

## المسألة 1: جسيم نسبي

في نظرية النسبية الخاصة، تُعطى العلاقة بين الطاقة  $E$  والزخم  $P$  لجسيم حر كتلته السكونية  $m_0$  بالعلاقة

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = mc^2$$

عندما يخضع مثل هذا الجسيم لقوة محافظة، تكون طاقته الكلية، وهي مجموع  $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$  وطاقة الوضع، محفوظة. وإذا كانت طاقة الجسيم عالية جداً، أمكن إهمال طاقة سكونه (ويُسمى مثل هذا الجسيم جسيماً فائق النسبية).

(1) انظر في الحركة أحادية البعد لجسيم ذي طاقة عالية جداً (بحيث يمكن إهمال طاقة سكونه) يخضع لقوة مركزية تجاذبية ثابتة المقدار  $f$ . افترض أن الجسيم يوجد عند مركز القوة بزخم ابتدائي  $p_0$  عند الزمن  $t = 0$ . صف حركة الجسيم برسم كل مما يأتي على حدة، لمدة لا تقل عن دورة واحدة من الحركة:  $x$  بدلالة الزمن  $t$ ، والزخم  $p$  بدلالة الإحداثي المكاني  $x$ . حدّد إحداثيات «نقاط الانعطاف» بدلالة المعطيين  $p_0$  و  $f$ . وضح بالأسهم اتجاه سير الحركة في مخطط  $(p, x)$ . قد توجد فترات زمنية قصيرة لا يكون فيها الجسيم فائق النسبية، ولكن ينبغي إهمالها.

استخدم ورقة الإجابة 1.

(2) الميزون جسيم مكوّن من كواركين. تساوي الكتلة السكونية  $M$  للميزون الطاقة الكلية لمنظومة الكواركين مقسومة على  $c^2$ .

انظر في نموذج أحادي البعد لميزون ساكن، يُفترض فيه أن الكواركين يتحركان على محور  $x$  ويتجاذبان بقوة ثابتة المقدار  $f$ . ويُفترض أنهما يستطيعان المرور أحدهما عبر الآخر بحرية. ولتحليل حركة الكواركين عند الطاقات العالية، يمكن إهمال كتليتهما السكونيتين. عند الزمن  $t = 0$ ، يكون الكواركان كلاهما عند  $x = 0$ . مثلّ حركة كل من الكواركين على حدة بيانياً بمخطط  $(x, t)$  ومخطط  $(p, x)$ ، وحدّد إحداثيات «نقاط الانعطاف» بدلالة  $M$  و  $f$ ، ووضح اتجاه سير الحركة في مخطط  $(p, x)$ ، وأوجد المسافة القصوى بين الكواركين.

استخدم ورقة الإجابة 2.

(3) سنشير إلى الإطار المرجعي المستخدم في الجزء 2 بالإطار  $S$ ، ويتحرك إطار المختبر، المشار إليه بالرمز  $S'$ ، في اتجاه  $x$  السالب بسرعة ثابتة  $v = 0.6c$ . وقد اختيرت الإحداثيات في الإطارين المرجعيين بحيث تتطابق النقطة  $x = 0$  في  $S$  مع النقطة  $x' = 0$  في  $S'$  عند الزمن  $t = t' = 0$ . مثلّ حركة الكواركين بيانياً في مخطط  $(x', t')$ . حدّد إحداثيات نقاط الانعطاف بدلالة  $M$  و  $f$  و  $c$ ، وأوجد المسافة القصوى بين الكواركين كما تُرصد في إطار المختبر  $S'$ .

استخدم ورقة الإجابة 3.

ترتبط إحداثيات الجسيم المرصود في الإطارين المرجعيين  $S$  و  $S'$  بتحويل لورنتز

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + \beta ct), \\ t' = \gamma\left(t + \beta \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

حيث  $\beta = v/c$ ، و  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ، و  $v$  هي سرعة الإطار  $S$  المتحرك بالنسبة إلى الإطار  $S'$ .

(4) لميزون طاقة سكونه  $Mc^2 = 140 \text{ MeV}$  وسرعته  $0.60c$  بالنسبة إلى إطار المختبر  $S'$ ، أوجد طاقته  $E'$  في إطار المختبر  $S''$ .

