

IPhO 1994

Теоретические задачи и решения · Пекин, Китай · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1994/

Задача 1: Релятивистская частица

В специальной теории относительности связь между энергией E и импульсом P свободной частицы с массой покоя m_0 имеет вид

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = mc^2$$

Когда на такую частицу действует консервативная сила, полная энергия частицы, равная сумме $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ и потенциальной энергии, сохраняется. Если энергия частицы очень велика, энергией покоя частицы можно пренебречь (такую частицу называют ультрарелятивистской).

1) Рассмотрите одномерное движение частицы очень высокой энергии (энергией покоя которой можно пренебречь) под действием центральной силы притяжения постоянного модуля f . Пусть в момент времени $t = 0$ частица находится в силовом центре и имеет начальный импульс p_0 . Опишите движение частицы, построив отдельно графики зависимости x от времени t и импульса p от пространственной координаты x как минимум за один период движения. Укажите координаты «точек поворота» через заданные параметры p_0 и f . Стрелками укажите направление движения на диаграмме (p, x) . Возможны короткие промежутки времени, в течение которых частица не является ультрарелятивистской. Однако ими следует пренебречь.

Используйте лист ответов 1.

2) Мезон — это частица, состоящая из двух кварков. Масса покоя M мезона равна полной энергии системы из двух кварков, делённой на c^2 .

Рассмотрите одномерную модель покоящегося мезона, в которой предполагается, что два кварка движутся вдоль оси x и притягиваются друг к другу с силой постоянного модуля f . Предполагается, что они могут свободно проходить друг сквозь друга. При анализе движения кварков высокой энергии их массой покоя можно пренебречь. В момент времени $t = 0$ оба кварка находятся в точке $x = 0$. Изобразите движение каждого из двух кварков отдельно на диаграммах (x, t) и (p, x) , укажите координаты «точек поворота» через M и f , укажите направление движения на диаграмме (p, x) и определите максимальное расстояние между двумя кварками.

Используйте лист ответов 2.

3) Систему отсчёта, использованную в части 2, будем обозначать S ; лабораторная система отсчёта, обозначаемая S' , движется в отрицательном направлении оси x с постоянной скоростью $v = 0.6c$. Координаты в двух системах отсчёта выбраны так, что точка $x = 0$ в S совпадает с точкой $x' = 0$ в S' в момент времени $t = t' = 0$. Изобразите движение двух кварков на диаграмме (x', t') . Укажите координаты точек поворота через M , f и c и определите максимальное расстояние между двумя кварками, наблюдаемое в лабораторной системе отсчёта S' .

Используйте лист ответов 3.

Координаты частицы, наблюдаемой в системах отсчёта S и S' , связаны преобразованием Лоренца

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + \beta ct), \\ t' = \gamma\left(t + \beta \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

где $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, а v — скорость движения системы отсчёта S относительно системы отсчёта S' .

4) Для мезона с энергией покоя $Mc^2 = 140 \text{ MeV}$ и скоростью $0.60c$ относительно лабораторной системы отсчёта S' определите его энергию E' в лабораторной системе отсчёта S'' .

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

1. Выберем $p_0 > 0$ и введём обозначения

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f}, \quad A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

График зависимости координаты от времени состоит из отрезков прямых, проходящих через точки

$$(t, x) : (0, 0) \rightarrow (\tau_0, A_0) \rightarrow (2\tau_0, 0) \rightarrow (3\tau_0, -A_0) \rightarrow (4\tau_0, 0).$$

Точки поворота — (τ_0, A_0) и $(3\tau_0, -A_0)$, а

$$T_1 = \frac{4p_0}{f}.$$

Если по горизонтали отложить x , а по вертикали — p , фазовая диаграмма представляет собой ромб, обходимый по часовой стрелке:

$$(x, p) : (0, p_0) \rightarrow (A_0, 0) \rightarrow (0, -p_0) \rightarrow (-A_0, 0) \rightarrow (0, p_0).$$

2. Введём обозначения

$$p_* = \frac{Mc}{2}, \quad \tau = \frac{Mc}{2f}, \quad a = \frac{Mc^2}{2f}.$$

Кварк 1 движется так, как описано в части 1, при $p_0 = p_*$; для кварка 2

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

Их координаты в моменты поворота равны

$$t = \tau : (x_1, x_2) = (a, -a), \quad t = 3\tau : (x_1, x_2) = (-a, a).$$

Обе фазовые траектории проходят по одному и тому же ромбу по часовой стрелке, начинаясь в противоположных вершинах на оси импульса. Таким образом,

$$\boxed{T = \frac{2Mc}{f}}, \quad \boxed{d_{\max} = \frac{Mc^2}{f}}.$$

3. Здесь $\gamma = 5/4$. В координатах $(t'/\tau, x'/a)$ соедините следующие вершины отрезками прямых:

$$\text{Кварк 1: } (0, 0) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (5, 3),$$

$$\text{Кварк 2: } (0, 0) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right) \rightarrow (5, 3).$$

Две внутренние вершины каждой траектории являются её точками поворота.

Последующие циклы повторяются со сдвигом $(\Delta t', \Delta x') = (5\tau, 3a)$. Максимальное расстояние между кварками, измеренное одновременно в лабораторной системе отсчёта, равно

$$\boxed{d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f}}.$$

4. Энергия мезона в лабораторной системе отсчёта равна

$$\boxed{E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = 175 \text{ MeV}}.$$

Решение

На приведённых ниже графиках зависимости координаты от времени время откладывается по горизонтали, а координата — по вертикали. На фазовых диаграммах по горизонтали откладывается x , а по вертикали — p . Лабораторная система отсчёта всюду обозначается S' .

1) Движение под действием центральной силы постоянного модуля

Выберем положительное направление оси x вдоль начального импульса, так что $p_0 > 0$. В ультрарелятивистском приближении

$$E_{\text{particle}} \simeq c|p|, \quad \dot{x} = \frac{pc^2}{E_{\text{particle}}} \simeq c \operatorname{sgn}(p).$$

Таким образом, между поворотами частица движется со скоростью c . В соответствии с условием короткими промежутками времени вблизи точек поворота, когда движение не является ультрарелятивистским, пренебрегаем.

