

IPhO 1994

Problemas teóricos y soluciones · Pekín, China · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1994/

Problema 1: Partícula relativista

En la teoría de la relatividad especial, la relación entre la energía E y el momento lineal P de una partícula libre de masa en reposo m_0 es

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = mc^2$$

Cuando una partícula de este tipo está sometida a una fuerza conservativa, se conserva su energía total, que es la suma de $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ y la energía potencial. Si la energía de la partícula es muy elevada, puede despreciarse su energía en reposo (una partícula de este tipo se denomina partícula ultrarrelativista).

1) Considere el movimiento unidimensional de una partícula de energía muy elevada (cuya energía en reposo puede despreciarse) sometida a una fuerza central atractiva de módulo constante f . Suponga que la partícula se encuentra en el centro de fuerzas con un momento lineal inicial p_0 en el instante $t = 0$. Describa el movimiento de la partícula representando por separado, durante al menos un período del movimiento: x en función del tiempo t , y el momento lineal p en función de la coordenada espacial x . Especifique las coordenadas de los «puntos de retorno» en función de los parámetros dados p_0 y f . Indique mediante flechas el sentido en que transcurre el movimiento en el diagrama (p, x) . Puede haber intervalos breves de tiempo durante los cuales la partícula no sea ultrarrelativista. Sin embargo, deben despreciarse.

Utilice la hoja de respuestas 1.

2) Un mesón es una partícula formada por dos quarks. La masa en reposo M del mesón es igual a la energía total del sistema de dos quarks dividida por c^2 .

Considere un modelo unidimensional de un mesón en reposo, en el que se supone que los dos quarks se mueven a lo largo del eje x y se atraen con una fuerza de módulo constante f . Se supone que pueden atravesarse libremente. Para analizar el movimiento de alta energía de los quarks, puede despreciarse su masa en reposo. En el instante $t = 0$, ambos quarks se encuentran en $x = 0$. Represente gráficamente por separado el movimiento de los dos quarks mediante un diagrama (x, t) y un diagrama (p, x) , especifique las coordenadas de los «puntos de retorno» en función de M y f , indique el sentido en que transcurre el movimiento en su diagrama (p, x) y determine la distancia máxima entre los dos quarks.

Utilice la hoja de respuestas 2.

3) El sistema de referencia utilizado en la parte 2 se denominará sistema S ; el sistema de laboratorio, denominado S' , se mueve en el sentido negativo del eje x con una velocidad constante $v = 0.6c$. Las coordenadas de los dos sistemas de referencia se eligen de modo que el punto $x = 0$ de S coincida con el punto $x' = 0$ de S' en el instante $t = t' = 0$. Represente gráficamente el movimiento de los dos quarks en un diagrama (x', t') . Especifique las coordenadas de los puntos de retorno en función de M , f y c , y determine la distancia máxima entre los dos quarks observada en el sistema de laboratorio S' .

Utilice la hoja de respuestas 3.

Las coordenadas de una partícula observada en los sistemas de referencia S y S' están relacionadas por la transformación de Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + \beta ct), \\ t' = \gamma\left(t + \beta \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

donde $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ y v es la velocidad con la que se mueve el sistema S respecto al sistema S' .

4) Para un mesón con energía en reposo $Mc^2 = 140 \text{ MeV}$ y velocidad $0.60c$ respecto al sistema de laboratorio S' , determine su energía E' en el sistema de laboratorio S' .

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

1. Elija $p_0 > 0$ y defina

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f}, \quad A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

La gráfica de posición en función del tiempo consta de segmentos rectos que pasan por

$$(t, x) : (0, 0) \rightarrow (\tau_0, A_0) \rightarrow (2\tau_0, 0) \rightarrow (3\tau_0, -A_0) \rightarrow (4\tau_0, 0).$$

Los puntos de retorno son (τ_0, A_0) y $(3\tau_0, -A_0)$, y

$$T_1 = \frac{4p_0}{f}.$$

Con x en el eje horizontal y p en el vertical, el diagrama de fases es el rombo recorrido en sentido horario

$$(x, p) : (0, p_0) \rightarrow (A_0, 0) \rightarrow (0, -p_0) \rightarrow (-A_0, 0) \rightarrow (0, p_0).$$

2. Defina

$$p_* = \frac{Mc}{2}, \quad \tau = \frac{Mc}{2f}, \quad a = \frac{Mc^2}{2f}.$$

El quark 1 sigue el movimiento de la parte 1 con $p_0 = p_*$; para el quark 2 se cumple

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

Sus posiciones en los instantes de retorno son

$$t = \tau : (x_1, x_2) = (a, -a), \quad t = 3\tau : (x_1, x_2) = (-a, a).$$

Ambas trayectorias de fase recorren el mismo rombo en sentido horario, partiendo de vértices opuestos del eje del momento lineal. Por tanto,

$$\boxed{T = \frac{2Mc}{f}}, \quad \boxed{d_{\max} = \frac{Mc^2}{f}}.$$

3. Aquí $\gamma = 5/4$. En las coordenadas $(t'/\tau, x'/a)$, una los siguientes vértices mediante líneas rectas:

$$\text{Quark 1: } (0, 0) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (5, 3),$$

$$\text{Quark 2: } (0, 0) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right) \rightarrow (5, 3).$$

Los dos vértices interiores de cada trayectoria son sus puntos de retorno. Los ciclos siguientes se repiten tras una traslación $(\Delta t', \Delta x') = (5\tau, 3a)$. La separación máxima medida simultáneamente en el laboratorio es

$$\boxed{d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f}}.$$

4. La energía del mesón en el laboratorio es

$$\boxed{E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = 175 \text{ MeV}}.$$

Solución

Las gráficas de posición en función del tiempo que se describen a continuación utilizan el tiempo en el eje horizontal y la posición en el vertical. Los diagramas de fases utilizan x en el eje horizontal y p en el vertical. El sistema de laboratorio se denota de forma coherente por S' .

1) Movimiento bajo la fuerza central de módulo constante

Elijamos el sentido positivo del eje x en el sentido del momento lineal inicial, de modo que $p_0 > 0$. En la aproximación ultrarrelativista,

$$E_{\text{particle}} \simeq c|p|, \quad \dot{x} = \frac{pc^2}{E_{\text{particle}}} \simeq c \operatorname{sgn}(p).$$

Así, la partícula se mueve con rapidez c entre cambios de sentido. Se desprecian los breves intervalos no ultrarrelativistas en los puntos de retorno, tal como se indica.

