

IPhO 1994

Theorieaufgaben und Lösungen · Peking, China · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1994/

Aufgabe 1: Relativistisches Teilchen

In der speziellen Relativitätstheorie lautet die Beziehung zwischen Energie E und Impuls P eines freien Teilchens mit der Ruhemasse m_0

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = mc^2$$

Wirkt auf ein solches Teilchen eine konservative Kraft, so bleibt seine Gesamtenergie, also die Summe aus $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ und der potenziellen Energie, erhalten. Ist die Energie des Teilchens sehr hoch, kann seine Ruheenergie vernachlässigt werden (ein solches Teilchen nennt man ultrarelativistisch).

1) Betrachten Sie die eindimensionale Bewegung eines Teilchens sehr hoher Energie (dessen Ruheenergie vernachlässigt werden kann) unter dem Einfluss einer anziehenden Zentralkraft mit konstantem Betrag f . Das Teilchen befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Anfangsimpuls p_0 im Kraftzentrum. Beschreiben Sie die Bewegung des Teilchens, indem Sie für mindestens eine Bewegungsperiode getrennt folgende Diagramme zeichnen: x in Abhängigkeit von der Zeit t und den Impuls p in Abhängigkeit von der Ortskoordinate x . Geben Sie die Koordinaten der „Umkehrpunkte“ durch die gegebenen Parameter p_0 und f an. Kennzeichnen Sie im (p, x) -Diagramm durch Pfeile die Richtung, in der die Bewegung abläuft. Es kann kurze Zeitintervalle geben, in denen das Teilchen nicht ultrarelativistisch ist. Diese sollen jedoch vernachlässigt werden.

Verwenden Sie Antwortblatt 1.

2) Ein Meson ist ein Teilchen, das aus zwei Quarks besteht. Die Ruhemasse M des Mesons ist gleich der Gesamtenergie des Zwei-Quark-Systems geteilt durch c^2 .

Betrachten Sie ein eindimensionales Modell eines ruhenden Mesons, in dem angenommen wird, dass sich die beiden Quarks entlang der x -Achse bewegen und sich gegenseitig mit einer Kraft konstanten Betrags f anziehen. Es wird angenommen, dass sie ungehindert durcheinander hindurchtreten können. Bei der Untersuchung der Bewegung der Quarks bei hoher Energie kann deren Ruhemasse vernachlässigt werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich beide Quarks bei $x = 0$. Stellen Sie die Bewegung der beiden Quarks jeweils getrennt in einem (x, t) -Diagramm und einem (p, x) -Diagramm grafisch dar, geben Sie die Koordinaten der „Umkehrpunkte“ durch M und f an, kennzeichnen Sie die Bewegungsrichtung in Ihrem (p, x) -Diagramm und bestimmen Sie den maximalen Abstand zwischen den beiden Quarks.

Verwenden Sie Antwortblatt 2.

3) Das in Teil 2 verwendete Bezugssystem wird als System S bezeichnet. Das Laborsystem, das als S' bezeichnet wird, bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 0.6c$ in negativer x -Richtung. Die Koordinaten in den beiden Bezugssystemen sind so gewählt, dass der Punkt $x = 0$ in S zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ mit dem Punkt $x' = 0$ in S' zusammenfällt. Stellen Sie die Bewegung der beiden Quarks in einem (x', t') -Diagramm grafisch dar. Geben Sie die Koordinaten der Umkehrpunkte durch M, f und c an und bestimmen Sie den maximalen Abstand zwischen den beiden Quarks, der im Laborsystem S' beobachtet wird.

Verwenden Sie Antwortblatt 3.

Die in den Bezugssystemen S und S'' beobachteten Koordinaten eines Teilchens sind durch die Lorentz-Transformation miteinander verknüpft:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + \beta ct), \\ t' = \gamma\left(t + \beta \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

Dabei sind $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, und v ist die Geschwindigkeit des Systems S relativ zum System S'' .

4) Bestimmen Sie für ein Meson mit der Ruheenergie $Mc^2 = 140 \text{ MeV}$ und der Geschwindigkeit $0.60c$ relativ zum Laborsystem S'' seine Energie E' im Laborsystem S'' .

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

1. Wählen wir $p_0 > 0$ und definieren

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f}, \quad A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

Das Orts-Zeit-Diagramm besteht aus geraden Strecken durch

$$(t, x) : (0, 0) \rightarrow (\tau_0, A_0) \rightarrow (2\tau_0, 0) \rightarrow (3\tau_0, -A_0) \rightarrow (4\tau_0, 0).$$

Die Umkehrpunkte sind (τ_0, A_0) und $(3\tau_0, -A_0)$, und

$$T_1 = \frac{4p_0}{f}.$$

Mit x auf der horizontalen und p auf der vertikalen Achse ist das Phasendiagramm die im Uhrzeigersinn durchlaufene Raute

$$(x, p) : (0, p_0) \rightarrow (A_0, 0) \rightarrow (0, -p_0) \rightarrow (-A_0, 0) \rightarrow (0, p_0).$$

2. Wir definieren

$$p_* = \frac{Mc}{2}, \quad \tau = \frac{Mc}{2f}, \quad a = \frac{Mc^2}{2f}.$$

Quark 1 führt die Bewegung aus Teil 1 mit $p_0 = p_*$ aus; für Quark 2 gilt

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

Ihre Orte zu den Umkehrzeitpunkten sind

$$t = \tau : (x_1, x_2) = (a, -a), \quad t = 3\tau : (x_1, x_2) = (-a, a).$$

Beide Phasenbahnen durchlaufen dieselbe Raute im Uhrzeigersinn, wobei sie an gegenüberliegenden Eckpunkten auf der Impulsachse beginnen. Somit gilt

$$\boxed{T = \frac{2Mc}{f}}, \quad \boxed{d_{\max} = \frac{Mc^2}{f}}.$$

3. Hier ist $\gamma = 5/4$. In den Koordinaten $(t'/\tau, x'/a)$ sind die folgenden Eckpunkte durch gerade Linien zu verbinden:

$$\text{Quark 1: } (0, 0) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (5, 3),$$

$$\text{Quark 2: } (0, 0) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right) \rightarrow (5, 3).$$

Die beiden inneren Eckpunkte jeder Bahnkurve sind ihre Umkehrpunkte. Die nachfolgenden Zyklen wiederholen sich jeweils um $(\Delta t', \Delta x') = (5\tau, 3a)$ verschoben. Der maximale, zu einem gemeinsamen Laborzeitpunkt gemessene Abstand ist

$$\boxed{d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f}}.$$

4. Die Energie des Mesons im Laborsystem ist

$$\boxed{E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = 175 \text{ MeV}}.$$

Lösung

In den folgenden Orts-Zeit-Diagrammen wird die Zeit horizontal und der Ort vertikal aufgetragen. In den Phasendiagrammen wird x horizontal und p vertikal aufgetragen. Das Laborsystem wird durchgehend mit S' bezeichnet.