Сила притяжения и соответствующая ей потенциальная энергия имеют вид

$$\dot{p} = -f \operatorname{sgn}(x), \quad U(x) = f|x|.$$

Закон сохранения энергии даёт

$$c|p| + f|x| = cp_0.$$

В точке поворота $p = 0$, поэтому максимальное смещение равно

$$A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

В начале движения $x > 0$, поэтому $p = p_0 - ft$. Первый поворот происходит через время

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f},$$

при $x = c\tau_0 = A_0$. Сила по-прежнему направлена к началу координат, поэтому частица возвращается с отрицательным импульсом. После прохождения начала координат сила меняет знак.

Один полный цикл:

t	x	p
0	0	p_0
τ_0	A_0	0
$2\tau_0$	0	$-p_0$
$3\tau_0$	$-A_0$	0
$4\tau_0$	0	p_0

Соедините точки, соответствующие указанным координатам, отрезками прямых. Наклон равен $+c$ до τ_0 , $-c$ от τ_0 до $3\tau_0$ и $+c$ после этого. Прохождение начала координат в момент $2\tau_0$ не является поворотом.

Следовательно,

$$T_1 = 4\tau_0 = \frac{4p_0}{f}.$$

Фазовая кривая непосредственно следует из закона сохранения энергии:

$$\frac{|x|}{A_0} + \frac{|p|}{p_0} = 1.$$

Это ромб с вершинами $(0, p_0)$, $(A_0, 0)$, $(0, -p_0)$ и $(-A_0, 0)$. Начинаясь в верхней вершине, движение идёт к правой вершине, затем к нижней, затем к левой и обратно к верхней: по часовой стрелке.

При отрицательном начальном импульсе следует изменить знаки как x , так и p ; в выражениях для амплитуды и периода используется $|p_0|$.

2) Два кварка в системе покоя мезона

Примем потенциальную энергию взаимодействия равной нулю при совпадении положений кварков. При расстоянии $r = |x_1 - x_2|$

$$U(r) = fr.$$

Поскольку мезон покоится, начальные импульсы кварков равны по модулю и противоположны по направлению. Обозначим кварк, первоначально движущийся вправо, как кварк 1:

$$p_1(0) = p_*, \quad p_2(0) = -p_*.$$

При $t = 0$ потенциальная энергия равна нулю. Поэтому из выражения для полной энергии получаем

$$Mc^2 = 2cp_*, \quad \boxed{p_* = \frac{Mc}{2}}.$$

В силу симметрии сохраняются соотношения

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

На каждый кварк действует сила модуля f , направленная к другому кварку, а значит, и к началу координат, пока кварки находятся на расстоянии друг от друга. Поэтому каждый из них движется так, как установлено в части 1, причём

$$\boxed{\tau = \frac{Mc}{2f}}, \quad \boxed{a = c\tau = \frac{Mc^2}{2f}}.$$

Уравнение для полной энергии подтверждает это:

$$Mc^2 = 2c|p_1| + f|x_1 - x_2| = 2(c|p_1| + f|x_1|).$$

Следующая таблица задаёт оба графика за один период:

t/τ	x_1/a	p_1/p_*	x_2/a	p_2/p_*
0	0	1	0	-1
1	1	0	-1	0
2	0	-1	0	1
3	-1	0	1	0
4	0	1	0	-1

Для построения графиков зависимости координаты от времени соедините точки, соответствующие координатам каждого кварка, отрезками прямых. Две треугольные кривые зеркально симметричны друг другу относительно $x = 0$, а кварки проходят друг сквозь друга при $t = 2\tau$.

Для каждой из фазовых диаграмм

$$\boxed{\frac{|x_i|}{a} + \frac{|p_i|}{p_*} = 1}.$$

Кварк 1 начинает движение в точке $(x, p) = (0, p_*)$, а кварк 2 — в точке $(0, -p_*)$. Оба обходят ромб по часовой стрелке.

В точках поворота кварки находятся в противоположных крайних положениях, поэтому

$$\boxed{d_{\max} = 2a = \frac{Mc^2}{f}}.$$

Период движения каждого из них равен

$$T = 4\tau = \frac{2Mc}{f}.$$

3) Движение и максимальное расстояние в лабораторной системе отсчёта

В заданном преобразовании

$$\beta = \frac{3}{5}, \quad \gamma = \frac{5}{4},$$

поэтому

$$\gamma(1 + \beta) = 2, \quad \gamma(1 - \beta) = \frac{1}{2}.$$

На участке со скоростью $u = \pm c$ преобразованная скорость равна

$$u' = \frac{u + \beta c}{1 + \beta u/c} = \pm c.$$

Таким образом, все участки траекторий в лабораторной системе отсчёта также имеют наклон $+c$ или $-c$. Их концы получим, преобразуя координаты событий поворота.

Например, первый поворот кварка 1 происходит при $(t, x) = (\tau, a)$, где $a = c\tau$. Поэтому

$$t' = \gamma\tau(1 + \beta) = 2\tau, \quad x' = \gamma a(1 + \beta) = 2a.$$

Все четыре события поворота за один цикл:

Событие поворота	t'	x'
Кварк 2, первый поворот	$\frac{\tau}{2} = \frac{Mc}{4f}$	$-\frac{a}{2} = -\frac{Mc^2}{4f}$
Кварк 1, первый поворот	$2\tau = \frac{Mc}{f}$	$2a = \frac{Mc^2}{f}$
Кварк 1, второй поворот	$3\tau = \frac{3Mc}{2f}$	$a = \frac{Mc^2}{2f}$
Кварк 2, второй поворот	$\frac{9\tau}{2} = \frac{9Mc}{4f}$	$\frac{7a}{2} = \frac{7Mc^2}{4f}$

Обе траектории начинаются в точке $(t', x') = (0, 0)$. Пересечение в системе покоя при $(t, x) = (2\tau, 0)$ преобразуется в

$$(t', x') = \left(\frac{5\tau}{2}, \frac{3a}{2} \right).$$

Конец цикла в системе покоя, $(4\tau, 0)$, преобразуется в

$$(t', x') = (5\tau, 3a).$$

Эти точки и таблица точек поворота полностью задают графики в лабораторной системе отсчёта: соедините последовательные точки для каждого кварка отрезками прямых.