La fuerza atractiva y un potencial correspondiente son

$$\dot{p} = -f \operatorname{sgn}(x), \quad U(x) = f|x|.$$

La conservación de la energía da

$$c|p| + f|x| = cp_0.$$

En un punto de retorno espacial, $p = 0$, por lo que el desplazamiento máximo es

$$A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

Inicialmente, $x > 0$, de modo que $p = p_0 - ft$. El primer cambio de sentido se produce al cabo de

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f},$$

en $x = c\tau_0 = A_0$. La fuerza sigue apuntando hacia el origen, por lo que la partícula regresa con momento lineal negativo. Tras cruzar el origen, la fuerza cambia de signo.

Un ciclo completo es:

t	x	p
0	0	p_0
τ_0	A_0	0
$2\tau_0$	0	$-p_0$
$3\tau_0$	$-A_0$	0
$4\tau_0$	0	p_0

Una los puntos correspondientes a las posiciones mediante líneas rectas. Las pendientes son $+c$ hasta τ_0 , $-c$ desde τ_0 hasta $3\tau_0$, y $+c$ a partir de entonces. El paso por el origen en $2\tau_0$ no es un cambio de sentido.

Por consiguiente,

$$T_1 = 4\tau_0 = \frac{4p_0}{f}.$$

La curva de fase se obtiene directamente de la conservación de la energía:

$$\frac{|x|}{A_0} + \frac{|p|}{p_0} = 1.$$

Es un rombo con vértices $(0, p_0)$, $(A_0, 0)$, $(0, -p_0)$ y $(-A_0, 0)$. Partiendo del vértice superior, el movimiento avanza hacia el vértice derecho, después hacia el inferior, luego hacia el izquierdo y vuelve al superior: en sentido horario.

Para un momento lineal inicial de signo negativo, invierta los signos tanto de x como de p ; en las expresiones de la amplitud y del período se utiliza $|p_0|$.

2) Los dos quarks en el sistema de reposo del mesón

Tomemos el potencial de interacción igual a cero cuando los quarks coinciden. Para una separación $r = |x_1 - x_2|$,

$$U(r) = fr.$$

Como el mesón está en reposo, los momentos lineales iniciales de los quarks son iguales en módulo y opuestos. Denominemos quark 1 al que inicialmente se mueve hacia la derecha:

$$p_1(0) = p_*, \quad p_2(0) = -p_*.$$

En $t = 0$, la energía potencial es cero. Por tanto, la energía total da

$$Mc^2 = 2cp_*, \quad \boxed{p_* = \frac{Mc}{2}}.$$

Por simetría, se mantiene

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

Cada quark experimenta una fuerza de módulo f dirigida hacia el otro quark, que también apunta hacia el origen mientras están separados. Por tanto, cada uno sigue el movimiento obtenido en la parte 1, con

$$\boxed{\tau = \frac{Mc}{2f}}, \quad \boxed{a = c\tau = \frac{Mc^2}{2f}}.$$

La ecuación completa de la energía lo confirma:

$$Mc^2 = 2c|p_1| + f|x_1 - x_2| = 2(c|p_1| + f|x_1|).$$

La siguiente tabla especifica ambas gráficas durante un período:

t/τ	x_1/a	p_1/p_*	x_2/a	p_2/p_*
0	0	1	0	-1
1	1	0	-1	0
2	0	-1	0	1
3	-1	0	1	0
4	0	1	0	-1

Para los diagramas de posición en función del tiempo, una mediante líneas rectas los puntos correspondientes a las posiciones de cada quark. Las dos curvas triangulares son simétricas entre sí respecto a $x = 0$, y los quarks se atraviesan en $t = 2\tau$.

Para cualquiera de los dos diagramas de fases,

$$\boxed{\frac{|x_i|}{a} + \frac{|p_i|}{p_*} = 1}.$$

El quark 1 parte de $(x, p) = (0, p_*)$, mientras que el quark 2 parte de $(0, -p_*)$. Ambos recorren el rombo en sentido horario.

En los puntos de retorno, los quarks se encuentran en extremos opuestos, por lo que

$$\boxed{d_{\max} = 2a = \frac{Mc^2}{f}}.$$

Su período individual es

$$\boxed{T = 4\tau = \frac{2Mc}{f}}.$$

3) Movimiento y separación máxima en el sistema de laboratorio

En la transformación dada,

$$\beta = \frac{3}{5}, \quad \gamma = \frac{5}{4},$$

por lo que

$$\gamma(1 + \beta) = 2, \quad \gamma(1 - \beta) = \frac{1}{2}.$$

Un segmento con velocidad $u = \pm c$ se transforma en

$$u' = \frac{u + \beta c}{1 + \beta u/c} = \pm c.$$

Así, todos los segmentos de las trayectorias en el laboratorio también tienen pendientes $+c$ o $-c$. Obtenemos sus extremos transformando los sucesos de retorno.

Por ejemplo, el primer cambio de sentido del quark 1 se produce en $(t, x) = (\tau, a)$, con $a = c\tau$. Por tanto,

$$t' = \gamma\tau(1 + \beta) = 2\tau, \quad x' = \gamma a(1 + \beta) = 2a.$$

Los cuatro sucesos de retorno de un ciclo son:

Suceso de retorno	t'	x'
Quark 2, primer cambio de sentido	$\frac{\tau}{2} = \frac{Mc}{4f}$	$-\frac{a}{2} = -\frac{Mc^2}{4f}$
Quark 1, primer cambio de sentido	$2\tau = \frac{Mc}{f}$	$2a = \frac{Mc^2}{f}$
Quark 1, segundo cambio de sentido	$3\tau = \frac{3Mc}{2f}$	$a = \frac{Mc^2}{2f}$
Quark 2, segundo cambio de sentido	$\frac{9\tau}{2} = \frac{9Mc}{4f}$	$\frac{7a}{2} = \frac{7Mc^2}{4f}$