1) Bewegung unter einer Zentralkraft konstanten Betrags

Wir wählen die positive x -Richtung entlang des Anfangsimpulses, sodass $p_0 > 0$. In der ultrarelativistischen Näherung gilt

$$E_{\text{particle}} \simeq c|p|, \quad \dot{x} = \frac{pc^2}{E_{\text{particle}}} \simeq c \operatorname{sgn}(p).$$

Das Teilchen bewegt sich somit zwischen den Richtungsumkehrungen mit der Geschwindigkeit c . Die kurzen nicht ultrarelativistischen Zeitintervalle an den Umkehrpunkten werden wie gefordert vernachlässigt.

Die anziehende Kraft und ein zugehöriges Potenzial lauten

$$\dot{p} = -f \operatorname{sgn}(x), \quad U(x) = f|x|.$$

Aus der Energieerhaltung folgt

$$c|p| + f|x| = cp_0.$$

An einem räumlichen Umkehrpunkt ist $p = 0$. Die maximale Auslenkung beträgt daher

$$A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

Zu Beginn gilt $x > 0$, also $p = p_0 - ft$. Die erste Richtungsumkehr erfolgt nach

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f},$$

bei $x = c\tau_0 = A_0$. Die Kraft zeigt weiterhin zum Ursprung, sodass das Teilchen mit negativem Impuls zurückkehrt. Nach dem Durchgang durch den Ursprung wechselt die Kraft ihr Vorzeichen.

Ein vollständiger Zyklus ist:

t	x	p
0	0	p_0
τ_0	A_0	0
$2\tau_0$	0	$-p_0$
$3\tau_0$	$-A_0$	0
$4\tau_0$	0	p_0

Die Ortseinträge werden durch gerade Linien verbunden. Die Steigungen betragen $+c$ bis τ_0 , $-c$ von τ_0 bis $3\tau_0$ und danach $+c$. Der Durchgang durch den Ursprung bei $2\tau_0$ ist keine Richtungsumkehr.

Folglich gilt

$$T_1 = 4\tau_0 = \frac{4p_0}{f}.$$

Die Phasenkurve folgt unmittelbar aus der Energieerhaltung:

$$\frac{|x|}{A_0} + \frac{|p|}{p_0} = 1.$$

Sie ist eine Raute mit den Eckpunkten $(0, p_0)$, $(A_0, 0)$, $(0, -p_0)$ und $(-A_0, 0)$. Vom oberen Eckpunkt aus verläuft die Bewegung zum rechten Eckpunkt, dann zum unteren, zum linken und zurück zum oberen Eckpunkt: im Uhrzeigersinn.

Bei einem negativen Anfangsimpuls werden sowohl x als auch p gespiegelt; für Amplitude und Periodendauer wird $|p_0|$ verwendet.

2) Die beiden Quarks im Ruhesystem des Mesons

Wir wählen das Wechselwirkungspotenzial so, dass es verschwindet, wenn sich die Quarks am selben Ort befinden. Für den Abstand $r = |x_1 - x_2|$ gilt

$$U(r) = fr.$$

Da das Meson ruht, sind die Anfangsimpulse der Quarks betragsgleich und entgegengesetzt gerichtet. Wir bezeichnen das anfangs nach rechts bewegte Quark als Quark 1:

$$p_1(0) = p_*, \quad p_2(0) = -p_*.$$

Bei $t = 0$ ist die potenzielle Energie null. Aus der Gesamtenergie folgt daher

$$Mc^2 = 2cp_*, \quad \boxed{p_* = \frac{Mc}{2}}.$$

Aufgrund der Symmetrie gilt zu jeder Zeit

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

Auf jedes Quark wirkt eine Kraft vom Betrag f , die zum anderen Quark gerichtet ist und damit auch zum Ursprung, solange die Quarks räumlich getrennt sind. Daher führt jedes die in Teil 1 gefundene Bewegung aus, mit

$$\boxed{\tau = \frac{Mc}{2f}}, \quad \boxed{a = c\tau = \frac{Mc^2}{2f}}.$$

Die vollständige Energiegleichung bestätigt dies:

$$Mc^2 = 2c|p_1| + f|x_1 - x_2| = 2(c|p_1| + f|x_1|).$$

Die folgende Tabelle legt beide Diagramme für eine Periode fest:

t/τ	x_1/a	p_1/p_*	x_2/a	p_2/p_*
0	0	1	0	-1
1	1	0	-1	0
2	0	-1	0	1
3	-1	0	1	0
4	0	1	0	-1

Für die Orts-Zeit-Diagramme werden die Ortseinträge jedes Quarks durch gerade Linien verbunden. Die beiden dreieckförmigen Kurven sind Spiegelbilder voneinander bezüglich $x = 0$, und die Quarks treten bei $t = 2\tau$ durcheinander hindurch.

Für jedes der beiden Phasendiagramme gilt

$$\boxed{\frac{|x_i|}{a} + \frac{|p_i|}{p_*} = 1}.$$

Quark 1 beginnt bei $(x, p) = (0, p_*)$, Quark 2 dagegen bei $(0, -p_*)$. Beide durchlaufen die Raute im Uhrzeigersinn.

An den Umkehrpunkten befinden sich die Quarks an gegenüberliegenden äußersten Positionen, sodass

$$\boxed{d_{\max} = 2a = \frac{Mc^2}{f}}.$$

Ihre jeweilige Periodendauer beträgt

$$\boxed{T = 4\tau = \frac{2Mc}{f}}.$$

3) Bewegung und maximaler Abstand im Laborsystem

Für die gegebene Transformation gilt

$$\beta = \frac{3}{5}, \quad \gamma = \frac{5}{4},$$

also

$$\gamma(1 + \beta) = 2, \quad \gamma(1 - \beta) = \frac{1}{2}.$$

Ein Abschnitt mit der Geschwindigkeit $u = \pm c$ wird transformiert zu

$$u' = \frac{u + \beta c}{1 + \beta u/c} = \pm c.$$

Somit haben auch alle Bahnabschnitte im Laborsystem die Steigungen $+c$ oder $-c$. Ihre Endpunkte erhalten wir durch Transformation der Umkehrereignisse.