Последующие циклы повторяются при сдвиге обеих кривых на

$$\Delta t' = 5\tau = \gamma T, \quad \Delta x' = 3a.$$

Чтобы найти наблюдаемое расстояние, координаты обоих кварков необходимо вычислить в **один и тот же момент лабораторного времени**:

$$d'(t') = |x'_1(t') - x'_2(t')|.$$

Вначале

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = -ct',$$

поэтому расстояние растёт как $2ct'$. Кварк 2 поворачивает первым, при $t' = \tau/2$. В этот момент

$$x'_1 = \frac{a}{2}, \quad x'_2 = -\frac{a}{2},$$

и, следовательно, $d' = a$.

От $t' = \tau/2$ до $t' = 2\tau$ оба кварка движутся вправо со скоростью c :

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = ct' - a.$$

Поэтому расстояние между ними остаётся равным a . Затем оно уменьшается до нуля при $5\tau/2$, снова увеличивается до a при 3τ , остаётся равным a до $9\tau/2$ и уменьшается до нуля при 5τ .

Далее эта последовательность повторяется.

Таким образом,

$$d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f} = \frac{1}{2} d_{\max}.$$

Различие моментов поворота в лабораторной системе отсчёта существенно: два события поворота, одновременные в системе покоя, не являются одновременными в лабораторной системе.

4) Энергия мезона в лабораторной системе отсчёта

Для мезона в целом полный импульс в системе покоя равен нулю, а полная энергия равна Mc^2 . Преобразование энергии даёт

$$E' = \gamma(E + \beta cP_x) = \gamma Mc^2.$$

При заданных значениях

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = \frac{1}{0.80} = 1.25,$$

и, следовательно,

$$E' = 1.25(140 \text{ MeV}) = 175 \text{ MeV}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Сверхпроводящий магнит

Сверхпроводящие магниты широко используются в лабораториях. Наиболее распространённый тип сверхпроводящего магнита — соленоид из сверхпроводящего провода. Замечательное свойство сверхпроводящего магнита состоит в том, что он создаёт сильные магнитные поля без потерь энергии на джоулево нагревание, поскольку электрическое сопротивление сверхпроводящего провода обращается в нуль при погружении магнита в жидкий гелий с температурой 4.2 К. Обычно магнит снабжён специально сконструированным сверхпроводящим переключателем, как показано на рис. 1. Сопротивлением r переключателя можно управлять: либо $r = 0$ в сверхпроводящем

состоянии, либо $r = r_n$ в нормальном состоянии. В режиме незатухающего тока ток циркулирует через магнит и сверхпроводящий переключатель неограниченно долго. Режим незатухающего тока позволяет длительное время поддерживать постоянное магнитное поле при отключённом внешнем источнике.

Подробности устройства сверхпроводящего переключателя на рис. 1 не показаны. Обычно он представляет собой небольшой отрезок сверхпроводящего провода, обмотанный нагревательной проволокой и надлежащим образом теплоизолированный от ванны с жидким гелием. При нагревании температура сверхпроводящего провода повышается, и он возвращается в нормальное состояние с ненулевым сопротивлением. Типичное значение r_n составляет несколько ом. Здесь будем считать его равным $5\ \Omega$. Индуктивность сверхпроводящего магнита зависит от его размеров; примем её равной $10\ \text{H}$ для магнита на рис. 1. Полный ток I можно изменять, регулируя сопротивление R .

Решение этой задачи будет оцениваться только по графикам!

Стрелки указывают положительные направления токов I , I_1 и I_2 .

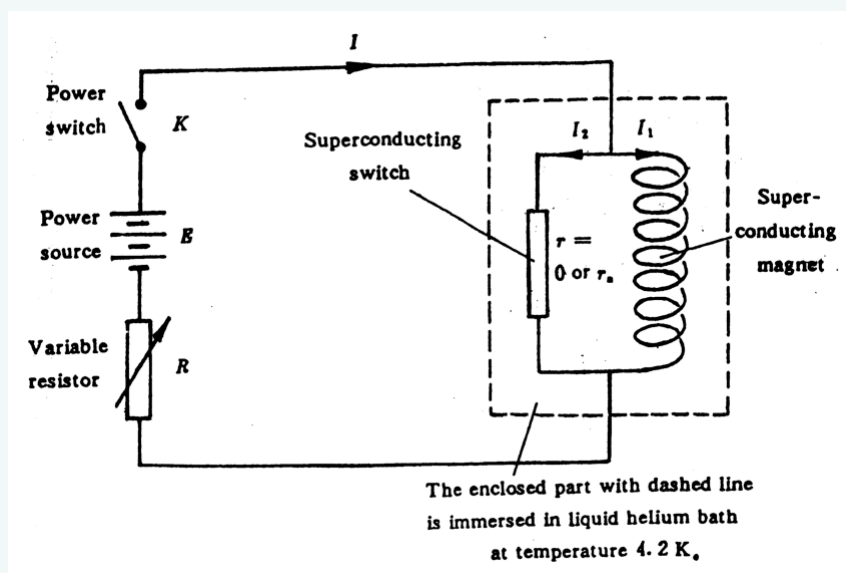


Рис. 1

1) Если полный ток I и сопротивление r сверхпроводящего переключателя изменяются со временем так, как показано соответственно на рис. 2а и 2б, и если вначале токи I_1 и I_2 , протекающие соответственно через магнит и переключатель, равны (рис. 2с и рис. 2д), то как они изменяются со временем от t_1 до t_4 ? Изобразите ответ графически на рис. 2с и рис. 2д.