Ambas trayectorias comienzan en $(t', x') = (0, 0)$. El cruce en $(t, x) = (2\tau, 0)$ en el sistema de reposo se transforma en

$$(t', x') = \left(\frac{5\tau}{2}, \frac{3a}{2} \right).$$

El final del ciclo en el sistema de reposo, $(4\tau, 0)$, se transforma en

$$(t', x') = (5\tau, 3a).$$

Estos puntos y la tabla de puntos de retorno especifican por completo las gráficas en el laboratorio: conecte mediante líneas rectas los puntos sucesivos de cada quark. Los ciclos siguientes se repiten tras trasladar ambas curvas en

$$\Delta t' = 5\tau = \gamma T, \quad \Delta x' = 3a.$$

Para hallar la separación observada, las dos posiciones deben evaluarse en el **mismo instante del laboratorio**:

$$d'(t') = |x'_1(t') - x'_2(t')|.$$

Inicialmente,

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = -ct',$$

por lo que la separación crece como $2ct'$. El quark 2 cambia de sentido primero, en $t' = \tau/2$. En ese instante,

$$x'_1 = \frac{a}{2}, \quad x'_2 = -\frac{a}{2},$$

y, por tanto, $d' = a$.

Desde $t' = \tau/2$ hasta $t' = 2\tau$, ambos quarks se mueven hacia la derecha con rapidez c :

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = ct' - a.$$

Por tanto, su separación se mantiene igual a a . Después disminuye hasta cero en $5\tau/2$, vuelve a aumentar hasta a en 3τ , se mantiene en a hasta $9\tau/2$ y disminuye hasta cero en 5τ . Este patrón se repite.

Así,

$$d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f} = \frac{1}{2} d_{\max}.$$

La diferencia entre los instantes de cambio de sentido en el laboratorio es esencial: los dos sucesos de retorno simultáneos en el sistema de reposo no son simultáneos en el laboratorio.

4) Energía del mesón en el laboratorio

Para el mesón completo, el momento lineal total en el sistema de reposo es cero y su energía total es Mc^2 . Al transformar su energía se obtiene

$$E' = \gamma(E + \beta cP_x) = \gamma Mc^2.$$

Con los valores proporcionados,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = \frac{1}{0.80} = 1.25,$$

y, por tanto,

$$E' = 1.25(140 \text{ MeV}) = 175 \text{ MeV}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Imán superconductor

Los imanes superconductores se utilizan ampliamente en los laboratorios. La forma más común de imán superconductor es un solenoide hecho de hilo superconductor. Lo extraordinario de un imán superconductor es que produce campos magnéticos intensos sin disipación de energía por efecto Joule, ya que la resistencia eléctrica del hilo superconductor se hace nula cuando el imán se sumerge en helio líquido a una temperatura de 4.2 K. Habitualmente, el imán está provisto de un interruptor superconductor especialmente diseñado, como se muestra en la Fig. 1. La resistencia r del interruptor puede controlarse: puede ser $r = 0$ en el estado superconductor, o $r = r_n$ en el estado normal. En el modo persistente, una corriente circula indefinidamente por el imán y el interruptor superconductor. El modo persistente permite mantener un campo magnético constante durante largos períodos con la fuente externa desconectada.

Los detalles del interruptor superconductor no se muestran en la Fig. 1. Por lo general, consiste en un pequeño tramo de hilo superconductor rodeado por un hilo calefactor y debidamente aislado térmicamente del baño de helio líquido. Al calentarlo, la temperatura del hilo superconductor aumenta y este vuelve al estado normal resistivo. El valor típico de r_n es de unos pocos ohmios. Aquí supondremos que es de $5\ \Omega$. La inductancia de un imán superconductor depende de su tamaño; supóngase que es de $10\ \text{H}$ para el imán de la Fig. 1. La corriente total I puede modificarse ajustando la resistencia R .

¡Este problema se calificará únicamente a partir de las gráficas!

Las flechas indican el sentido positivo de I , I_1 e I_2 .

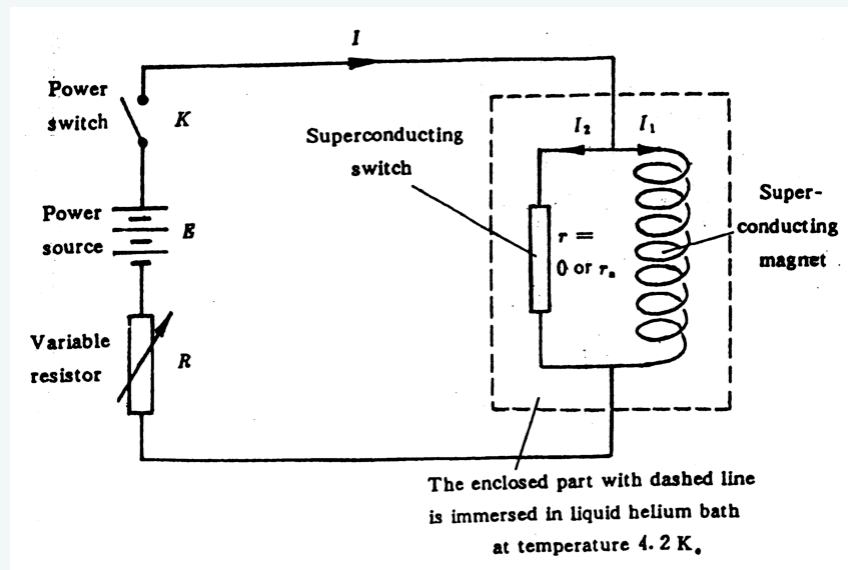


Fig. 1

1) Si la corriente total I y la resistencia r del interruptor superconductor se controlan de modo que varíen con el tiempo como se muestra en las Figs. 2a y 2b, respectivamente, y suponiendo que las corrientes I_1 e I_2 que circulan por el imán y el interruptor, respectivamente, son iguales al principio (Fig. 2c y Fig. 2d), ¿cómo varían con el tiempo desde t_1 hasta t_4 ? Represente gráficamente su respuesta en la Fig. 2c y la Fig. 2d