Beispielsweise findet die erste Richtungsumkehr von Quark 1 bei $(t, x) = (\tau, a)$ statt, mit $a = c\tau$. Daher gilt

$$t' = \gamma\tau(1 + \beta) = 2\tau, \quad x' = \gamma a(1 + \beta) = 2a.$$

Alle vier Umkehrereignisse innerhalb eines Zyklus sind:

Umkehrereignis	t'	x'
Quark 2, erste Umkehr	$\frac{\tau}{2} = \frac{Mc}{4f}$	$-\frac{a}{2} = -\frac{Mc^2}{4f}$
Quark 1, erste Umkehr	$2\tau = \frac{Mc}{f}$	$2a = \frac{Mc^2}{f}$
Quark 1, zweite Umkehr	$3\tau = \frac{3Mc}{2f}$	$a = \frac{Mc^2}{2f}$
Quark 2, zweite Umkehr	$\frac{9\tau}{2} = \frac{9Mc}{4f}$	$\frac{7a}{2} = \frac{7Mc^2}{4f}$

Beide Bahnkurven beginnen bei $(t', x') = (0, 0)$. Der Durchgang im Ruhesystem bei $(t, x) = (2\tau, 0)$ wird zu

$$(t', x') = \left(\frac{5\tau}{2}, \frac{3a}{2} \right).$$

Das Ende des Zyklus im Ruhesystem, $(4\tau, 0)$, wird zu

$$(t', x') = (5\tau, 3a).$$

Diese Punkte und die Tabelle der Umkehrpunkte legen die Diagramme im Laborsystem vollständig fest: Die aufeinanderfolgenden Punkte jedes Quarks werden durch gerade Linien verbunden. Die nachfolgenden Zyklen wiederholen sich mit folgender Verschiebung beider Kurven:

$$\Delta t' = 5\tau = \gamma T, \quad \Delta x' = 3a.$$

Um den beobachteten Abstand zu bestimmen, müssen die beiden Orte zur **selben Laborzeit** ausgewertet werden:

$$d'(t') = |x'_1(t') - x'_2(t')|.$$

Zu Beginn gilt

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = -ct',$$

sodass der Abstand gemäß $2ct'$ wächst. Quark 2 kehrt zuerst um, bei $t' = \tau/2$. In diesem Augenblick gilt

$$x'_1 = \frac{a}{2}, \quad x'_2 = -\frac{a}{2},$$

und somit $d' = a$.

Von $t' = \tau/2$ bis $t' = 2\tau$ bewegen sich beide Quarks mit der Geschwindigkeit c nach rechts:

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = ct' - a.$$

Ihr Abstand bleibt daher gleich a . Anschließend nimmt er bis $5\tau/2$ auf null ab, wächst bis 3τ wieder auf a , bleibt bis $9\tau/2$ bei a und nimmt bis 5τ auf null ab. Dieses Muster wiederholt sich.

Somit gilt

$$d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f} = \frac{1}{2} d_{\max}.$$

Die unterschiedlichen Umkehrzeitpunkte im Laborsystem sind entscheidend: Die beiden im Ruhesystem gleichzeitigen Umkehrereignisse sind im Laborsystem nicht gleichzeitig.

4) Energie des Mesons im Laborsystem

Für das gesamte Meson ist der Gesamtimpuls im Ruhesystem null, und seine Gesamtenergie beträgt Mc^2 . Die Transformation seiner Energie ergibt

$$E' = \gamma(E + \beta cP_x) = \gamma Mc^2.$$

Mit den gegebenen Werten gilt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = \frac{1}{0.80} = 1.25,$$

und daher

$$E' = 1.25(140 \text{ MeV}) = 175 \text{ MeV}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Supraleitender Magnet

Supraleitende Magnete werden in Laboratorien häufig eingesetzt. Die gebräuchlichste Bauform eines supraleitenden Magneten ist eine Zylinderspule aus supraleitendem Draht. Das Bemerkenswerte an einem supraleitenden Magneten ist, dass er starke Magnetfelder ohne Energieverluste durch Joulesche Wärme erzeugt, da der elektrische Widerstand des supraleitenden Drahtes null wird, wenn der Magnet in flüssiges Helium bei einer Temperatur von 4.2 K eingetaucht wird. Üblicherweise ist der Magnet mit einem speziell konstruierten supraleitenden Schalter ausgestattet, wie in Abb. 1 dargestellt. Der Widerstand r des Schalters lässt sich steuern: entweder gilt $r = 0$ im supraleitenden Zustand oder $r = r_n$ im normalleitenden Zustand. Im Dauerstrombetrieb zirkuliert ein Strom unbegrenzt durch den Magneten und den supraleitenden Schalter. Der Dauerstrombetrieb ermöglicht es, bei abgetrennter externer Stromquelle über lange Zeit ein konstantes Magnetfeld aufrechtzuerhalten.

Die Einzelheiten des supraleitenden Schalters sind in Abb. 1 nicht dargestellt. Üblicherweise besteht er aus einem kurzen Stück supraleitenden Drahtes, das mit einem Heizdraht umwickelt und gegenüber dem Bad aus flüssigem Helium ausreichend wärmeisoliert ist. Beim Heizen steigt die Temperatur des supraleitenden Drahtes, und er geht wieder in den normalleitenden Zustand mit endlichem Widerstand über. Der typische Wert von r_n beträgt einige Ohm. Hier nehmen wir dafür $5\ \Omega$ an. Die Induktivität eines supraleitenden Magneten hängt von seiner Größe ab; für den Magneten in Abb. 1 sei sie $10\ \text{H}$. Der Gesamtstrom I lässt sich durch Einstellen des Widerstands R verändern.

Diese Aufgabe wird ausschließlich anhand der Diagramme bewertet!

Die Pfeile kennzeichnen die positiven Richtungen von I , I_1 und I_2 .

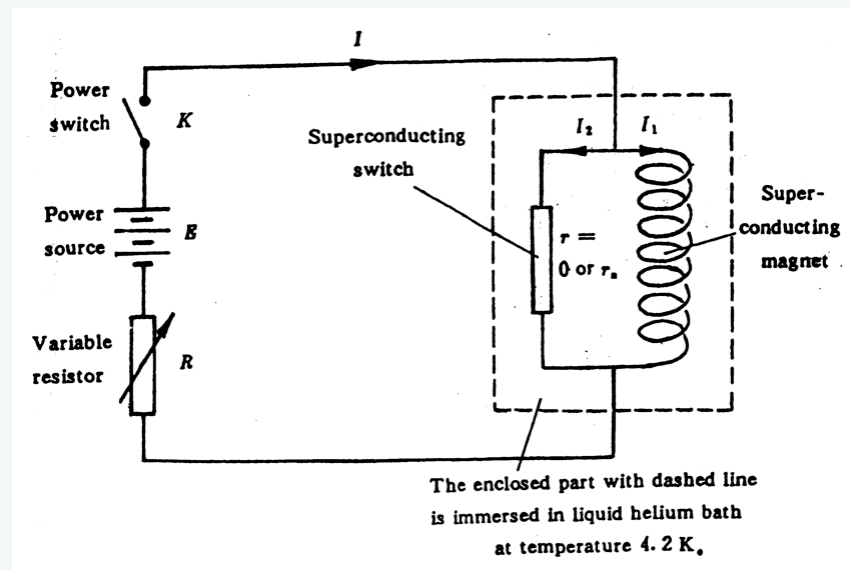


Abb. 1

1) Der Gesamtstrom I und der Widerstand r des supraleitenden Schalters werden so gesteuert, dass sie sich zeitlich wie in Abb. 2a bzw. 2b dargestellt ändern. Unter der Annahme, dass die durch den Magneten bzw. den Schalter fließenden Ströme I_1 und I_2 zu Beginn gleich sind (Abb. 2c und Abb. 2d), wie ändern sie sich mit der Zeit von t_1 bis t_4 ? Zeichnen Sie Ihre Antwort in Abb. 2c und Abb. 2d ein.