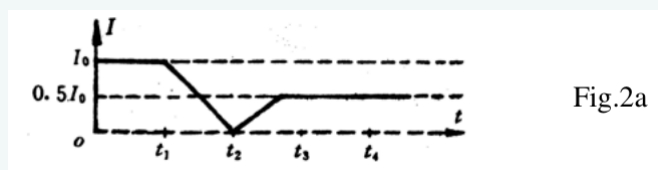
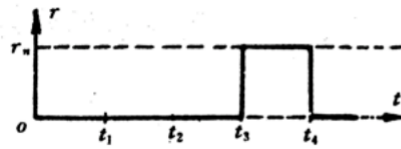
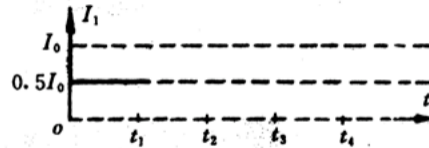


Рис. 2а



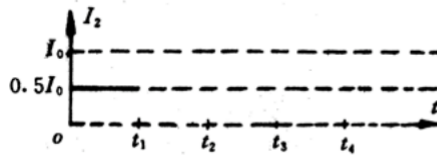
2b

2b



2c

2c



2d

2d

2) Предположим, что ключ питания K замыкают в момент $t = 0$, когда $r = 0$, $I_1 = 0$ и $R = 7.5 \Omega$, а полный ток I равен 0.5 A . При замкнутом ключе K сопротивление r сверхпроводящего переключателя изменяют так, как показано на рис. 3b. Постройте соответствующие зависимости I , I_1 и I_2 от времени на рис. 3a, 3c и 3d соответственно.

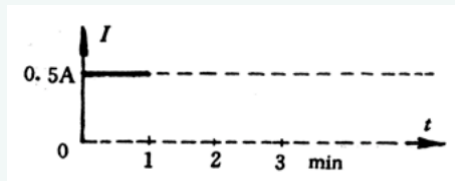
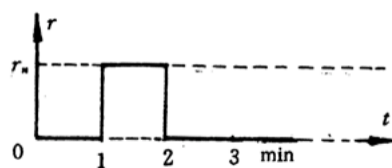
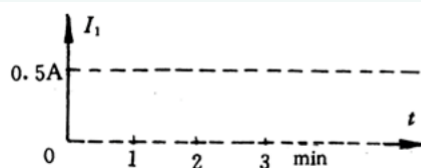


Рис. 3a



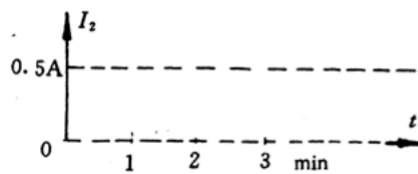
3b

3b



3c

3c



3d

3d

3) Через сверхпроводящий переключатель в нормальном состоянии допускается пропускать только малые токи, менее 0.5 А; при больших токах переключатель перегорит. Предположим, что сверхпроводящий магнит работает в режиме незатухающего тока, то есть $I = 0$, а $I_1 = i_1$ (например, 20 А), $I_2 = -i_1$, как показано на рис. 4, от $t = 0$ до $t = 3\text{min}$. Если эксперимент нужно завершить, уменьшив ток через магнит до нуля, как вы это сделаете? Это необходимо выполнить в несколько этапов. Постройте соответствующие изменения I , r , I_1 и I_2 на рис. 4.

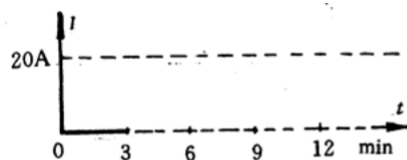
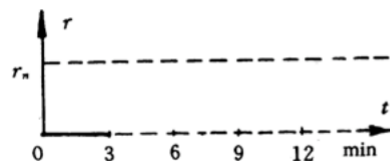


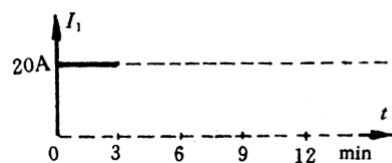
Fig. 4a

Рис. 4a



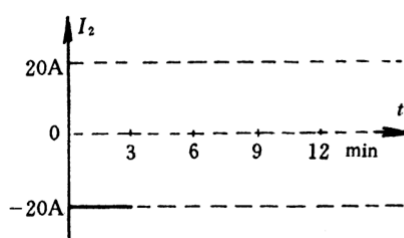
4b

4b



4c

4c



4d

4d

4) Предположим, что магнит работает в режиме незатухающего тока с током 20 А (от $t = 0$ до $t = 3\text{min}$, см. рис. 5). Как перевести его в режим незатухающего тока с током 30 А? Изобразите ответ графически на рис. 5.

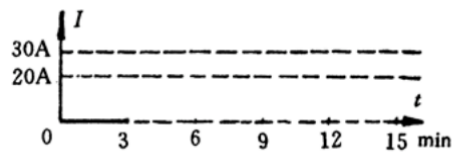
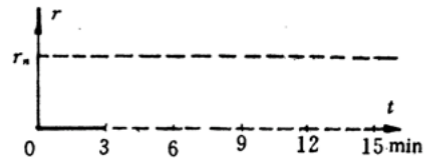


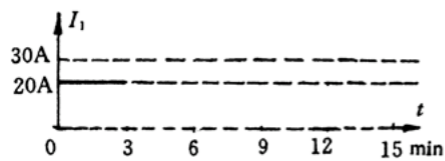
Fig. 5a

Рис. 5а



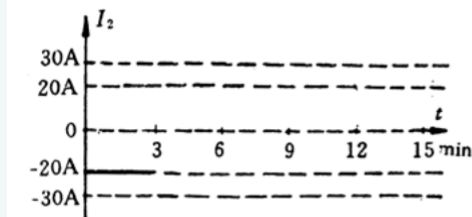
5b

5b



5c

5c



5d

5d

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

1. На протяжении всей заданной последовательности изменений

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

Таким образом, I_2 линейно убывает от $+I_0/2$ в момент t_1 до $-I_0/2$ в момент t_2 , линейно возрастает до нуля к моменту выхода I на постоянный уровень и остаётся равным нулю в моменты t_3 и t_4 и между ними.