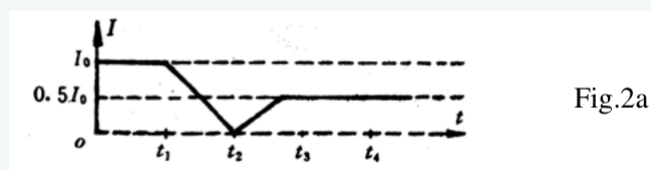
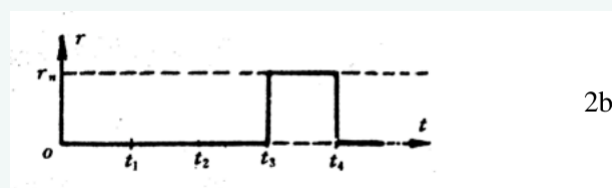
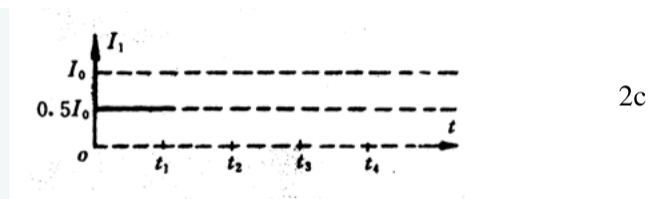


Fig. 2a

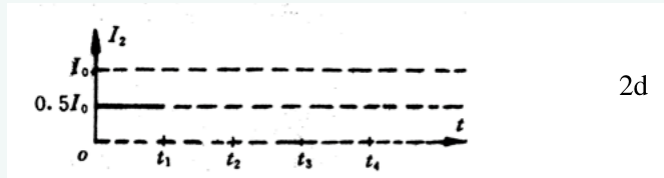


2b



2c

2c



2d

2d

2) Suponga que el interruptor de alimentación K se cierra en el instante $t = 0$, cuando $r = 0$, $I_1 = 0$ y $R = 7.5 \Omega$, y la corriente total I es de 0.5 A . Manteniendo K cerrado, la resistencia r del interruptor superconductor se hace variar como se muestra en la Fig. 3b. Represente las correspondientes dependencias temporales de I , I_1 e I_2 en las Figs. 3a, 3c y 3d, respectivamente.

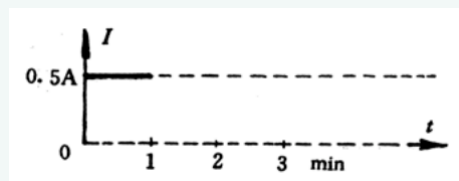
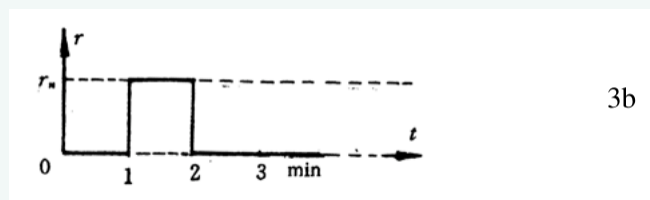
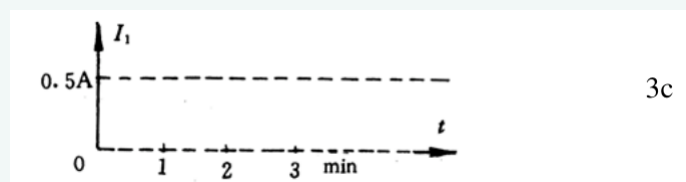


Fig. 3a



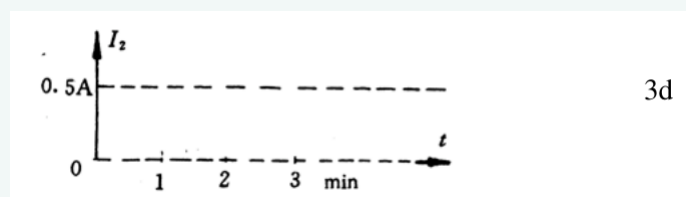
3b

3b



3c

3c



3d

3d

3) Por el interruptor superconductor solo se permite que circulen corrientes pequeñas, inferiores a 0.5 A , cuando se encuentra en el estado normal; con corrientes mayores, el interruptor se quemará. Suponga que el imán superconductor funciona en modo persistente, es decir, $I = 0$, e $I_1 = i_1$ (por ejemplo, 20 A), $I_2 = -i_1$, como se muestra en la Fig. 4, desde $t = 0$ hasta $t = 3 \text{ min}$. Si se desea detener el experimento reduciendo a cero la corriente que circula por el imán, ¿cómo lo haría? Esto debe hacerse en varias etapas de operación. Represente gráficamente los cambios correspondientes de I , r , I_1 e I_2 en la Fig. 4

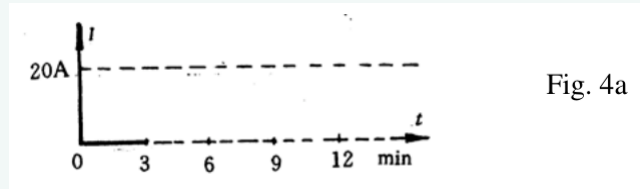
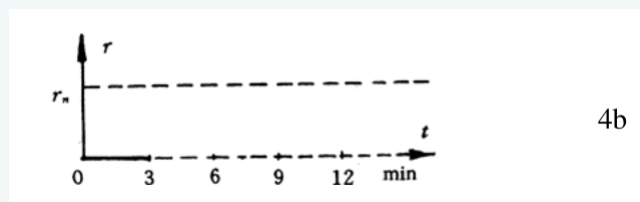


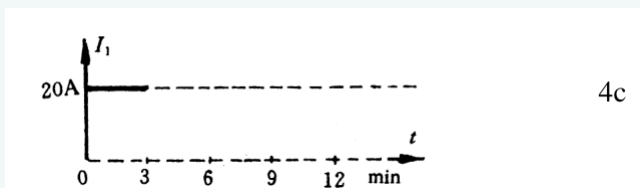
Fig. 4a

Fig. 4a



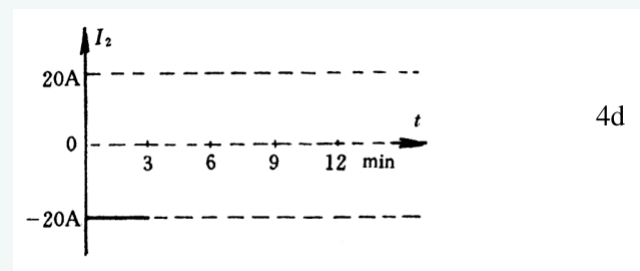
4b

4b



4c

4c



4d

4d

4) Suponga que el imán funciona en modo persistente con una corriente persistente de 20 A (de $t = 0$ a $t = 3 \text{ min}$. Véase la Fig. 5). ¿Cómo lo cambiaría a un modo persistente con una corriente de 30 A ? Represente gráficamente su respuesta en la Fig. 5.