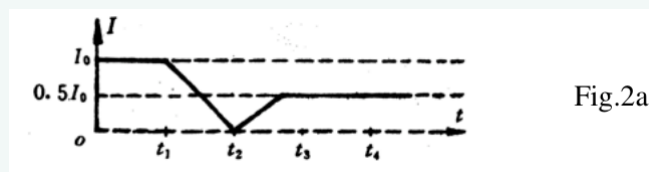
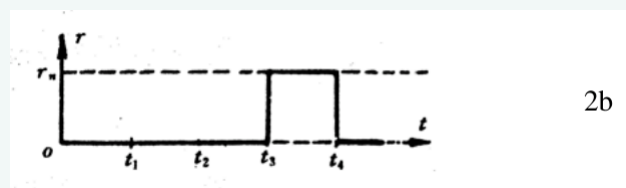


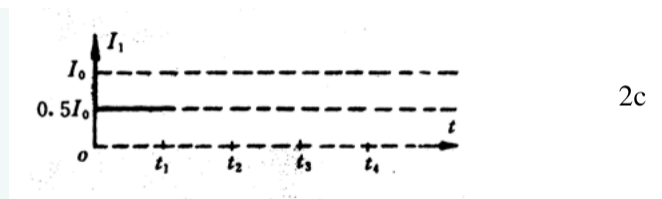
Fig.2a

Abb. 2a



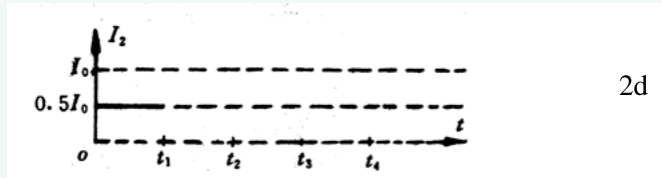
2b

2b



2c

2c



2d

2d

2) Der Schalter K werde zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen, wobei $r = 0$, $I_1 = 0$ und $R = 7.5 \Omega$ gelten und der Gesamtstrom I gleich 0.5 A ist. Während K geschlossen bleibt, wird der Widerstand r des supraleitenden Schalters wie in Abb. 3b dargestellt verändert. Zeichnen Sie die entsprechenden zeitlichen Verläufe von I , I_1 und I_2 in Abb. 3a, 3c bzw. 3d ein.

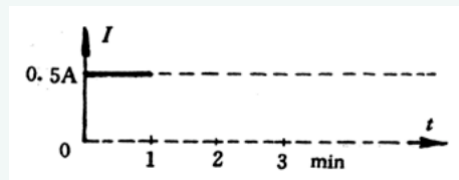
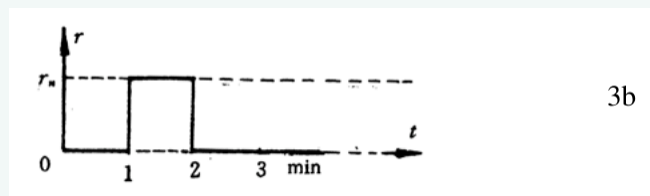
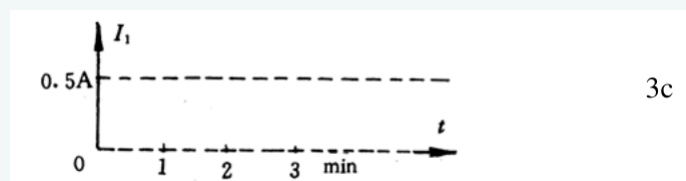


Abb. 3a



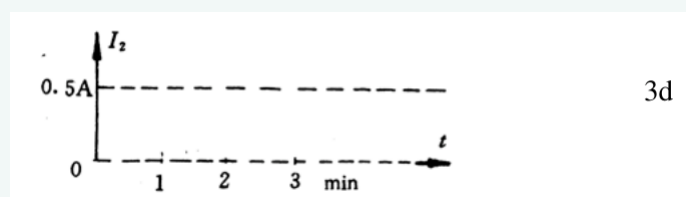
3b

3b



3c

3c



3d

3d

3) Durch den supraleitenden Schalter dürfen im normalleitenden Zustand nur kleine Ströme von weniger als 0.5 A fließen; bei größeren Strömen brennt der Schalter durch. Der supraleitende Magnet werde von $t = 0$ bis $t = 3\text{ min}$ im Dauerstrombetrieb betrieben, d. h. mit $I = 0$, $I_1 = i_1$ (z. B. 20 A) und $I_2 = -i_1$, wie in Abb. 4 dargestellt. Wie würden Sie vorgehen, wenn das Experiment beendet werden soll, indem der Strom durch den Magneten auf null verringert wird? Dazu sind mehrere Bedienungsschritte erforderlich. Zeichnen Sie die entsprechenden Änderungen von I , r , I_1 und I_2 in Abb. 4 ein.

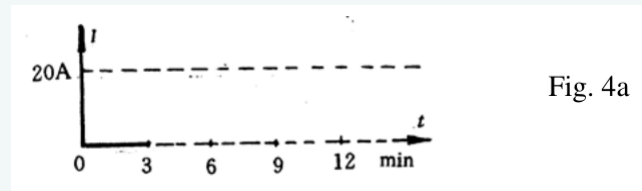
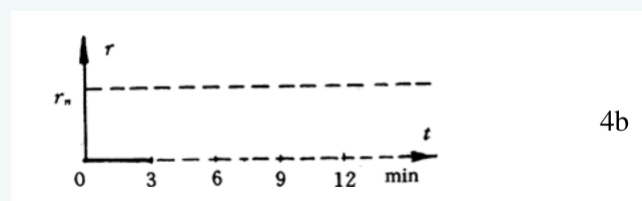
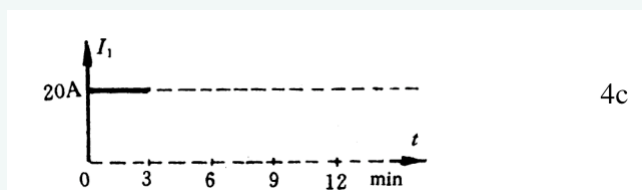


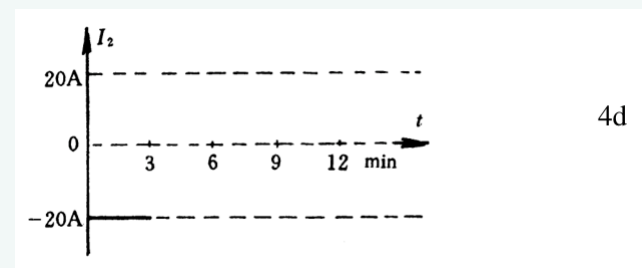
Abb. 4a



4b



4c



4d

4) Der Magnet werde im Dauerstrombetrieb mit einem Dauerstrom von 20 A betrieben (von $t = 0$ bis $t = 3\text{ min}$, siehe Abb. 5). Wie würden Sie ihn in einen Dauerstrombetrieb mit einem Strom von 30 A überführen? Zeichnen Sie Ihre Antwort in Abb. 5 ein.