## الإجابات

1. اختر  $p_0 > 0$ ، وعرف

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f}, \quad A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

يتكوّن منحنى الموضع-الزمن من قطع مستقيمة تمر بالنقاط

$$(t, x) : (0, 0) \rightarrow (\tau_0, A_0) \rightarrow (2\tau_0, 0) \rightarrow (3\tau_0, -A_0) \rightarrow (4\tau_0, 0).$$

نقطتا الانعطاف هما  $(\tau_0, A_0)$  و  $(3\tau_0, -A_0)$ ، و

$$T_1 = \frac{4p_0}{f}.$$

عند وضع  $x$  أفقيًا و  $p$  رأسيًا، يكون مخطط الطور مُعيّنًا يُجتاز في اتجاه عقارب الساعة

$$(x, p) : (0, p_0) \rightarrow (A_0, 0) \rightarrow (0, -p_0) \rightarrow (-A_0, 0) \rightarrow (0, p_0).$$

2. عرف

$$p_* = \frac{Mc}{2}, \quad \tau = \frac{Mc}{2f}, \quad a = \frac{Mc^2}{2f}.$$

يتبع الكوارك 1 الحركة الواردة في الجزء 1 مع  $p_0 = p_*$ ؛ أما الكوارك 2 فيحقق

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

موضعاهما عند زمني الانعطاف هما

$$t = \tau : (x_1, x_2) = (a, -a), \quad t = 3\tau : (x_1, x_2) = (-a, a).$$

يتبع المساران الطوريان المُعيّن نفسه في اتجاه عقارب الساعة، انطلاقًا من رأسي الزخم المتقابلين. ومن ثم

$$T = \frac{2Mc}{f}, \quad d_{\max} = \frac{Mc^2}{f}.$$

3. هنا  $\gamma = 5/4$ . باستخدام الإحداثيات  $(t'/\tau, x'/a)$ ، صل الرؤوس الآتية بخطوط مستقيمة:

$$\text{الكوارك 1: } (0, 0) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (5, 3),$$

$$\text{الكوارك 2: } (0, 0) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right) \rightarrow (5, 3).$$

الرأسان الداخليان لكل مسار هما نقطتا انعطافه. تتكرر الدورات اللاحقة بعد إزاحة  $(\Delta t', \Delta x') = (5\tau, 3a)$ . والمسافة

القصوى بين الكواركين عند قياس موضعيهما في اللحظة نفسها في المختبر هي

$$d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f}.$$

4. طاقة الميزون في المختبر هي

$$E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = 175 \text{ MeV}.$$

## الحل

تُرسَم منحنيات الموضع-الزمن أدناه بوضع الزمن أفقيًا والموضع رأسيًا. أما مخططات الطور فتضع  $x$  أفقيًا و  $p$  رأسيًا. ويُرمز إلى إطار المختبر بالرمز  $S'$  بصورة متسقة.

### (1) الحركة تحت تأثير القوة المركزية ثابتة المقدار

اختر اتجاه  $x$  الموجب في اتجاه الزخم الابتدائي، بحيث يكون  $p_0 > 0$ . في التقريب فائق النسبية،

$$E_{\text{particle}} \simeq c|p|, \quad \dot{x} = \frac{pc^2}{E_{\text{particle}}} \simeq c \operatorname{sgn}(p).$$

إنّ يتحرك الجسم بسرعة  $c$  بين انعكاسات اتجاه الحركة. وتُهْمَل الفترات القصيرة التي لا تكون فيها الحركة فائقة النسبية عند نقاط الانعطاف، وفقًا للتعليمات.

القوة التجاذبية وطاقة وضع تقابلها هما

$$\dot{p} = -f \operatorname{sgn}(x), \quad U(x) = f|x|.$$

يعطي حفظ الطاقة

$$c|p| + f|x| = cp_0.$$

عند نقطة انعطاف مكانية، يكون  $p = 0$ ، ومن ثم تكون الإزاحة القصوى

$$A_0 = \frac{cp_0}{f}.$$

في البداية يكون  $x > 0$ ، وبالتالي  $p = p_0 - ft$ . يحدث أول انعكاس للاتجاه بعد زمن

$$\tau_0 = \frac{p_0}{f},$$

عند  $x = c\tau_0 = A_0$ . وتظل القوة متجهة نحو نقطة الأصل، فيعود الجسم بزخم سالب. وبعد عبور نقطة الأصل، تتغير إشارة القوة.

