskin merkezi x ekseninden b uzaklıktadır. Bu disk, merkezi başlangıçta koordinat sisteminin başlangıç noktasında bulunan, durgun ve homojen bir B diskiyle çarpışır. B diskinin kütlesi ve kalınlığı A'ninkine eşittir, ancak yarıçapı R_B 'dir. Çarpışmadan sonra disklerin temas noktalarındaki

hızlarının, merkezlerini birleştiren doğruya dik doğrultudaki bileşenlerinin eşit olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca disklerin merkezlerini birleştiren doğru boyunca bağıl hızlarının büyüklüklerinin çarpışmadan önce ve sonra aynı olduğu varsayılmaktadır.

1) Böyle bir çarpışma için iki diskin çarpışmadan sonraki hızlarının X ve Y bileşenlerini, yani V'_{AX} , V'_{AY} , V'_{BX} ve V'_{BY} değerlerini m , R_A , R_B , V ve b cinsinden bulunuz.

2) Çarpışmadan sonra A diskinin E'_A ve B diskinin E'_B kinetik enerjilerini m , R_A , R_B , V ve b cinsinden bulunuz.



Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$D = R_A + R_B$ olsun. Bir çarpışmanın gerçekleşmesi için $0 \leq b < D$ olmalıdır; A, şekilde gösterildiği gibi x ekseninin üstündedir.

1. Hız bileşenleri şöyledir:

$$V'_{AX} = \frac{5Vb^2}{6D^2}, \quad V'_{AY} = \frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2},$$

$$V'_{BX} = V \left(1 - \frac{5b^2}{6D^2} \right), \quad V'_{BY} = -\frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2}.$$

2. Hem öteleme hem de dönme hesaba katıldığında,

$$E'_A = \frac{3mV^2b^2}{8D^2}, \quad E'_B = \frac{mV^2}{2} \left(1 - \frac{11b^2}{12D^2} \right).$$

Çözüm

1) Çarpışmadan sonraki hızlar

Çarpışmayı anlık kabul edelim; böylece merkezleri birleştiren doğru çarpışma boyunca sabit kalır. Sürtünmesiz yatay düzlem, yatay doğrultuda itme veya düşey eksen etrafında tork uygulamaz. Başlangıçta iki disk de dönmemektedir.

Şu tanımları yapalım:

$$s = \frac{b}{D}, \quad c = \sqrt{1 - s^2}, \quad D = R_A + R_B.$$

İlk temas anında A'nın merkezi $(-Dc, b)$ noktasında, B'nin merkezi ise koordinat sisteminin başlangıç noktasındadır. Dolayısıyla A'dan B'ye uzanan doğru boyunca ve bu doğruya dik doğrultudaki birim vektörler şöyledir:

$$\mathbf{n} = (c, -s), \quad \mathbf{t} = (s, c).$$

A'nın başlangıç hızı

$$\mathbf{v}_A = Vc\mathbf{n} + Vs\mathbf{t}.$$

şeklindedir.

B'ye uygulanan itme

$$\mathbf{J} = J_n\mathbf{n} + J_t\mathbf{t}.$$

olsun. A'ya uygulanan itme $-\mathbf{J}$ 'dir. Buna göre doğrusal itme-momentum bağıntısı şu sonuçları verir:

$$\begin{aligned} v'_{An} &= Vc - \frac{J_n}{m}, & v'_{Bn} &= \frac{J_n}{m}, \\ v'_{At} &= Vs - \frac{J_t}{m}, & v'_{Bt} &= \frac{J_t}{m}. \end{aligned}$$

Normal doğrultudaki bağıl hız, büyüklüğünü koruyarak yön değiştirir: diskler çarpışmadan önce birbirlerine yaklaşır, çarpışmadan sonra ise birbirlerinden uzaklaşır. Dolayısıyla,

$$v'_{Bn} - v'_{An} = Vc,$$

buradan

$$\frac{2J_n}{m} - Vc = Vc \implies J_n = mVc.$$

elde edilir. Böylece

$$\boxed{v'_{An} = 0, \quad v'_{Bn} = Vc}.$$

Teğetsel itmeyi belirlemek için dönmeyi de hesaba katmalıyız. Eylemsizlik momentleri şöyledir:

$$I_A = \frac{1}{2}mR_A^2, \quad I_B = \frac{1}{2}mR_B^2.$$

Saat yönünün tersindeki açısal hızı pozitif alalım. Temas noktalarının A'nın merkezine göre konumu $R_A\mathbf{n}$, B'nin merkezine göre konumu ise $-R_B\mathbf{n}$ 'dir. Açısal itme-momentum bağıntısı şunları verir:

$$I_A\omega'_A = -R_AJ_t, \quad I_B\omega'_B = -R_BJ_t.$$

Dolayısıyla,

$$\omega'_A = -\frac{2J_t}{mR_A}, \quad \omega'_B = -\frac{2J_t}{mR_B}.$$

Temas eden maddesel noktaların teğetsel hızları şöyledir:

$$\begin{aligned} u'_{At} &= v'_{At} + R_A\omega'_A = Vs - \frac{3J_t}{m}, \\ u'_{Bt} &= v'_{Bt} - R_B\omega'_B = \frac{3J_t}{m}. \end{aligned}$$

Bu hızların eşit olması koşulu

$$Vs - \frac{3J_t}{m} = \frac{3J_t}{m},$$

bağıntısını gerektirir; buradan

$$J_t = \frac{mVs}{6}.$$

elde edilir. Böylece

$$v'_{At} = \frac{5}{6}Vs, \quad v'_{Bt} = \frac{1}{6}Vs,$$

ve 2. kısım için gerekli olan açısal hızlar şöyledir:

$$\omega'_A = -\frac{Vs}{3R_A}, \quad \omega'_B = -\frac{Vs}{3R_B}.$$

Gösterilen geometri için iki disk de saat yönünde döner.

Kartezyen koordinatlara dönersek,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_A &= \frac{5}{6}Vs \mathbf{t} = \left(\frac{5}{6}Vs^2, \frac{5}{6}Vsc \right), \\ \mathbf{v}'_B &= Vc \mathbf{n} + \frac{1}{6}Vs \mathbf{t} = \left(V \left(c^2 + \frac{s^2}{6} \right), -\frac{5}{6}Vsc \right). \end{aligned}$$

$c^2 = 1 - s^2$, $s = b/D$ ve $c = \sqrt{D^2 - b^2}/D$ kullanıldığında Cevaplar bölümündeki dört bileşen elde edilir. Bunların toplamı doğrusal momentumun korunumu koşulunu sağlar:

$$V'_{AX} + V'_{BX} = V, \quad V'_{AY} + V'_{BY} = 0.$$

2) Çarpışmadan sonraki kinetik enerjiler

Her diskin kinetik enerjisi, merkezinin öteleme hareketini ve merkezi etrafındaki dönme hareketini içerir:

$$E'_i = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'_i|^2 + \frac{1}{2}I_i(\omega'_i)^2.$$

A için,

$$\begin{aligned} E'_A &= \frac{1}{2}m \left(\frac{5}{6}Vs \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mR_A^2 \right) \left(\frac{Vs}{3R_A} \right)^2 \\ &= \left(\frac{25}{72} + \frac{1}{36} \right) mV^2s^2 \\ &= \frac{3}{8}mV^2s^2. \end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$E'_A = \frac{3mV^2b^2}{8(R_A + R_B)^2}.$$

B için normal ve teğetsel hız bileşenleri birbirine diktir; bu nedenle

$$|\mathbf{v}'_B|^2 = V^2c^2 + \frac{V^2s^2}{36}.$$

Böylece

$$\begin{aligned}
E'_B &= \frac{1}{2}mV^2 \left(c^2 + \frac{s^2}{36} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mR_B^2 \right) \left(\frac{Vs}{3R_B} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2}mV^2 c^2 + \frac{1}{24}mV^2 s^2 \\
&= \frac{1}{2}mV^2 \left(1 - \frac{11s^2}{12} \right).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla,

$$E'_B = \frac{mV^2}{2} \left(1 - \frac{11b^2}{12(R_A + R_B)^2} \right).$$

Tutarlılığı kontrol etmek için toplam kinetik enerji kaybını hesaplayalım:

$$\frac{1}{2}mV^2 - (E'_A + E'_B) = \frac{mV^2 b^2}{12(R_A + R_B)^2} \geq 0.$$

Bu kayıp teğetsel sürtünmeden kaynaklanır; verilen esneklik koşulu yalnızca normal doğrultudaki bağlı hareket için geçerlidir. Merkezi bir çarpışmada, $b = 0$ olduğunda, A durur, B V hızını kazanır, iki disk de dönmez ve kinetik enerji kaybı olmaz.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.