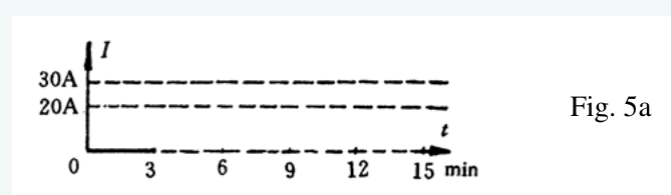
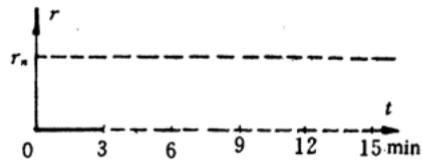
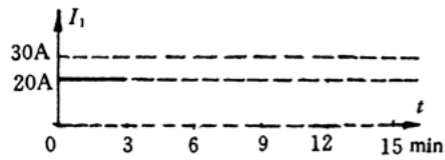


Abb. 5a



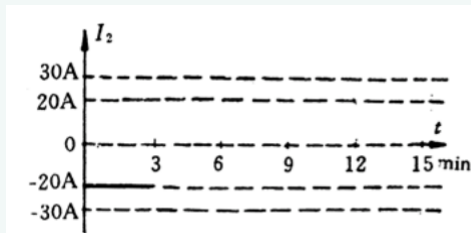
5b

5b



5c

5c



5d

5d

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

1. Während des gesamten vorgegebenen Ablaufs gilt

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

Somit fällt I_2 linear von $+I_0/2$ bei t_1 auf $-I_0/2$ bei t_2 , steigt linear auf null, während I seinen konstanten Wert erreicht, und bleibt über t_3 und t_4 hinweg null.

2. Die elektromotorische Kraft der Quelle beträgt 3.75 V. Zu Beginn gilt

$$(I, I_1, I_2) = (0.50, 0, 0.50) \text{ A}.$$

Bei 1 min springen I und I_2 auf 0.30 A, während I_1 null bleibt. Anschließend nähern sie sich exponentiell (0.50, 0.50, 0) A mit der Zeitkonstante

$$\tau_R = \frac{10}{3} \text{ s} \approx 3.33 \text{ s}.$$

Nach 2 min gilt $I = 0.50 \text{ A}$, I_1 ist konstant und $I_2 \approx 0$. Die exakten Ausdrücke stehen weiter unten.

3. Bei $r = 0$ wird zunächst I von null auf 20 A erhöht, wobei $I_1 = 20\text{ A}$ bleibt. Anschließend wird $r = 5\ \Omega$ eingestellt, I langsam auf null verringert und K geöffnet. Der verbleibende Magnetstrom klingt exponentiell mit der Zeitkonstante 2.0 s ab. Mit der unten angegebenen dreiminütigen Rampe gilt

$$|I_2| < 0.223\text{ A} < 0.5\text{ A}$$

während des gesamten normalleitenden Zustands.

4. Zunächst wird bei $r = 0$ der Strom auf $I = I_1 = 20\text{ A}$ eingestellt. Dann wird $r = 5\ \Omega$ eingestellt und I_1 während einer dreiminütigen Rampe mit $I_2 = 1/9\text{ A}$ auf 30 A erhöht. Anschließend wird $I = 30\text{ A}$ eingestellt, der Schalter bis zu $r = 0$ abgekühlt und I auf null verringert. Der abschließende Dauerstromzustand ist

$$I = 0, \quad I_1 = 30\text{ A}, \quad I_2 = -30\text{ A}, \quad r = 0.$$

Lösung

Wir behandeln den Magneten als ideale Spule mit konstanter Induktivität $L = 10\text{ H}$. Wir vernachlässigen den Widerstand der Zuleitungen, parasitäre Induktivitäten und die Schaltzeit, wie es in der Aufgabenstellung implizit vorausgesetzt wird.

Mit den angegebenen Stromrichtungen liefert die Kirchhoffsche Knotenregel

$$I = I_1 + I_2.$$

Am Magneten und am supraleitenden Schalter liegt dieselbe Klemmenspannung an:

$$V = L \frac{dI_1}{dt} = rI_2.$$

Damit lautet die zentrale Gleichung

$$L \frac{dI_1}{dt} = r(I - I_1).$$

Bei $r = 0$ ist der Magnetstrom konstant. Änderungen des Quellenstroms fließen dann vollständig durch den supraleitenden Schalter:

$$\frac{dI_1}{dt} = 0, \quad I_2 = I - I_1.$$

Wenn $r = r_n$ gilt und der Gesamtstrom vorgegeben ist, wird die Gleichung zu

$$\tau \frac{dI_1}{dt} + I_1 = I, \quad \tau = \frac{L}{r_n} = 2.0\text{ s}.$$

Der Spulenstrom bleibt an den Schaltzeitpunkten stetig; I und I_2 können springen.

1) Vorgegebener Gesamtstrom und Schalterwiderstand

Zu Beginn sind die beiden Zweigströme gleich, also gilt

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2}.$$

Bis t_3 ist der Schalter supraleitend. Daher gilt

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

Bis t_3 hat der vorgegebene Strom den Wert $I_0/2$ erreicht. Somit gilt $I_2 = 0$, wenn der Schalter normalleitend wird. Während $t_3 < t < t_4$ gilt

$$L \frac{dI_1}{dt} = r_n \left(\frac{I_0}{2} - I_1 \right) = 0.$$

Die Ströme bleiben folglich unverändert. Auch die Rückkehr des Schalters zu $r = 0$ bei t_4 bewirkt keine Änderung.

Die gesuchten Diagramme sind:

- **Abb. 2c:** durchgehend eine waagerechte Linie bei $I_1 = I_0/2$.
- **Abb. 2d:** eine waagerechte Linie bei $I_0/2$ bis t_1 , gefolgt von einem geradlinigen Abfall auf $-I_0/2$ bei t_2 . Sie schneidet die Nulllinie in der Mitte zwischen t_1 und t_2 . Anschließend steigt sie linear auf null, sobald das vorgegebene I den Wert $I_0/2$ erreicht, und bleibt über t_3, t_4 und danach bei null.

Der negative Abschnitt von Abb. 2d muss unterhalb der ursprünglichen Nulllinie eingezeichnet werden.