2. ЭДС источника равна 3.75 V . Вначале

$$(I, I_1, I_2) = (0.50, 0, 0.50) \text{ A}.$$

В момент 1 min токи I и I_2 скачком уменьшаются до 0.30 A , тогда как I_1 остаётся равным нулю. Затем токи экспоненциально приближаются к значениям $(0.50, 0.50, 0) \text{ A}$ с постоянной времени

$$\tau_R = \frac{10}{3} \text{ s} \approx 3.33 \text{ s}.$$

После 2 min имеем $I = 0.50 \text{ A}$, ток I_1 постоянен, а $I_2 \approx 0$. Точные выражения приведены ниже.

3. При $r = 0$ сначала увеличьте I от нуля до 20 A , сохраняя $I_1 = 20 \text{ A}$. Затем установите $r = 5 \Omega$, медленно уменьшите I до нуля и разомкните K . Оставшийся ток магнита экспоненциально затухает с постоянной времени 2.0 s . Приведённое ниже конкретное линейное изменение за три минуты обеспечивает

$$|I_2| < 0.223 \text{ A} < 0.5 \text{ A}$$

на всём протяжении нормального состояния.

4. Сначала установите $I = I_1 = 20 \text{ A}$ при $r = 0$. Установите $r = 5 \Omega$ и увеличьте I_1 до 30 A , поддерживая $I_2 = 1/9 \text{ A}$ в течение трёхминутного линейного нарастания. Затем установите $I = 30 \text{ A}$, охладите переключатель до состояния $r = 0$ и уменьшите I до нуля. Конечное состояние с незатухающим током имеет вид

$$I = 0, \quad I_1 = 30 \text{ A}, \quad I_2 = -30 \text{ A}, \quad r = 0.$$

Решение

Будем рассматривать магнит как идеальную катушку с постоянной индуктивностью $L = 10 \text{ H}$. Пренебрежём сопротивлением соединительных проводов, паразитной индуктивностью и временем переключения, как это подразумевается в условии.

При указанных направлениях токов первый закон Кирхгофа даёт

$$I = I_1 + I_2.$$

Напряжения на выводах магнита и сверхпроводящего переключателя одинаковы:

$$V = L \frac{dI_1}{dt} = rI_2.$$

Поэтому основное уравнение имеет вид

$$L \frac{dI_1}{dt} = r(I - I_1).$$

При $r = 0$ ток магнита постоянен. Изменения тока источника тогда целиком приходятся на сверхпроводящий переключатель:

$$\frac{dI_1}{dt} = 0, \quad I_2 = I - I_1.$$

При $r = r_n$ и заданном полном токе уравнение принимает вид

$$\tau \frac{dI_1}{dt} + I_1 = I, \quad \boxed{\tau = \frac{L}{r_n} = 2.0 \text{ s.}}$$

Ток через катушку остаётся непрерывным в моменты переключения; I и I_2 могут изменяться скачком.

1) Заданные полный ток и сопротивление переключателя

Вначале токи в двух ветвях равны, поэтому

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2}.$$

До t_3 переключатель находится в сверхпроводящем состоянии. Следовательно,

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

К моменту t_3 заданный ток достигает $I_0/2$. Поэтому $I_2 = 0$, когда переключатель приобретает ненулевое сопротивление. При $t_3 < t < t_4$

$$L \frac{dI_1}{dt} = r_n \left(\frac{I_0}{2} - I_1 \right) = 0.$$

Следовательно, токи остаются неизменными. Возвращение переключателя в состояние $r = 0$ в момент t_4 также не вызывает изменений.

Искомые графики имеют следующий вид:

- **Рис. 2с:** горизонтальная прямая на уровне $I_1 = I_0/2$ на всём интервале времени.
- **Рис. 2д:** горизонтальная прямая на уровне $I_0/2$ до t_1 , за которой следует линейное убывание до $-I_0/2$ в момент t_2 . График пересекает нулевую линию посередине между t_1 и t_2 . Затем ток линейно возрастает до нуля к моменту достижения заданным током I значения $I_0/2$ и остаётся нулевым в моменты t_3, t_4 , между ними и далее.

Отрицательную часть графика на рис. 2д необходимо провести ниже исходной нулевой оси.

2) Постоянное сопротивление в цепи источника

Обозначим ЭДС источника через $\mathcal{E}$. Вначале $r = 0$, поэтому напряжение на параллельно соединённых элементах равно нулю:

$$\mathcal{E} = RI = (7.5 \Omega)(0.50 \text{ A}) = \boxed{3.75 \text{ V}}.$$

При $0 \leq t < 60 \text{ s}$ ток магнита сохраняет своё начальное нулевое значение:

$$\boxed{I = 0.50 \text{ A}, \quad I_1 = 0, \quad I_2 = 0.50 \text{ A}.}$$

В момент $t = 60 \text{ s}$ переключатель приобретает ненулевое сопротивление. Поскольку I_1 не может измениться скачком, сразу после переключения он остаётся равным нулю, откуда

$$I(60^+) = I_2(60^+) = \frac{\mathcal{E}}{R + r_n} = \frac{3.75}{12.5} = \boxed{0.30 \text{ A}}.$$

На интервале нормального состояния второй закон Кирхгофа даёт

$$\mathcal{E} = R(I_1 + I_2) + r_n I_2,$$

и поэтому

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - RI_1}{R + r_n}.$$

Объединяя это соотношение с уравнением для катушки, получаем

$$L \frac{dI_1}{dt} = \frac{r_n R}{R + r_n} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_1 \right).$$