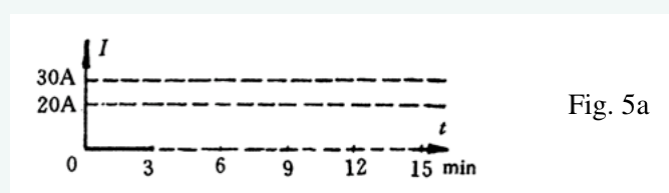
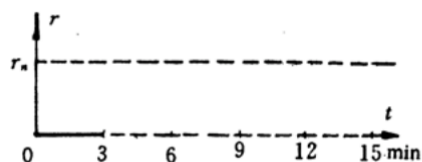


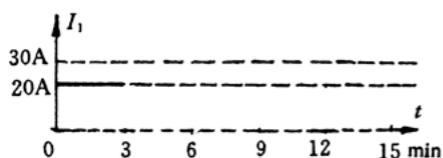
Fig. 5a

Fig. 5a



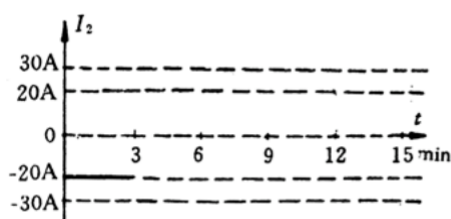
5b

5b



5c

5c



5d

5d

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

1. A lo largo de toda la secuencia prescrita,

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

Por tanto, I_2 disminuye linealmente desde $+I_0/2$ en t_1 hasta $-I_0/2$ en t_2 , aumenta linealmente hasta cero cuando I alcanza su meseta y permanece en cero durante t_3 y t_4 .

2. La fem de la fuente es de 3.75 V. Inicialmente,

$$(I, I_1, I_2) = (0.50, 0, 0.50) \text{ A}.$$

En 1 min, I e I_2 saltan a 0.30 A, mientras que I_1 permanece en cero. A continuación, se aproximan exponencialmente a $(0.50, 0.50, 0)$ A con una constante de tiempo

$$\tau_R = \frac{10}{3} \text{ s} \approx 3.33 \text{ s}.$$

Después de 2 min, $I = 0.50$ A, I_1 es constante e $I_2 \approx 0$. Las expresiones exactas se presentan más adelante.

3. Con $r = 0$, aumente primero I desde cero hasta 20 A , manteniendo $I_1 = 20 \text{ A}$. Después, establezca $r = 5 \Omega$, reduzca I lentamente hasta cero y abra K . La corriente restante en el imán decae exponencialmente con una constante de tiempo de 2.0 s . La rampa explícita de tres minutos que se presenta más adelante mantiene

$$|I_2| < 0.223 \text{ A} < 0.5 \text{ A}$$

durante todo el estado normal.

4. Primero iguale $I = I_1 = 20 \text{ A}$ con $r = 0$. Establezca $r = 5 \Omega$ y aumente I_1 hasta 30 A , utilizando $I_2 = 1/9 \text{ A}$ durante una rampa de tres minutos. Después, establezca $I = 30 \text{ A}$, enfríe el interruptor hasta que $r = 0$ y reduzca I a cero. El estado persistente final es

$$I = 0, \quad I_1 = 30 \text{ A}, \quad I_2 = -30 \text{ A}, \quad r = 0.$$

Solución

Tratamos el imán como una bobina ideal con inductancia constante $L = 10 \text{ H}$. Despreciamos la resistencia de los conductores de conexión, la inductancia parásita y el tiempo de conmutación, como se supone implícitamente en el problema.

Con los sentidos de corriente indicados, la ley de corrientes de Kirchhoff da

$$I = I_1 + I_2.$$

El imán y el interruptor superconductor tienen la misma tensión entre sus terminales:

$$V = L \frac{dI_1}{dt} = rI_2.$$

Por tanto, la ecuación fundamental es

$$L \frac{dI_1}{dt} = r(I - I_1).$$

Cuando $r = 0$, la corriente del imán es constante. Las variaciones de la corriente de la fuente pasan entonces íntegramente por el interruptor superconductor:

$$\frac{dI_1}{dt} = 0, \quad I_2 = I - I_1.$$

Cuando $r = r_n$ y se prescribe la corriente total, la ecuación se convierte en

$$\tau \frac{dI_1}{dt} + I_1 = I, \quad \tau = \frac{L}{r_n} = 2.0 \text{ s}.$$

La corriente de la bobina permanece continua en los instantes de conmutación; I e I_2 pueden presentar saltos.

1) Corriente total y resistencia del interruptor prescritas

Inicialmente, las corrientes de las dos ramas son iguales, de modo que

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2}.$$

Hasta t_3 , el interruptor es superconductor. Por ello,

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

En t_3 , la corriente impuesta ya ha alcanzado $I_0/2$. Por tanto, $I_2 = 0$ cuando el interruptor se vuelve resistivo. Durante $t_3 < t < t_4$,

$$L \frac{dI_1}{dt} = r_n \left(\frac{I_0}{2} - I_1 \right) = 0.$$

En consecuencia, las corrientes permanecen inalteradas. Devolver el interruptor a $r = 0$ en t_4 tampoco produce ningún cambio.

Las gráficas solicitadas son:

- **Fig. 2c:** una línea horizontal en $I_1 = I_0/2$ durante todo el intervalo.
- **Fig. 2d:** una línea horizontal en $I_0/2$ hasta t_1 , seguida de un descenso rectilíneo hasta $-I_0/2$ en t_2 . Cruza el cero a mitad de camino entre t_1 y t_2 . A continuación, aumenta linealmente hasta cero cuando la corriente prescrita I alcanza $I_0/2$, y permanece en cero durante t_3 , t_4 y después.

La parte negativa de la Fig. 2d debe dibujarse por debajo del eje original correspondiente a cero.