2) Fester Quellenwiderstand

Die elektromotorische Kraft der Quelle sei $\mathcal{E}$. Anfangs gilt $r = 0$, sodass an der Parallelschaltung keine Spannung anliegt:

$$\mathcal{E} = RI = (7.5 \Omega)(0.50 \text{ A}) = \boxed{3.75 \text{ V}}.$$

Für $0 \leq t < 60 \text{ s}$ bleibt der Magnetstrom bei seinem Anfangswert null:

$$\boxed{I = 0.50 \text{ A}, \quad I_1 = 0, \quad I_2 = 0.50 \text{ A}.}$$

Bei $t = 60 \text{ s}$ wird der Schalter normalleitend. Da I_1 nicht springen kann, bleibt sein Wert unmittelbar danach null, woraus folgt

$$I(60^+) = I_2(60^+) = \frac{\mathcal{E}}{R + r_n} = \frac{3.75}{12.5} = \boxed{0.30 \text{ A}}.$$

Während des normalleitenden Zeitintervalls liefert die Kirchhoffsche Maschenregel

$$\mathcal{E} = R(I_1 + I_2) + r_n I_2,$$

und damit

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - RI_1}{R + r_n}.$$

Durch Kombination mit der Spulengleichung ergibt sich

$$L \frac{dI_1}{dt} = \frac{r_n R}{R + r_n} \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_1 \right).$$

Somit gilt

$$\boxed{\tau_R = \frac{L(R + r_n)}{Rr_n} = \frac{10(7.5 + 5)}{7.5(5)} \text{ s} = \frac{10}{3} \text{ s}.}$$

Für $60 \leq t < 120 \text{ s}$ definieren wir

$$x = \frac{t - 60 \text{ s}}{\tau_R}.$$

Die Ströme sind

$$\begin{aligned} I_1(t) &= (0.50 \text{ A})(1 - e^{-x}), \\ I_2(t) &= (0.30 \text{ A})e^{-x}, \\ I(t) &= 0.50 \text{ A} - (0.20 \text{ A})e^{-x}. \end{aligned}$$

Bei $t = 120 \text{ s}$ gilt $x = 18$, und der Schalter kehrt zu $r = 0$ zurück. Der Quellenstrom wird zu $\mathcal{E}/R = 0.50 \text{ A}$, während der Magnetstrom seinen zu diesem Zeitpunkt bestehenden Wert beibehält. Daher gilt für alle $t \geq 120 \text{ s}$

$$\begin{aligned} I &= 0.50 \text{ A}, \\ I_1 &= (0.50 \text{ A})(1 - e^{-18}), \\ I_2 &= (0.50 \text{ A})e^{-18} \approx 7.6 \text{ nA}. \end{aligned}$$

Die Merkmale der Diagramme sind:

- **Abb. 3a:** $I = 0.50 \text{ A}$ bis zur ersten Minute; ein senkrechter Abfall auf 0.30 A ; danach ein exponentieller, nach unten gekrümmter Anstieg gegen 0.50 A .
- **Abb. 3c:** $I_1 = 0$ bis zur ersten Minute; danach ein stetiger, nach unten gekrümmter exponentieller Anstieg gegen 0.50 A . Ab der zweiten Minute ist der Strom exakt konstant.
- **Abb. 3d:** $I_2 = 0.50 \text{ A}$ bis zur ersten Minute; ein senkrechter Abfall auf 0.30 A ; danach ein exponentielles Abklingen gegen null.

Bei zwei Minuten weisen I und I_2 Sprünge nach oben von nur etwa 3.0 nA auf, die im vorgegebenen Maßstab nicht sichtbar sind. Alle sichtbaren Übergangsvorgänge nehmen nur einen kleinen Bruchteil einer Minute in Anspruch.

3) Verringern des Dauerstroms auf null

Die Strombegrenzung gilt für den Betrag des Schalterstroms im normalleitenden Zustand:

$$|I_2| < 0.5 \text{ A}.$$

Da

$$I_2 = \frac{L}{r_n} \frac{dI_1}{dt},$$

erfordert sie

$$\left| \frac{dI_1}{dt} \right| < \frac{r_n}{L} (0.5 \text{ A}) = 0.25 \text{ A s}^{-1}.$$

Würde der Schalter im anfänglichen Dauerstromzustand sofort erwärmt, würden 20 A durch ihn fließen. Wir müssen seinen Strom zunächst auf die externe Quelle übertragen, solange er noch supraleitend ist.

Für das Beispiel mit 20 A lässt sich der folgende konkrete Zeitplan angeben.

Von 0 bis 3 min: den vorgegebenen Dauerstromzustand beibehalten:

$$I = 0, \quad r = 0, \quad I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = -20 \text{ A}.$$

Von 3 bis 6 min: $r = 0$ beibehalten, K bei ausreichend großem R schließen und I linear von null auf 20 A erhöhen. Dann gilt

$$I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = I - 20 \text{ A}.$$

Somit steigt I_2 linear von -20 A auf null. Bei sechs Minuten liefert die Quelle den gesamten Magnetstrom.

Von 6 bis 9 min: $r = r_n = 5 \Omega$ einstellen und den Gesamtstrom linear von 20 A auf null verringern.

Es sei

$$u = t - 360 \text{ s}, \quad T = 180 \text{ s}, \quad a = \frac{20 \text{ A}}{T} = \frac{1}{9} \text{ A s}^{-1}.$$

Während dieses Intervalls gilt

$$I = 20 \text{ A} - au.$$

Die Lösung von $\tau \dot{I}_1 + I_1 = I$ mit $I_1(0) = 20 \text{ A}$ ergibt

$$\begin{aligned} I_1 &= 20 \text{ A} - au + a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \\ I_2 &= -a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \end{aligned} \quad \tau = 2.0 \text{ s}.$$

Folglich gilt

$$|I_2| \leq a\tau = \frac{2}{9} \text{ A} \approx 0.222 \text{ A} < 0.5 \text{ A}.$$

Der Magnetstrom folgt dem abnehmenden Quellenstrom mit einem geringfügig höheren Wert.

Bei 9 min und danach: der Quellenstrom hat null erreicht. K öffnen und den Schalter normalleitend lassen. Der verbleibende Magnetstrom beträgt

$$D = \frac{2}{9}(1 - e^{-90}) \text{ A} \approx 0.222 \text{ A}.$$

Er zirkuliert durch den Magneten und den normalleitenden Schalter und klingt gemäß

$$I = 0, \quad I_1 = De^{-(t-540 \text{ s})/\tau}, \quad I_2 = -De^{-(t-540 \text{ s})/\tau}.$$

ab. Nach weiteren 10 s gilt $I_1 \approx 1.5 \text{ mA}$, und der Strom nähert sich weiter null.

Die vollständigen Diagramme in Abb. 4 sind daher:

Diagramm	Erforderlicher Verlauf
4a: I	Null bis 3 min; linearer Anstieg auf 20 A bei 6 min; linearer Abfall auf null bei 9 min; danach null.
4b: r	Null bis 6 min; Sprung auf 5Ω ; während des abschließenden Abklingens normalleitend bleiben.
4c: I_1	20 A bis 6 min; glatter Übergang in einen nahezu linearen Abfall, der bei 9 min ungefähr 0.222 A erreicht; danach exponentielles Abklingen auf null.
4d: I_2	-20 A bis 3 min; linearer Anstieg auf null bei 6 min; wird leicht negativ und nähert sich -0.222 A ; kehrt nach 9 min exponentiell von unten gegen null zurück.