دورة كاملة واحدة هي:

| $p$    | $x$    | $t$       |
|--------|--------|-----------|
| $p_0$  | 0      | 0         |
| 0      | $A_0$  | $\tau_0$  |
| $-p_0$ | 0      | $2\tau_0$ |
| 0      | $-A_0$ | $3\tau_0$ |
| $p_0$  | 0      | $4\tau_0$ |

صل نقاط الموضع بخطوط مستقيمة. تكون الميول  $+c$  حتى  $\tau_0$ ، و  $-c$  من  $\tau_0$  إلى  $3\tau_0$ ، و  $+c$  بعد ذلك. ولا يُعد عبور نقطة الأصل عند  $2\tau_0$  انعكاسًا للاتجاه.

وبالتالي،

$$T_1 = 4\tau_0 = \frac{4p_0}{f}.$$

ينتج منحنى الطور مباشرة من حفظ الطاقة:

$$\frac{|x|}{A_0} + \frac{|p|}{p_0} = 1.$$

وهو مُعَيَّن رؤوسه  $(0, p_0)$ ، و  $(A_0, 0)$ ، و  $(0, -p_0)$ ، و  $(-A_0, 0)$ . انطلقًا من الرأس العلوي، تتجه الحركة إلى الرأس الأيمن، ثم الرأس السفلي، ثم الرأس الأيسر، ثم تعود إلى الرأس العلوي: أي في اتجاه عقارب الساعة.

إذا كانت إشارة الزخم الابتدائي سالبة، فاعكس إشارتي كل من  $x$  و  $p$ ؛ وتستخدم  $|p_0|$  في حساب السعة والزمن الدوري.

## (2) الكواركان في إطار سكوت الميزون

اعتبر أن طاقة وضع التفاعل تنعدم عندما يتطابق موضع الكواركين. عند مسافة فصل  $r = |x_1 - x_2|$ ،

$$U(r) = fr.$$

لأن الميزون ساكن، فإن زخم الكواركين الابتدائيين متساويان مقداراً ومتعاكسان اتجاهًا. سم الكوارك الذي يتحرك في البداية نحو اليمين الكوارك 1:

$$p_1(0) = p_*, \quad p_2(0) = -p_*.$$

عند  $t = 0$ ، تكون طاقة الوضع صفرًا. ولذلك تعطي الطاقة الكلية

$$Mc^2 = 2cp_*, \quad p_* = \frac{Mc}{2}.$$

يحافظ التناظر على العلاقتين

$$x_2 = -x_1, \quad p_2 = -p_1.$$

يخضع كل كوارك لقوة مقدارها  $f$  متجهة نحو الكوارك الآخر، وهي متجهة أيضًا نحو نقطة الأصل ما داما منفصلين. لذلك يتبع كل منهما الحركة التي وُجدت في الجزء 1، حيث

$$\tau = \frac{Mc}{2f}, \quad a = c\tau = \frac{Mc^2}{2f}.$$

وتؤكد معادلة الطاقة الكاملة ذلك:

$$Mc^2 = 2c|p_1| + f|x_1 - x_2| = 2(c|p_1| + f|x_1|).$$

يحدّد الجدول الآتي كلا الرسمين خلال دورة واحدة:

| $p_2/p_*$ | $x_2/a$ | $p_1/p_*$ | $x_1/a$ | $t/\tau$ |
|-----------|---------|-----------|---------|----------|
| -1        | 0       | 1         | 0       | 0        |
| 0         | -1      | 0         | 1       | 1        |
| 1         | 0       | -1        | 0       | 2        |
| 0         | 1       | 0         | -1      | 3        |
| -1        | 0       | 1         | 0       | 4        |

لرسم مخططي الموضع-الزمن، صل نقاط موضع كل كوارك بخطوط مستقيمة. المنحنيان المثلثيان صورتان منعكستان أحدهما للآخر حول  $x = 0$ ، ويمر الكواركان أحدهما عبر الآخر عند  $t = 2\tau$ .

لكل من مخططي الطور،

$$\frac{|x_i|}{a} + \frac{|p_i|}{p_*} = 1.$$

يبدأ الكوارك 1 عند  $(0, p_*) = (x, p)$ ، بينما يبدأ الكوارك 2 عند  $(0, -p_*)$ . ويجتاز كلاهما المُعَيَّن في اتجاه عقارب الساعة.