Таким образом,

$$\tau_R = \frac{L(R + r_n)}{Rr_n} = \frac{10(7.5 + 5)}{7.5(5)} \text{ s} = \frac{10}{3} \text{ s}.$$

При $60 \leq t < 120$ s введём

$$x = \frac{t - 60 \text{ s}}{\tau_R}.$$

Токи равны

$$\begin{aligned} I_1(t) &= (0.50 \text{ A})(1 - e^{-x}), \\ I_2(t) &= (0.30 \text{ A})e^{-x}, \\ I(t) &= 0.50 \text{ A} - (0.20 \text{ A})e^{-x}. \end{aligned}$$

В момент $t = 120$ s имеем $x = 18$, и переключатель возвращается в состояние $r = 0$. Ток источника становится равным $\mathcal{E}/R = 0.50 \text{ A}$, а ток магнита фиксируется на достигнутом значении. Поэтому для всех $t \geq 120$ s

$$\begin{aligned} I &= 0.50 \text{ A}, \\ I_1 &= (0.50 \text{ A})(1 - e^{-18}), \\ I_2 &= (0.50 \text{ A})e^{-18} \approx 7.6 \text{ nA}. \end{aligned}$$

Особенности графиков:

- **Рис. 3а:** $I = 0.50 \text{ A}$ до первой минуты; вертикальный спад до 0.30 A ; затем экспоненциальное возрастание к 0.50 A с уменьшающимся наклоном.
- **Рис. 3с:** $I_1 = 0$ до первой минуты; затем непрерывное экспоненциальное возрастание к 0.50 A с уменьшающимся наклоном. В момент двух минут ток становится строго постоянным.
- **Рис. 3д:** $I_2 = 0.50 \text{ A}$ до первой минуты; вертикальный спад до 0.30 A ; затем экспоненциальное затухание к нулю.

В момент двух минут токи I и I_2 испытывают скачки вверх всего примерно на 3.0 nA , незаметные в предложенном масштабе. Все видимые переходные процессы занимают лишь малую долю минуты.

3) Уменьшение незатухающего тока до нуля

Ограничение на ток относится к модулю тока через переключатель в нормальном состоянии:

$$|I_2| < 0.5 \text{ A}.$$

Поскольку

$$I_2 = \frac{L}{r_n} \frac{dI_1}{dt},$$

это требует

$$\left| \frac{dI_1}{dt} \right| < \frac{r_n}{L} (0.5 \text{ A}) = 0.25 \text{ A s}^{-1}.$$

Если сразу нагреть переключатель в исходном состоянии с незатухающим током, через него будет протекать 20 А. Сначала необходимо передать его ток внешнему источнику, пока переключатель ещё находится в сверхпроводящем состоянии.

Приведём один конкретный порядок действий для примера с током 20 А.

От 0 до 3 мин: сохраняем заданное состояние с незатухающим током:

$$I = 0, \quad r = 0, \quad I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = -20 \text{ A}.$$

От 3 до 6 мин: сохраняем $r = 0$, замыкаем K при достаточно большом R и линейно увеличиваем I от нуля до 20 А. Тогда

$$I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = I - 20 \text{ A}.$$

Таким образом, I_2 линейно возрастает от -20 A до нуля. К шестой минуте источник обеспечивает весь ток магнита.

От 6 до 9 мин: устанавливаем $r = r_n = 5 \Omega$ и линейно уменьшаем полный ток от 20 А до нуля.

Пусть

$$u = t - 360 \text{ s}, \quad T = 180 \text{ s}, \quad a = \frac{20 \text{ A}}{T} = \frac{1}{9} \text{ A s}^{-1}.$$

На этом интервале

$$I = 20 \text{ A} - au.$$

Решая $\tau \dot{I}_1 + I_1 = I$ при $I_1(0) = 20 \text{ A}$, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= 20 \text{ A} - au + a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \\ I_2 &= -a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \end{aligned} \quad \tau = 2.0 \text{ s}.$$

Следовательно,

$$|I_2| \leq a\tau = \frac{2}{9} \text{ A} \approx 0.222 \text{ A} < 0.5 \text{ A}.$$

Ток магнита следует за убывающим током источника, оставаясь немного выше него.

В момент 9 мин и далее: ток источника достиг нуля. Размыкаем K , оставляя переключатель в нормальном состоянии. Оставшийся ток магнита равен

$$D = \frac{2}{9}(1 - e^{-90}) \text{ A} \approx 0.222 \text{ A}.$$

Он циркулирует через магнит и переключатель в нормальном состоянии и затухает по закону

$$I = 0, \quad I_1 = De^{-(t-540 \text{ s})/\tau}, \quad I_2 = -De^{-(t-540 \text{ s})/\tau}.$$

Ещё через 10 s имеем $I_1 \approx 1.5 \text{ mA}$, и ток продолжает стремиться к нулю.

Таким образом, полные графики на рис. 4 имеют следующий вид:

График	Требуемая форма
4a: I	Нуль до 3 мин; линейный рост до 20 А к 6 мин; линейное убывание до нуля к 9 мин; далее нуль.
4b: r	Нуль до 6 мин; скачок до 5 Ω ; переключатель остаётся в нормальном состоянии в течение заключительного затухания тока.
4c: I_1	20 А до 6 мин; плавный переход к почти линейному убыванию с достижением примерно 0.222 А к 9 мин; затем экспоненциальное затухание до нуля.
4d: I_2	–20 А до 3 мин; линейный рост до нуля к 6 мин; ток становится слегка отрицательным, приближаясь к –0.222 А; после 9 мин экспоненциально возвращается к нулю со стороны отрицательных значений.

Как и при любом затухании тока в пассивной RL -цепи, точное нулевое значение достигается лишь асимптотически. На графике с минутным масштабом заключительный участок затухания неотличим от нуля. Возвращение переключателя в состояние $r = 0$ до затухания этого остаточного тока привело бы к его сохранению.