Wie bei jedem passiven Abklingvorgang in einem RL -Kreis wird exakt null nur asymptotisch erreicht. Im Diagramm mit einer Zeitskala in Minuten ist die abschließende Abklingphase nicht von null zu unterscheiden. Würde der Schalter vor dem Ende dieser Abklingphase wieder auf $r = 0$ gebracht, bliebe der restliche Strom erhalten.

Für einen anderen Anfangswert i_1 gilt dasselbe Verfahren mit einer ausreichend langsamen Rampe, um die Grenze von 0.25 A s^{-1} einzuhalten.

4) Ändern des Dauerstroms von 20 A auf 30 A

Auch hier wird zunächst der Quellenstrom an den bestehenden Magnetstrom angepasst, bevor der Schalter erwärmt wird.

Wir können eine exakt lineare Rampe des Magnetstroms mit einer Dauer von drei Minuten wählen:

$$\alpha = \frac{30 - 20}{180} \text{ A s}^{-1} = \frac{1}{18} \text{ A s}^{-1}.$$

Der während dieser Rampe erforderliche Schalterstrom beträgt

$$\delta = \frac{L}{r_n} \alpha = \frac{1}{9} \text{ A} \approx 0.111 \text{ A},$$

also deutlich weniger als der Grenzwert im normalleitenden Zustand.

Um diese Rampe exakt zu erzeugen, geben wir vor:

$$I = I_1 + \delta.$$

Für $u = t - 360 \text{ s}$, $0 < u < 180 \text{ s}$, gilt

$$I_1 = 20 \text{ A} + \alpha u, \quad I_2 = \delta, \quad I = 20 \text{ A} + \alpha u + \delta.$$

Tatsächlich gilt $r_n I_2 = r_n \delta = L \alpha = L dI_1/dt$.

Ein vollständiger Zeitplan, der alle vier Diagramme festlegt, lautet:

Zeit (min)	I (A), Abb. 5a	r (Ω), Abb. 5b	I_1 (A), Abb. 5c	I_2 (A), Abb. 5d
0–3	0	0	20	–20
3–6	Linear $0 \rightarrow 20$	0	20	Linear $-20 \rightarrow 0$
6–9	Linear $20 + \delta \rightarrow 30 + \delta$	5	Linear $20 \rightarrow 30$	$\delta = 1/9$
9–12	30	5	30	0
12–15	Linear $30 \rightarrow 0$	0	30	Linear $0 \rightarrow -30$
Nach 15	0	0	30	–30

Der Zahlenwert von δ in der Tabelle ist dabei in Ampere angegeben.

Die Einzelheiten des Schaltens sind wesentlich:

- **Bei 6 min:** Es gilt $I = I_1 = 20 \text{ A}$, also $I_2 = 0$. Den Schalter normalleitend machen und dann I um den kleinen Betrag δ erhöhen. Dadurch beginnt die lineare Rampe des Magnetstroms ohne einen Sprung in I_1 .
- **Bei 9 min:** I_1 hat exakt 30 A erreicht. I von $30 + \delta$ auf 30 A verringern. Dann gilt $I_2 = 0$, sodass der Magnetstrom konstant bleibt.
- **Bei 12 min:** Den Schalter wieder auf $r = 0$ bringen. I während der nächsten drei Minuten auf null verringern. Der Magnetstrom bleibt unverändert bei 30 A , während I_2 zunehmend negativ wird.
- **Bei 15 min:** K öffnen. Durch den Magneten und den supraleitenden Schalter fließen gleich große, entgegengesetzt gerichtete Ströme mit dem Betrag 30 A .

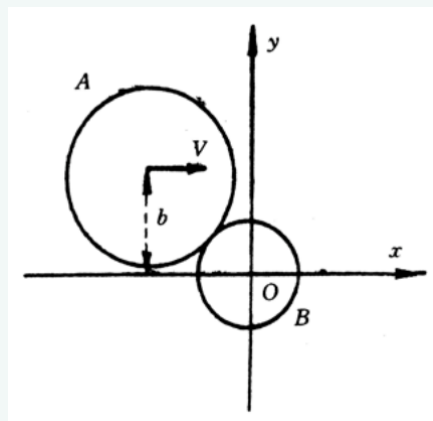
Somit enthält Abb. 5a kleine Sprünge von 0.111 A bei 6 und 9 min. Abb. 5d weist während 6–9 min einen kleinen positiven Rechteckimpuls auf. Die großen negativen Schalterströme treten nur bei $r = 0$ auf und verletzen daher die angegebene Begrenzung für den normalleitenden Zustand nicht.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 3: Stoß von Scheiben mit Oberflächenreibung

Eine homogene Scheibe A mit der Masse m und dem Radius R_A bewegt sich auf einer glatten horizontalen x - y -Ebene translatorisch mit der Geschwindigkeit V in x -Richtung (siehe die Abbildung auf der nächsten Seite). Der Mittelpunkt der Scheibe befindet sich im Abstand b von der x -Achse. Sie stößt mit einer ruhenden homogenen Scheibe B zusammen, deren Mittelpunkt sich anfangs im Ursprung des Koordinatensystems befindet. Die Scheibe B hat dieselbe Masse und dieselbe Dicke wie A, ihr Radius ist jedoch R_B . Es wird angenommen, dass die Geschwindigkeiten der Scheiben an ihrem Berührungspunkt in der Richtung senkrecht zur Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte nach dem Stoß gleich sind. Außerdem wird angenommen, dass die Beträge der Relativgeschwindigkeiten der Scheiben entlang der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte vor und nach dem Stoß gleich sind.

- 1) Bestimmen Sie für einen solchen Stoß die X- und Y-Komponenten der Geschwindigkeiten beider Scheiben nach dem Stoß, d. h. V'_{AX} , V'_{AY} , V'_{BX} und V'_{BY} , in Abhängigkeit von m , R_A , R_B , V und b .
- 2) Bestimmen Sie die kinetischen Energien E'_A der Scheibe A und E'_B der Scheibe B nach dem Stoß in Abhängigkeit von m , R_A , R_B , V und b .



Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Es sei $D = R_A + R_B$. Damit ein Stoß stattfindet, gilt $0 \leq b < D$, wobei sich A wie dargestellt oberhalb der x -Achse befindet.