2) Resistencia de la fuente fija

Sea $\mathcal{E}$ la fem de la fuente. Inicialmente, $r = 0$, por lo que la asociación en paralelo tiene tensión nula:

$$\mathcal{E} = RI = (7.5 \Omega)(0.50 \text{ A}) = \boxed{3.75 \text{ V}}.$$

Para $0 \leq t < 60 \text{ s}$, la corriente del imán permanece en su valor inicial nulo:

$$\boxed{I = 0.50 \text{ A}, \quad I_1 = 0, \quad I_2 = 0.50 \text{ A}.}$$

En $t = 60 \text{ s}$, el interruptor se vuelve resistivo. Como I_1 no puede presentar un salto, su valor inmediatamente después sigue siendo cero, lo que da

$$I(60^+) = I_2(60^+) = \frac{\mathcal{E}}{R + r_n} = \frac{3.75}{12.5} = \boxed{0.30 \text{ A}}.$$

Durante el intervalo en estado normal, la ley de tensiones de Kirchhoff da

$$\mathcal{E} = R(I_1 + I_2) + r_n I_2,$$

y, por tanto,

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - RI_1}{R + r_n}.$$

Combinando esto con la ecuación de la bobina,

$$L \frac{dI_1}{dt} = \frac{r_n R}{R + r_n} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_1 \right).$$

Así,

$$\boxed{\tau_R = \frac{L(R + r_n)}{Rr_n} = \frac{10(7.5 + 5)}{7.5(5)} \text{ s} = \frac{10}{3} \text{ s}.}$$

Para $60 \leq t < 120 \text{ s}$, definimos

$$x = \frac{t - 60 \text{ s}}{\tau_R}.$$

Las corrientes son

$$\begin{aligned} I_1(t) &= (0.50 \text{ A})(1 - e^{-x}), \\ I_2(t) &= (0.30 \text{ A})e^{-x}, \\ I(t) &= 0.50 \text{ A} - (0.20 \text{ A})e^{-x}. \end{aligned}$$

En $t = 120 \text{ s}$, $x = 18$, y el interruptor vuelve a $r = 0$. La corriente de la fuente pasa a ser $\mathcal{E}/R = 0.50 \text{ A}$, mientras que la corriente del imán queda fijada en el valor que tenía. Por ello, para todo $t \geq 120 \text{ s}$,

$$\begin{aligned} I &= 0.50 \text{ A}, \\ I_1 &= (0.50 \text{ A})(1 - e^{-18}), \\ I_2 &= (0.50 \text{ A})e^{-18} \approx 7.6 \text{ nA}. \end{aligned}$$

Las características de las gráficas son:

- **Fig. 3a:** $I = 0.50 \text{ A}$ hasta un minuto; una caída vertical hasta 0.30 A ; después, un aumento exponencial, cóncavo hacia abajo, hacia 0.50 A .
- **Fig. 3c:** $I_1 = 0$ hasta un minuto; después, un aumento exponencial continuo, cóncavo hacia abajo, hacia 0.50 A . Se vuelve exactamente constante a los dos minutos.
- **Fig. 3d:** $I_2 = 0.50 \text{ A}$ hasta un minuto; una caída vertical hasta 0.30 A ; después, un decaimiento exponencial hacia cero.

A los dos minutos, I e I_2 presentan saltos ascendentes de solo unos 3.0 nA , invisibles en la escala proporcionada. Todos los transitorios visibles ocupan solo una pequeña fracción de minuto.

3) Reducción de la corriente persistente a cero

La restricción de corriente se aplica al valor absoluto de la corriente del interruptor en estado normal:

$$|I_2| < 0.5 \text{ A}.$$

Como

$$I_2 = \frac{L}{r_n} \frac{dI_1}{dt},$$

se requiere

$$\left| \frac{dI_1}{dt} \right| < \frac{r_n}{L} (0.5 \text{ A}) = 0.25 \text{ A s}^{-1}.$$

Calentar el interruptor inmediatamente en el estado persistente inicial haría que circularan 20 A por él. Primero debemos transferir su corriente a la fuente externa mientras todavía es superconductor.

A continuación se presenta una secuencia concreta para el ejemplo de 20 A .

De 0 a 3 min: mantenga el estado persistente dado:

$$I = 0, \quad r = 0, \quad I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = -20 \text{ A}.$$

De 3 a 6 min: mantenga $r = 0$, cierre K con un valor de R suficientemente grande y aumente I linealmente desde cero hasta 20 A . Entonces

$$I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = I - 20 \text{ A}.$$

Por tanto, I_2 aumenta linealmente desde -20 A hasta cero. A los seis minutos, la fuente suministra toda la corriente del imán.

De 6 a 9 min: establezca $r = r_n = 5\ \Omega$ y reduzca la corriente total linealmente desde 20 A hasta cero.

Sean

$$u = t - 360\text{ s}, \quad T = 180\text{ s}, \quad a = \frac{20\text{ A}}{T} = \frac{1}{9}\text{ A s}^{-1}.$$

Durante este intervalo,

$$I = 20\text{ A} - au.$$

Al resolver $\tau \dot{I}_1 + I_1 = I$, con $I_1(0) = 20\text{ A}$, se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 &= 20\text{ A} - au + a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \\ I_2 &= -a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \end{aligned} \quad \tau = 2.0\text{ s}.$$

En consecuencia,

$$|I_2| \leq a\tau = \frac{2}{9}\text{ A} \approx 0.222\text{ A} < 0.5\text{ A}.$$

La corriente del imán sigue a la corriente decreciente de la fuente, manteniéndose ligeramente por encima de ella.

A los 9 min y después: la corriente de la fuente ha llegado a cero. Abra K , dejando el interruptor en estado normal. La corriente restante del imán es

$$D = \frac{2}{9}(1 - e^{-90})\text{ A} \approx 0.222\text{ A}.$$

Circula por el imán y el interruptor en estado normal y decae según

$$I = 0, \quad I_1 = De^{-(t-540\text{ s})/\tau}, \quad I_2 = -De^{-(t-540\text{ s})/\tau}.$$

Después de otros 10 s , $I_1 \approx 1.5\text{ mA}$, y continúa tendiendo a cero.