Для другого начального i_1 применим тот же порядок действий при достаточно медленном изменении тока, чтобы соблюдалось ограничение 0.25 A s^{-1} .

4) Изменение незатухающего тока от 20 А до 30 А

Снова сначала уравниваем ток источника с имеющимся током магнита, прежде чем нагревать переключатель.

Можно выбрать строго линейное нарастание тока магнита в течение трёх минут:

$$\alpha = \frac{30 - 20}{180} \text{ A s}^{-1} = \frac{1}{18} \text{ A s}^{-1}.$$

Необходимый ток переключателя во время этого нарастания равен

$$\delta = \frac{L}{r_n} \alpha = \frac{1}{9} \text{ A} \approx 0.111 \text{ A},$$

что значительно ниже предельного значения для нормального состояния.

Чтобы в точности получить такое нарастание, зададим

$$I = I_1 + \delta.$$

При $u = t - 360 \text{ s}$, $0 < u < 180 \text{ s}$,

$$I_1 = 20 \text{ A} + \alpha u, \quad I_2 = \delta, \quad I = 20 \text{ A} + \alpha u + \delta.$$

Действительно, $r_n I_2 = r_n \delta = L \alpha = L dI_1/dt$.

Полная последовательность действий, определяющая все четыре графика:

Время (мин)	I (А), рис. 5a	r (Ω), рис. 5b	I_1 (А), рис. 5c	I_2 (А), рис. 5d
0–3	0	0	20	–20
3–6	Линейно $0 \rightarrow 20$	0	20	Линейно $-20 \rightarrow 0$
6–9	Линейно $20 + \delta \rightarrow 30 + \delta$	5	Линейно $20 \rightarrow 30$	$\delta = 1/9$
9–12	30	5	30	0
12–15	Линейно $30 \rightarrow 0$	0	30	Линейно $0 \rightarrow -30$

Время (мин)	I (А), рис. 5а	r (Ω), рис. 5b	I_1 (А), рис. 5с	I_2 (А), рис. 5d
После 15	0	0	30	-30

Здесь численное значение δ в таблице выражено в амперах.

Подробности переключения существенны:

- **В момент 6 мин:** $I = I_1 = 20$ А, поэтому $I_2 = 0$. Переводим переключатель в нормальное состояние, затем увеличиваем I на малую величину δ . Это запускает линейное нарастание тока магнита без скачка I_1 .
- **В момент 9 мин:** I_1 достиг в точности 30 А. Уменьшаем I от $30 + \delta$ до 30 А. Тогда $I_2 = 0$, поэтому ток магнита остаётся постоянным.
- **В момент 12 мин:** возвращаем переключатель в состояние $r = 0$. Уменьшаем I до нуля за следующие три минуты. Ток магнита остаётся равным 30 А, а I_2 принимает всё более отрицательные значения.
- **В момент 15 мин:** размыкаем K . Через магнит и сверхпроводящий переключатель протекают равные по модулю и противоположно направленные токи величиной 30 А.

Таким образом, на рис. 5а имеются небольшие скачки на 0.111 А в моменты 6 и 9 мин. На рис. 5d имеется небольшой положительный прямоугольный импульс в интервале 6–9 мин. Большие отрицательные токи через переключатель возникают только при $r = 0$, поэтому они не нарушают указанного ограничения для нормального состояния.

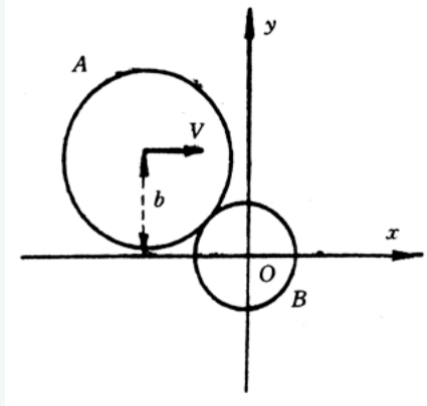
Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 3: Столкновение дисков с трением между их поверхностями

Однородный диск А массой m и радиусом R_A движется поступательно по гладкой горизонтальной плоскости x - y в направлении x со скоростью V (см. рисунок на следующей странице). Центр диска находится на расстоянии b от оси x . Он сталкивается с неподвижным однородным диском В, центр которого первоначально расположен в начале координат. Диск В имеет такую же массу и такую же толщину, как А, но его радиус равен R_B . Предполагается, что после столкновения скорости дисков в точке их соприкосновения в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей их центры, равны. Также предполагается, что модули относительных скоростей дисков вдоль линии, соединяющей их центры, одинаковы до и после столкновения.

1) Для такого столкновения определите компоненты X и Y скоростей обоих дисков после столкновения, т. е. V'_{AX} , V'_{AY} , V'_{BX} и V'_{BY} , через m , R_A , R_B , V и b .

2) Определите кинетические энергии E'_A диска А и E'_B диска В после столкновения через m , R_A , R_B , V и b .



Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Пусть $D = R_A + R_B$. Для столкновения $0 \leq b < D$, причём A находится выше оси x , как показано на рисунке.

1. Компоненты скоростей равны

$$V'_{AX} = \frac{5Vb^2}{6D^2}, \quad V'_{AY} = \frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2},$$

$$V'_{BX} = V \left(1 - \frac{5b^2}{6D^2} \right), \quad V'_{BY} = -\frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2}.$$

2. С учётом как поступательного, так и вращательного движения,

$$E'_A = \frac{3mV^2b^2}{8D^2}, \quad E'_B = \frac{mV^2}{2} \left(1 - \frac{11b^2}{12D^2} \right).$$

Решение

1) Скорости после столкновения

Будем считать столкновение мгновенным, так что линия, соединяющая центры, остаётся неподвижной во время удара. Гладкая горизонтальная плоскость не сообщает дискам ни горизонтального импульса силы, ни импульса момента силы относительно вертикальной оси. Первоначально ни один из дисков не вращается.