عند نقاط الانعطاف، يكون الكواركان عند الطرفين المتقابلين، ومن ثم

$$d_{\max} = 2a = \frac{Mc^2}{f}.$$

الزمن الدوري لكل منهما هو

$$T = 4\tau = \frac{2Mc}{f}.$$

### (3) الحركة والمسافة القصوى في إطار المختبر

في التحويل المعطى،

$$\beta = \frac{3}{5}, \quad \gamma = \frac{5}{4},$$

ومن ثم

$$\gamma(1 + \beta) = 2, \quad \gamma(1 - \beta) = \frac{1}{2}.$$

تتحول السرعة على قطعة من المسار ذات سرعة  $u = \pm c$  إلى

$$u' = \frac{u + \beta c}{1 + \beta u/c} = \pm c.$$

إذن تكون ميل جميع قطع المسارات في المختبر أيضًا  $+c$  أو  $-c$ . ونحصل على نهاياتها بتحويل أحداث الانعطاف.

على سبيل المثال، يحدث الانعطاف الأول للكوارك 1 عند  $(t, x) = (\tau, a)$ ، حيث  $a = c\tau$ . ولذلك

$$t' = \gamma\tau(1 + \beta) = 2\tau, \quad x' = \gamma a(1 + \beta) = 2a.$$

أحداث الانعطاف الأربعة جميعها في دورة واحدة هي:

| حدث الانعطاف               | $t'$                               | $x'$                              |
|----------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| الكوارك 2، الانعطاف الأول  | $\frac{\tau}{2} = \frac{Mc}{4f}$   | $-\frac{a}{2} = -\frac{Mc^2}{4f}$ |
| الكوارك 1، الانعطاف الأول  | $2\tau = \frac{Mc}{f}$             | $2a = \frac{Mc^2}{f}$             |
| الكوارك 1، الانعطاف الثاني | $3\tau = \frac{3Mc}{2f}$           | $a = \frac{Mc^2}{2f}$             |
| الكوارك 2، الانعطاف الثاني | $\frac{9\tau}{2} = \frac{9Mc}{4f}$ | $\frac{7a}{2} = \frac{7Mc^2}{4f}$ |

يبدأ كلا المسارين عند  $(t', x') = (0, 0)$ . ويتحول حدث التقاطع في إطار السكون عند  $(t, x) = (2\tau, 0)$  إلى

$$(t', x') = \left(\frac{5\tau}{2}, \frac{3a}{2}\right).$$

وتتحول نهاية الدورة في إطار السكون،  $(4\tau, 0)$ ، إلى

$$(t', x') = (5\tau, 3a).$$

تحدد هذه النقاط وجدول نقاط الانعطاف الرسوم في المختبر تحديداً كاملاً: صل النقاط المتتالية لكل كوارك بخطوط مستقيمة. وتتكرر الدورات اللاحقة بعد إزاحة كلا المنحنيين بمقدار

$$\Delta t' = 5\tau = \gamma T, \quad \Delta x' = 3a.$$

لإيجاد المسافة المرصودة، يجب حساب الموضعين عند الزمن نفسه في المختبر:

$$d'(t') = |x'_1(t') - x'_2(t')|.$$

في البداية،

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = -ct',$$

فتزداد المسافة وفقاً للعلاقة  $2ct'$ . ينعكس اتجاه الكوارك 2 أولاً، عند  $t' = \tau/2$ . وفي تلك اللحظة،

$$x'_1 = \frac{a}{2}, \quad x'_2 = -\frac{a}{2},$$

ومن ثم  $d' = a$ .

من  $t' = \tau/2$  إلى  $t' = 2\tau$ ، يتحرك كلا الكواركين نحو اليمين بسرعة  $c$ :

$$x'_1 = ct', \quad x'_2 = ct' - a.$$

لذلك تظل المسافة بينهما مساوية لـ  $a$ . ثم تتناقص إلى الصفر عند  $5\tau/2$ ، وتزداد مجدداً إلى  $a$  عند  $3\tau$ ، وتبقى مساوية لـ  $a$  حتى  $9\tau/2$ ، ثم تتناقص إلى الصفر عند  $5\tau$ . ويتكرر هذا النمط.

إذن

$$d'_{\max} = a = \frac{Mc^2}{2f} = \frac{1}{2} d_{\max}.$$

اختلاف زمني انعكاس الاتجاه في المختبر أمر جوهري: فحدثا الانعطاف المتزامنان في إطار السكون ليسا متزامنين في المختبر.