Por tanto, las gráficas completas de la Fig. 4 son:

Gráfica	Forma requerida
4a: I	Cero hasta los 3 min; aumento lineal hasta 20 A a los 6 min; descenso lineal hasta cero a los 9 min; cero después.
4b: r	Cero hasta los 6 min; escalón hasta $5\ \Omega$; permanece en estado normal durante la descarga final.
4c: I_1	20 A hasta los 6 min; inicia suavemente un descenso casi lineal, alcanzando aproximadamente 0.222 A a los 9 min; después decae exponencialmente hasta cero.
4d: I_2	-20 A hasta los 3 min; aumento lineal hasta cero a los 6 min; se vuelve ligeramente negativa, aproximándose a -0.222 A ; después de los 9 min vuelve exponencialmente hacia cero desde valores negativos.

Como en cualquier descarga pasiva RL , el cero exacto se alcanza solo asintóticamente. En la gráfica con escala de minutos, la cola final es indistinguible de cero. Devolver el interruptor a $r = 0$ antes de que esa cola haya decaído dejaría atrapada la corriente restante.

Para un valor inicial distinto de i_1 , se aplica el mismo procedimiento con una rampa suficientemente lenta para respetar el límite de 0.25 A s^{-1} .

4) Cambio de la corriente persistente de 20 A a 30 A

De nuevo, primero se iguala la corriente de la fuente a la corriente existente en el imán antes de calentar el interruptor.

Podemos elegir una rampa exactamente lineal de la corriente del imán que dure tres minutos:

$$\alpha = \frac{30 - 20}{180} \text{ A s}^{-1} = \frac{1}{18} \text{ A s}^{-1}.$$

La corriente necesaria en el interruptor durante esta rampa es

$$\delta = \frac{L}{r_n} \alpha = \frac{1}{9} \text{ A} \approx 0.111 \text{ A},$$

muy inferior al límite del estado normal.

Para producir exactamente esta rampa, se prescribe

$$I = I_1 + \delta.$$

Para $u = t - 360 \text{ s}$, $0 < u < 180 \text{ s}$,

$$I_1 = 20 \text{ A} + \alpha u, \quad I_2 = \delta, \quad I = 20 \text{ A} + \alpha u + \delta.$$

En efecto, $r_n I_2 = r_n \delta = L \alpha = L dI_1/dt$.

Una secuencia completa, que especifica las cuatro gráficas, es:

Tiempo (min)	I (A), Fig. 5a	r (Ω), Fig. 5b	I_1 (A), Fig. 5c	I_2 (A), Fig. 5d
0–3	0	0	20	–20
3–6	Lineal $0 \rightarrow 20$	0	20	Lineal $-20 \rightarrow 0$
6–9	Lineal $20 + \delta \rightarrow 30 + \delta$	5	Lineal $20 \rightarrow 30$	$\delta = 1/9$
9–12	30	5	30	0
12–15	Lineal $30 \rightarrow 0$	0	30	Lineal $0 \rightarrow -30$
Después de 15	0	0	30	–30

Aquí el valor numérico de δ en la tabla está expresado en amperios.

Los detalles de la conmutación son importantes:

- **A los 6 min:** $I = I_1 = 20 \text{ A}$, de modo que $I_2 = 0$. Pase el interruptor al estado normal y después aumente I en la pequeña cantidad δ . Esto inicia la rampa lineal de corriente del imán sin ningún salto en I_1 .
- **A los 9 min:** I_1 ha alcanzado exactamente 30 A . Reduzca I de $30 + \delta$ a 30 A . Entonces $I_2 = 0$, por lo que la corriente del imán permanece constante.
- **A los 12 min:** devuelva el interruptor a $r = 0$. Reduzca I a cero durante los tres minutos siguientes. La corriente del imán permanece fija en 30 A , mientras que I_2 se hace cada vez más negativa.
- **A los 15 min:** abra K . Por el imán y el interruptor superconductor circulan corrientes iguales y opuestas, de valor absoluto 30 A .

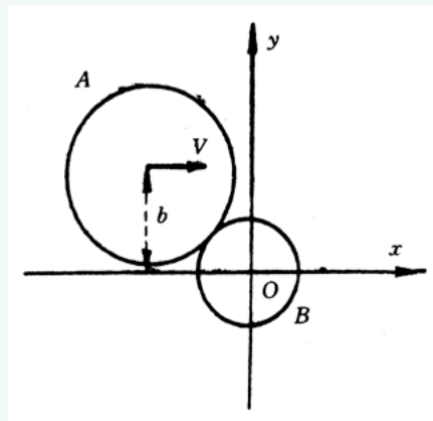
Por tanto, la Fig. 5a incluye pequeños escalones de 0.111 A a los 6 y 9 min. La Fig. 5d presenta un pequeño pulso rectangular positivo durante el intervalo de 6 a 9 min. Las grandes corrientes negativas del interruptor solo se producen mientras $r = 0$, por lo que no infringen la restricción indicada para el estado normal.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 3: Colisión de discos con rozamiento superficial

Un disco homogéneo A de masa m y radio R_A se mueve por traslación sobre un plano horizontal x - y sin rozamiento, en la dirección x , con una velocidad V (véase la figura de la página siguiente). El centro del disco se encuentra a una distancia b del eje x . Choca con un disco homogéneo B en reposo, cuyo centro se encuentra inicialmente en el origen del sistema de coordenadas. El disco B tiene la misma masa y el mismo espesor que A, pero su radio es R_B . Se supone que, después de la colisión, las velocidades de los discos en su punto de contacto, en la dirección perpendicular a la recta que une sus centros, son iguales. También se supone que los módulos de las velocidades relativas de los discos a lo largo de la recta que une sus centros son iguales antes y después de la colisión.

- 1) Para esta colisión, determine las componentes X e Y de las velocidades de los dos discos después de la colisión, es decir, V'_{AX} , V'_{AY} , V'_{BX} y V'_{BY} , en función de m , R_A , R_B , V y b .
- 2) Determine las energías cinéticas E'_A del disco A y E'_B del disco B después de la colisión en función de m , R_A , R_B , V y b .



Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea $D = R_A + R_B$. Para que haya una colisión, $0 \leq b < D$, con A por encima del eje x , como se muestra en la figura.

1. Las componentes de la velocidad son

$$V'_{AX} = \frac{5Vb^2}{6D^2}, \quad V'_{AY} = \frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2},$$

$$V'_{BX} = V \left(1 - \frac{5b^2}{6D^2} \right), \quad V'_{BY} = -\frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2}.$$

2. Incluyendo tanto la traslación como la rotación,

$$E'_A = \frac{3mV^2b^2}{8D^2}, \quad E'_B = \frac{mV^2}{2} \left(1 - \frac{11b^2}{12D^2} \right).$$

Solución

1) Velocidades después de la colisión

Consideramos que la colisión es instantánea, de modo que la recta que une los centros permanece fija durante el impacto. El plano horizontal sin rozamiento no ejerce ningún impulso horizontal ni ningún momento de fuerza respecto al eje vertical. Inicialmente, ninguno de los discos gira.