Введём обозначения

$$s = \frac{b}{D}, \quad c = \sqrt{1 - s^2}, \quad D = R_A + R_B.$$

В момент первого соприкосновения центр A находится в точке $(-Dc, b)$, а центр B — в начале координат. Следовательно, единичные векторы вдоль линии от A к B и перпендикулярно ей имеют вид

$$\mathbf{n} = (c, -s), \quad \mathbf{t} = (s, c).$$

Начальная скорость А равна

$$\mathbf{v}_A = Vc\mathbf{n} + Vs\mathbf{t}.$$

Пусть импульс силы, действующей на В, равен

$$\mathbf{J} = J_n\mathbf{n} + J_t\mathbf{t}.$$

Импульс силы, действующей на А, равен $-\mathbf{J}$. Тогда по теореме об изменении импульса

$$\begin{aligned} v'_{An} &= Vc - \frac{J_n}{m}, & v'_{Bn} &= \frac{J_n}{m}, \\ v'_{At} &= Vs - \frac{J_t}{m}, & v'_{Bt} &= \frac{J_t}{m}. \end{aligned}$$

Нормальная относительная скорость меняет направление на противоположное, сохраняя свой модуль: до удара диски сближаются, а после него удаляются друг от друга. Следовательно,

$$v'_{Bn} - v'_{An} = Vc,$$

откуда

$$\frac{2J_n}{m} - Vc = Vc \implies J_n = mVc.$$

Таким образом,

$$\boxed{v'_{An} = 0, \quad v'_{Bn} = Vc}.$$

Чтобы определить тангенциальный импульс силы, необходимо учесть вращение. Моменты инерции равны

$$I_A = \frac{1}{2}mR_A^2, \quad I_B = \frac{1}{2}mR_B^2.$$

Примем угловую скорость вращения против часовой стрелки за положительную. Радиус-векторы точек соприкосновения относительно центров А и В равны соответственно $R_A\mathbf{n}$ и $-R_B\mathbf{n}$. По теореме об изменении момента импульса

$$I_A\omega'_A = -R_AJ_t, \quad I_B\omega'_B = -R_BJ_t.$$

Следовательно,

$$\omega'_A = -\frac{2J_t}{mR_A}, \quad \omega'_B = -\frac{2J_t}{mR_B}.$$

Тангенциальные скорости материальных точек, находящихся в соприкосновении, равны

$$\begin{aligned} u'_{At} &= v'_{At} + R_A\omega'_A = Vs - \frac{3J_t}{m}, \\ u'_{Bt} &= v'_{Bt} - R_B\omega'_B = \frac{3J_t}{m}. \end{aligned}$$

Заданное в условии равенство этих скоростей требует, чтобы

$$Vs - \frac{3J_t}{m} = \frac{3J_t}{m},$$

откуда получаем

$$\boxed{J_t = \frac{mVs}{6}}.$$

Таким образом,

$$\boxed{v'_{At} = \frac{5}{6}Vs, \quad v'_{Bt} = \frac{1}{6}Vs},$$

а угловые скорости, необходимые для пункта 2, равны

$$\boxed{\omega'_A = -\frac{Vs}{3R_A}, \quad \omega'_B = -\frac{Vs}{3R_B}}.$$

При показанном на рисунке расположении оба диска вращаются по часовой стрелке.

Возвращаясь к декартовым координатам, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_A &= \frac{5}{6}Vs \mathbf{t} = \left(\frac{5}{6}Vs^2, \frac{5}{6}Vsc \right), \\ \mathbf{v}'_B &= Vc \mathbf{n} + \frac{1}{6}Vs \mathbf{t} = \left(V \left(c^2 + \frac{s^2}{6} \right), -\frac{5}{6}Vsc \right). \end{aligned}$$

Используя $c^2 = 1 - s^2$, $s = b/D$ и $c = \sqrt{D^2 - b^2}/D$, получаем четыре компоненты, приведённые в разделе «Ответы». Их суммы удовлетворяют закону сохранения импульса:

$$V'_{AX} + V'_{BX} = V, \quad V'_{AY} + V'_{BY} = 0.$$

2) Кинетические энергии после столкновения

Кинетическая энергия каждого диска включает энергию поступательного движения его центра и энергию вращения относительно его центра:

$$E'_i = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'_i|^2 + \frac{1}{2}I_i(\omega'_i)^2.$$

Для А

$$\begin{aligned} E'_A &= \frac{1}{2}m \left(\frac{5}{6}Vs \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mR_A^2 \right) \left(\frac{Vs}{3R_A} \right)^2 \\ &= \left(\frac{25}{72} + \frac{1}{36} \right) mV^2s^2 \\ &= \frac{3}{8}mV^2s^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\boxed{E'_A = \frac{3mV^2b^2}{8(R_A + R_B)^2}}.$$

Для В нормальная и тангенциальная составляющие скорости перпендикулярны, поэтому

$$|\mathbf{v}'_B|^2 = V^2c^2 + \frac{V^2s^2}{36}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
 E'_B &= \frac{1}{2}mV^2 \left(c^2 + \frac{s^2}{36} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mR_B^2 \right) \left(\frac{Vs}{3R_B} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2}mV^2 c^2 + \frac{1}{24}mV^2 s^2 \\
 &= \frac{1}{2}mV^2 \left(1 - \frac{11s^2}{12} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\boxed{E'_B = \frac{mV^2}{2} \left(1 - \frac{11b^2}{12(R_A + R_B)^2} \right)}.$$

Для проверки согласованности результатов найдём полную потерю кинетической энергии:

$$\frac{1}{2}mV^2 - (E'_A + E'_B) = \boxed{\frac{mV^2 b^2}{12(R_A + R_B)^2}} \geq 0.$$

Эта потеря обусловлена тангенциальной силой трения; заданное условие упругости относится только к нормальному относительному движению. При центральном столкновении, $b = 0$, А останавливается, В приобретает скорость V , ни один из дисков не вращается, и потери кинетической энергии нет.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.