#### (4) طاقة الميزون في المختبر

بالنسبة إلى الميزون ككل، يكون الزخم الكلي في إطار السكون صفراً، وتكون طاقته الكلية  $Mc^2$ . ويعطي تحويل طاقته

$$E' = \gamma(E + \beta cP_x) = \gamma Mc^2.$$

باستخدام القيم المعطاة،

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.60^2}} = \frac{1}{0.80} = 1.25,$$

وبالتالي

$$E' = 1.25(140 \text{ MeV}) = 175 \text{ MeV}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

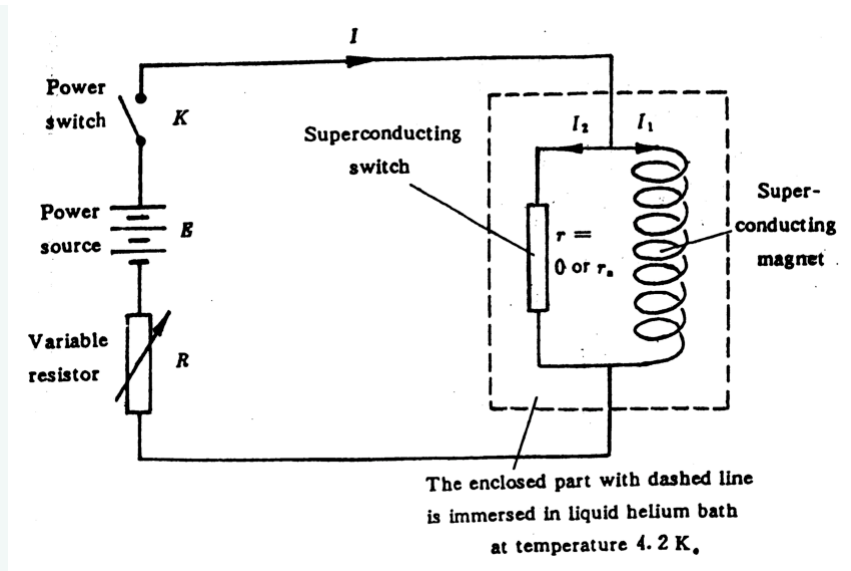
## المسألة 2: مغناطيس فائق التوصيل

تُستخدم المغناطيس فائقة التوصيل على نطاق واسع في المختبرات. وأكثر أشكالها شيوعاً ملف لولبي مصنوع من سلك فائق التوصيل. وما يميز المغناطيس فائق التوصيل أنه يولد مجالات مغناطيسية شديدة من دون أي تبديد للطاقة بفعل التسخين الجولي، إذ تصبح المقاومة الكهربائية للسلك فائق التوصيل صفراً عندما يُغمر المغناطيس في الهيليوم السائل عند درجة حرارة 4.2 K. ويُزود المغناطيس عادةً بمفتاح فائق التوصيل مصمم خصيصاً لهذا الغرض، كما هو موضح في الشكل 1. ويمكن التحكم في مقاومة المفتاح  $r$ : فإما أن تكون  $r = 0$  في حالة التوصيل الفائق، وإما أن تكون  $r = r_n$  في الحالة العادية. وفي نمط التيار المستديم، يدور تيار عبر المغناطيس والمفتاح فائق التوصيل إلى أجل غير مسمى. ويتيح نمط التيار المستديم الحفاظ على مجال مغناطيسي ثابت لفترات طويلة مع فصل المصدر الخارجي.

لا يوضح الشكل 1 تفاصيل المفتاح فائق التوصيل. وهو عادةً قطعة قصيرة من سلك فائق التوصيل ملفوفة بسلك تسخين ومعزولة حرارياً على نحو مناسب عن حمام الهيليوم السائل. وعند تسخينه، ترتفع درجة حرارة السلك فائق التوصيل ويعود إلى الحالة العادية ذات المقاومة. وتبلغ القيمة النموذجية لـ  $r_n$  بضعة أومات. وسنفترض هنا أنها  $5 \Omega$ . وتعتمد محاطة المغناطيس فائق التوصيل على حجمه؛ افترض أنها 10 H للمغناطيس في الشكل 1. ويمكن تغيير التيار الكلي  $I$  بضبط المقاومة  $R$ .

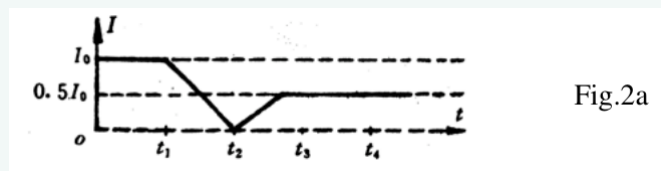
ستُقيم هذه المسألة على أساس الرسوم البيانية فقط!

تشير الأسهم إلى الاتجاه الموجب لكل من  $I$  و  $I_1$  و  $I_2$ .