Definimos

$$s = \frac{b}{D}, \quad c = \sqrt{1 - s^2}, \quad D = R_A + R_B.$$

En el instante del primer contacto, el centro de A se encuentra en $(-Dc, b)$, mientras que el centro de B está en el origen. Por tanto, los vectores unitarios en la dirección de la recta de A a B y en la dirección perpendicular a ella son

$$\mathbf{n} = (c, -s), \quad \mathbf{t} = (s, c).$$

La velocidad inicial de A es

$$\mathbf{v}_A = Vc\mathbf{n} + Vs\mathbf{t}.$$

Sea el impulso ejercido sobre B

$$\mathbf{J} = J_n\mathbf{n} + J_t\mathbf{t}.$$

El impulso sobre A es $-\mathbf{J}$. Por tanto, el teorema del impulso y la cantidad de movimiento da

$$\begin{aligned} v'_{An} &= Vc - \frac{J_n}{m}, & v'_{Bn} &= \frac{J_n}{m}, \\ v'_{At} &= Vs - \frac{J_t}{m}, & v'_{Bt} &= \frac{J_t}{m}. \end{aligned}$$

La velocidad relativa normal invierte su sentido y conserva su módulo: los discos se aproximan antes del impacto y se separan después. En consecuencia,

$$v'_{Bn} - v'_{An} = Vc,$$

de modo que

$$\frac{2J_n}{m} - Vc = Vc \implies J_n = mVc.$$

Por tanto,

$$\boxed{v'_{An} = 0, \quad v'_{Bn} = Vc.}$$

Para determinar el impulso tangencial, debemos incluir la rotación. Los momentos de inercia son

$$I_A = \frac{1}{2}mR_A^2, \quad I_B = \frac{1}{2}mR_B^2.$$

Tomamos como positiva la velocidad angular en sentido antihorario. Los puntos de contacto se encuentran en $R_A\mathbf{n}$ respecto al centro de A y en $-R_B\mathbf{n}$ respecto al centro de B. El teorema del impulso angular y el momento angular da

$$I_A\omega'_A = -R_A J_t, \quad I_B\omega'_B = -R_B J_t.$$

Por consiguiente,

$$\omega'_A = -\frac{2J_t}{mR_A}, \quad \omega'_B = -\frac{2J_t}{mR_B}.$$

Las velocidades tangenciales de los puntos materiales en contacto son

$$u'_{At} = v'_{At} + R_A\omega'_A = Vs - \frac{3J_t}{m},$$

$$u'_{Bt} = v'_{Bt} - R_B\omega'_B = \frac{3J_t}{m}.$$

La igualdad de estas velocidades, establecida en el enunciado, exige que

$$Vs - \frac{3J_t}{m} = \frac{3J_t}{m},$$

de donde se obtiene

$$\boxed{J_t = \frac{mVs}{6}}.$$

Así,

$$\boxed{v'_{At} = \frac{5}{6}Vs, \quad v'_{Bt} = \frac{1}{6}Vs},$$

y las velocidades angulares, necesarias para el apartado 2, son

$$\boxed{\omega'_A = -\frac{Vs}{3R_A}, \quad \omega'_B = -\frac{Vs}{3R_B}}.$$

Ambos discos giran en sentido horario para la geometría mostrada.

Volviendo a las coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{v}'_A = \frac{5}{6}Vs\mathbf{t} = \left(\frac{5}{6}Vs^2, \frac{5}{6}Vsc\right),$$

$$\mathbf{v}'_B = Vc\mathbf{n} + \frac{1}{6}Vs\mathbf{t} = \left(V\left(c^2 + \frac{s^2}{6}\right), -\frac{5}{6}Vsc\right).$$

Usando $c^2 = 1 - s^2$, $s = b/D$ y $c = \sqrt{D^2 - b^2}/D$, se obtienen las cuatro componentes de la sección Respuestas. Sus sumas satisfacen la conservación de la cantidad de movimiento:

$$V'_{AX} + V'_{BX} = V, \quad V'_{AY} + V'_{BY} = 0.$$

2) Energías cinéticas después de la colisión

La energía cinética de cada disco incluye la traslación de su centro y la rotación alrededor de su centro:

$$E'_i = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'_i|^2 + \frac{1}{2}I_i(\omega'_i)^2.$$

Para A,

$$\begin{aligned} E'_A &= \frac{1}{2}m\left(\frac{5}{6}Vs\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR_A^2\right)\left(\frac{Vs}{3R_A}\right)^2 \\ &= \left(\frac{25}{72} + \frac{1}{36}\right)mV^2s^2 \\ &= \frac{3}{8}mV^2s^2. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$E'_A = \frac{3mV^2b^2}{8(R_A + R_B)^2}.$$

Para B, las componentes normal y tangencial de la velocidad son perpendiculares, de modo que

$$|\mathbf{v}'_B|^2 = V^2c^2 + \frac{V^2s^2}{36}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} E'_B &= \frac{1}{2}mV^2\left(c^2 + \frac{s^2}{36}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR_B^2\right)\left(\frac{Vs}{3R_B}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}mV^2c^2 + \frac{1}{24}mV^2s^2 \\ &= \frac{1}{2}mV^2\left(1 - \frac{11s^2}{12}\right). \end{aligned}$$

Así,

$$E'_B = \frac{mV^2}{2}\left(1 - \frac{11b^2}{12(R_A + R_B)^2}\right).$$

Como comprobación de coherencia, la pérdida total de energía cinética es

$$\frac{1}{2}mV^2 - (E'_A + E'_B) = \frac{mV^2b^2}{12(R_A + R_B)^2} \geq 0.$$

Esta pérdida se debe al rozamiento tangencial; la condición de elasticidad prescrita se aplica únicamente al movimiento relativo normal. Para una colisión central, $b = 0$, A se detiene, B adquiere la velocidad V , ninguno de los discos gira y no se pierde energía cinética.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.