1. Die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$\boxed{V'_{AX} = \frac{5Vb^2}{6D^2}}, \quad \boxed{V'_{AY} = \frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2}},$$

$$\boxed{V'_{BX} = V \left(1 - \frac{5b^2}{6D^2}\right)}, \quad \boxed{V'_{BY} = -\frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2}}.$$

2. Unter Berücksichtigung sowohl der Translation als auch der Rotation gilt

$$\boxed{E'_A = \frac{3mV^2b^2}{8D^2}}, \quad \boxed{E'_B = \frac{mV^2}{2} \left(1 - \frac{11b^2}{12D^2}\right)}.$$

Lösung

1) Geschwindigkeiten nach dem Stoß

Wir betrachten den Stoß als augenblicklich, sodass die Verbindungslinie der Mittelpunkte während des Stoßes unverändert bleibt. Die glatte horizontale Ebene übt weder einen horizontalen Kraftstoß noch ein Drehmoment um die vertikale Achse aus. Anfangs rotiert keine der beiden Scheiben.

Wir definieren

$$s = \frac{b}{D}, \quad c = \sqrt{1 - s^2}, \quad D = R_A + R_B.$$

Beim ersten Kontakt befindet sich der Mittelpunkt von A bei $(-Dc, b)$, während der Mittelpunkt von B im Ursprung liegt. Die Einheitsvektoren entlang der Verbindungslinie von A nach B und senkrecht dazu lauten somit

$$\mathbf{n} = (c, -s), \quad \mathbf{t} = (s, c).$$

Die Anfangsgeschwindigkeit von A ist

$$\mathbf{v}_A = Vc\mathbf{n} + Vs\mathbf{t}.$$

Der auf B ausgeübte Kraftstoß sei

$$\mathbf{J} = J_n\mathbf{n} + J_t\mathbf{t}.$$

Der Kraftstoß auf A ist $-\mathbf{J}$. Aus dem Impulssatz folgt daher

$$v'_{An} = Vc - \frac{J_n}{m}, \quad v'_{Bn} = \frac{J_n}{m},$$

$$v'_{At} = Vs - \frac{J_t}{m}, \quad v'_{Bt} = \frac{J_t}{m}.$$

Die normale Relativgeschwindigkeit kehrt ihre Richtung um, behält aber ihren Betrag bei: Vor dem Stoß nähern sich die Scheiben einander, danach entfernen sie sich voneinander. Folglich gilt

$$v'_{Bn} - v'_{An} = Vc,$$

also

$$\frac{2J_n}{m} - Vc = Vc \quad \implies \quad J_n = mVc.$$

Damit ergibt sich

$$\boxed{v'_{An} = 0, \quad v'_{Bn} = Vc.}$$

Zur Bestimmung des tangentialen Kraftstoßes müssen wir die Rotation berücksichtigen. Die Trägheitsmomente sind

$$I_A = \frac{1}{2}mR_A^2, \quad I_B = \frac{1}{2}mR_B^2.$$

Wir wählen die Winkelgeschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn als positiv. Die Berührungspunkte liegen relativ zum Mittelpunkt von A bei $R_A \mathbf{n}$ und relativ zum Mittelpunkt von B bei $-R_B \mathbf{n}$. Aus dem Drehimpulssatz folgt

$$I_A \omega'_A = -R_A J_t, \quad I_B \omega'_B = -R_B J_t.$$

Daher gilt

$$\omega'_A = -\frac{2J_t}{mR_A}, \quad \omega'_B = -\frac{2J_t}{mR_B}.$$

Die Tangentialgeschwindigkeiten der sich berührenden Materialpunkte sind

$$u'_{At} = v'_{At} + R_A \omega'_A = Vs - \frac{3J_t}{m},$$

$$u'_{Bt} = v'_{Bt} - R_B \omega'_B = \frac{3J_t}{m}.$$

Die vorgegebene Gleichheit dieser Geschwindigkeiten erfordert

$$Vs - \frac{3J_t}{m} = \frac{3J_t}{m},$$

woraus folgt

$$\boxed{J_t = \frac{mVs}{6}}.$$

Somit gilt

$$\boxed{v'_{At} = \frac{5}{6}Vs, \quad v'_{Bt} = \frac{1}{6}Vs},$$

und die für Teil 2 benötigten Winkelgeschwindigkeiten sind

$$\boxed{\omega'_A = -\frac{Vs}{3R_A}, \quad \omega'_B = -\frac{Vs}{3R_B}}.$$

Bei der dargestellten Geometrie rotieren beide Scheiben im Uhrzeigersinn.

Bei der Rückkehr zu kartesischen Koordinaten erhalten wir

$$\mathbf{v}'_A = \frac{5}{6}Vs \mathbf{t} = \left(\frac{5}{6}Vs^2, \frac{5}{6}Vsc \right),$$

$$\mathbf{v}'_B = Vc \mathbf{n} + \frac{1}{6}Vs \mathbf{t} = \left(V \left(c^2 + \frac{s^2}{6} \right), -\frac{5}{6}Vsc \right).$$

Mit $c^2 = 1 - s^2$, $s = b/D$ und $c = \sqrt{D^2 - b^2}/D$ ergeben sich die vier Komponenten im Abschnitt Antworten. Ihre Summen erfüllen die Impulserhaltung:

$$V'_{AX} + V'_{BX} = V, \quad V'_{AY} + V'_{BY} = 0.$$

2) Kinetische Energien nach dem Stoß

Die kinetische Energie jeder Scheibe umfasst die Translation ihres Mittelpunkts und die Rotation um ihren Mittelpunkt:

$$E'_i = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'_i|^2 + \frac{1}{2}I_i(\omega'_i)^2.$$

Für A gilt

$$\begin{aligned} E'_A &= \frac{1}{2}m\left(\frac{5}{6}Vs\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR_A^2\right)\left(\frac{Vs}{3R_A}\right)^2 \\ &= \left(\frac{25}{72} + \frac{1}{36}\right)mV^2s^2 \\ &= \frac{3}{8}mV^2s^2. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich

$$E'_A = \frac{3mV^2b^2}{8(R_A + R_B)^2}.$$

Für B stehen die normale und die tangentielle Geschwindigkeitskomponente senkrecht aufeinander, also gilt

$$|\mathbf{v}'_B|^2 = V^2c^2 + \frac{V^2s^2}{36}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} E'_B &= \frac{1}{2}mV^2\left(c^2 + \frac{s^2}{36}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR_B^2\right)\left(\frac{Vs}{3R_B}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}mV^2c^2 + \frac{1}{24}mV^2s^2 \\ &= \frac{1}{2}mV^2\left(1 - \frac{11s^2}{12}\right). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$E'_B = \frac{mV^2}{2}\left(1 - \frac{11b^2}{12(R_A + R_B)^2}\right).$$

Zur Konsistenzprüfung berechnen wir den gesamten Verlust an kinetischer Energie:

$$\frac{1}{2}mV^2 - (E'_A + E'_B) = \frac{mV^2b^2}{12(R_A + R_B)^2} \geq 0.$$

Dieser Verlust entsteht durch tangentielle Reibung; die vorgegebene Elastizitätsbedingung gilt nur für die normale Relativbewegung. Bei einem zentralen Stoß, $b = 0$, kommt A zum Stillstand, B erhält die Geschwindigkeit V , keine der Scheiben rotiert, und es geht keine kinetische Energie verloren.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.