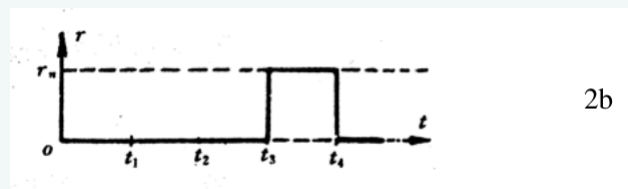


الشكل 1

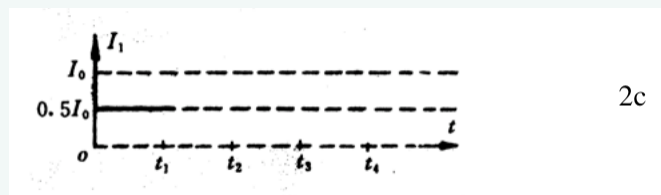
(1) إذا جرى التحكم في التيار الكلي  $I$  ومقاومة المفتاح فائق التوصيل  $r$  بحيث يتغيران مع الزمن على النحو الموضح في الشكلين 2a و 2b على الترتيب، وبافتراض أن التيارين  $I_2$  و  $I_1$  المارين عبر المغناطيس والمفتاح على الترتيب متساويان في البداية (الشكل 2c والشكل 2d)، فكيف يتغيران مع الزمن من  $t_1$  إلى  $t_4$ ؟ مثل إجابتك بيانياً في الشكلين 2c و 2d.



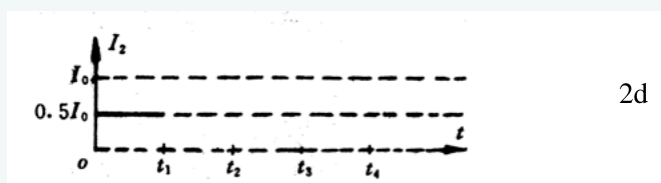
الشكل 2a



2b

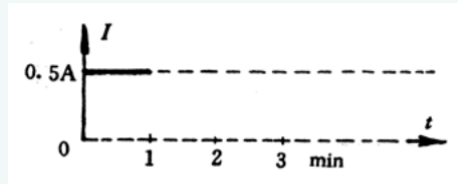


2c

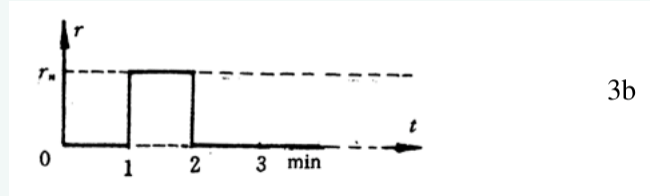


2d

(2) افترض أن مفتاح التغذية  $K$  أُغلق عند الزمن  $t = 0$ ، حين كانت  $r = 0$  و  $I_1 = 0$  و  $R = 7.5 \Omega$ ، وكان التيار الكلي  $I$  يساوي  $0.5 \text{ A}$ . مع إبقاء  $K$  مغلقاً، تُغَيَّر مقاومة المفتاح فائق التوصيل  $r$  على النحو الموضح في الشكل 3b. ارسم التغيرات الزمنية المقابلة لكل من  $I$  و  $I_1$  و  $I_2$  في الأشكال 3a و 3c و 3d على الترتيب.

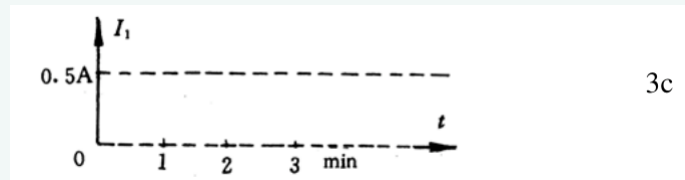


الشكل 3a



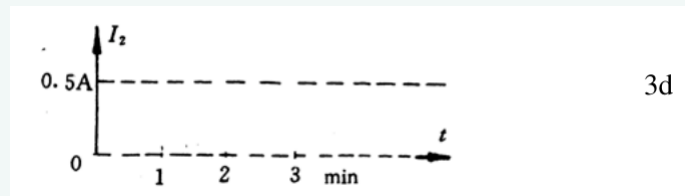
3b

3b



3c

3c



3d

3d

(3) لا يُسمح بمرور تيارات عبر المفتاح فائق التوصيل حين يكون في الحالة العادية إلا إذا كانت صغيرة، وأقل من  $0.5 \text{ A}$ ؛ إذ تحرق التيارات الأكبر المفتاح. افترض أن المغناطيس فائق التوصيل يعمل في نمط التيار المستديم، أي إن  $I = 0$  و  $I_1 = i_1$  (مثلاً  $20 \text{ A}$ )، و  $I_2 = -i_1$ ، كما هو موضح في الشكل 4، من  $t = 0$  إلى  $t = 3 \text{ min}$ . إذا أُريد إيقاف التجربة بخفض التيار المار عبر المغناطيس إلى الصفر، فكيف تفعل ذلك؟ يجب تنفيذ ذلك في عدة خطوات تشغيلية. ارسم التغيرات المقابلة في  $I$  و  $I_1$  و  $I_2$  في الشكل 4.

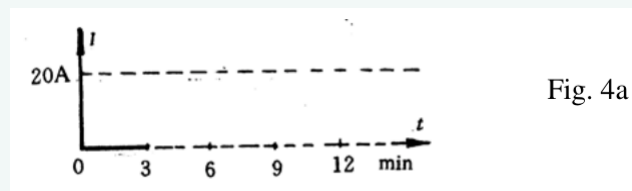
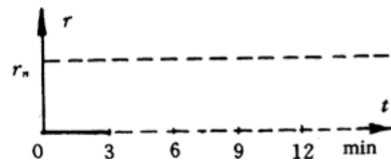


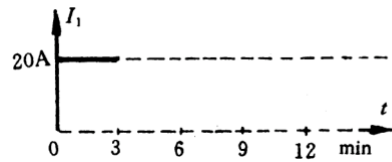
Fig. 4a

الشكل 4a



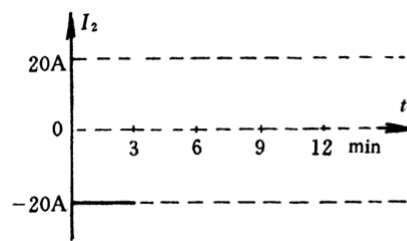
4b

4b



4c

4c



4d

4d

4) افترض أن المغناطيس يعمل في نمط التيار المستديم بتيار مستديم مقداره 20 A (من  $t = 0$  إلى  $t = 3\text{min}$ . انظر الشكل 5). كيف تحوِّله إلى نمط تيار مستديم بتيار مقداره 30 أمبير؟ مثل إجابتك بيانياً في الشكل 5.

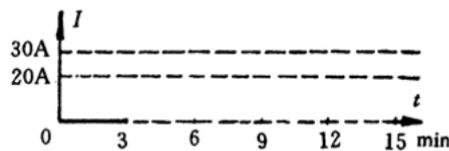
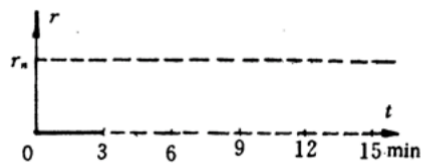


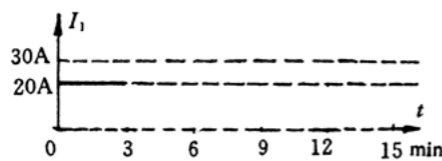
Fig. 5a

الشكل 5a



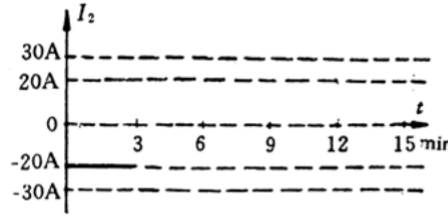
5b

5b



5c

5c



5d

5d

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

## الإجابات

1. طوال التسلسل المحدد،

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

ومن ثم ينخفض  $I_2$  خطياً من  $+I_0/2$  عند  $t_1$  إلى  $-I_0/2$  عند  $t_2$ ، ويرتفع خطياً إلى الصفر عندما يبلغ  $I$  قيمته الثابتة، ويظل صفراً مروراً بـ  $t_3$  و  $t_4$ .

2. القوة الدافعة الكهربائية للمصدر هي  $3.75 \text{ V}$  في البداية،

$$(I, I_1, I_2) = (0.50, 0, 0.50) \text{ A}.$$

عند  $1 \text{ min}$ ، يقفز  $I$  و  $I_2$  إلى  $0.30 \text{ A}$ ، بينما يظل  $I_1$  صفراً. ثم تقترب التيارات أسيّاً من  $(0.50, 0.50, 0) \text{ A}$  بثابت زمني

$$\tau_R = \frac{10}{3} \text{ s} \approx 3.33 \text{ s}.$$

بعد  $2 \text{ min}$ ، يكون  $I = 0.50 \text{ A}$ ، و  $I_1$  ثابتاً، و  $I_2 \approx 0$ . وترد العبارات الدقيقة أدناه.

3. مع إبقاء  $r = 0$ ، ارفع أولاً  $I$  من الصفر إلى  $20 \text{ A}$ ، مع بقاء  $I_1 = 20 \text{ A}$ . ثم اجعل  $r = 5 \Omega$ ، وخفض  $I$  ببطء إلى الصفر، وافتح  $K$ . يتناقص تيار المغناطيس المتبقي أسيّاً بثابت زمني مقداره  $2.0 \text{ s}$ . ويحافظ التدرج المحد أدناه، الذي يستغرق ثلاث دقائق، على

$$|I_2| < 0.223 \text{ A} < 0.5 \text{ A}$$

طوال الحالة العادية.

4. حقق أولاً التطابق  $I = I_1 = 20 \text{ A}$  مع  $r = 0$ . اجعل  $r = 5 \Omega$  وزد  $I_1$  إلى  $30 \text{ A}$ ، باستخدام  $I_2 = 1/9 \text{ A}$  خلال تدرج يستغرق ثلاث دقائق. ثم اجعل  $I = 30 \text{ A}$ ، وبرّد المفتاح حتى تصبح  $r = 0$ ، وخفض  $I$  إلى الصفر. وتكون حالة التيار المستديم النهائية

$$I = 0, \quad I_1 = 30 \text{ A}, \quad I_2 = -30 \text{ A}, \quad r = 0.$$

## الحل

نعامل المغناطيس بوصفه محثاً مثاليّاً ذا محاثة ثابتة  $L = 10 \text{ H}$ . ونهمل مقاومة أسلاك التوصيل، والمحاثة الطفيلية، وزمن التبديل، كما يفهم ضمناً من المسألة.

وفق اتجاهات التيارات المبينة، يعطي قانون كيرشوف للتيارات

$$I = I_1 + I_2.$$

للمغناطيس والمفتاح فائق التوصيل فرق الجهد نفسه بين طرفيهما:

$$V = L \frac{dI_1}{dt} = rI_2.$$

ولذلك فإن المعادلة الأساسية هي

$$\boxed{L \frac{dI_1}{dt} = r(I - I_1).}$$

عندما تكون  $r = 0$ ، يكون تيار المغناطيس ثابتاً. وعندئذ تمر تغيرات تيار المصدر بأكملها عبر المفتاح فائق التوصيل:

$$\frac{dI_1}{dt} = 0, \quad I_2 = I - I_1.$$

عندما تكون  $r = r_n$  ويكون التيار الكلي محدداً، تصبح المعادلة

$$\tau \frac{dI_1}{dt} + I_1 = I, \quad \boxed{\tau = \frac{L}{r_n} = 2.0 \text{ s}.}$$

يظل تيار المحث متصلاً عند لحظات التبديل؛ أما  $I$  و  $I_2$  فقد يقفزان.

### (1) تيار كلي ومقاومة مفتاح محددان

في البداية يتساوى تيارا الفرعين، ومن ثم

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2}.$$

حتى  $t_3$ ، يكون المفتاح فائق التوصيل. ولذلك

$$I_1 = \frac{I_0}{2}, \quad I_2 = I - \frac{I_0}{2}.$$

بحلول  $t_3$ ، يكون التيار المفروض قد بلغ  $I_0/2$ . ومن ثم يكون  $I_2 = 0$  عندما يصبح المفتاح ذا مقاومة. وخلال  $t_3 < t < t_4$ ،

$$L \frac{dI_1}{dt} = r_n \left( \frac{I_0}{2} - I_1 \right) = 0.$$

وبالتالي تبقى التيارات دون تغيير. كما أن إعادة المفتاح إلى  $r = 0$  عند  $t_4$  لا تسبب أي تغيير.

الرسوم البيانية المطلوبة هي:

• **الشكل 2c:** خط أفقي عند  $I_1 = I_0/2$  طوال المدة.

• **الشكل 2d:** خط أفقي عند  $I_0/2$  حتى  $t_1$ ، يليه انخفاض بخط مستقيم إلى  $-I_0/2$  عند  $t_2$ . ويعبر الصفر في منتصف الفترة بين  $t_1$  و  $t_2$ . ثم يرتفع خطياً إلى الصفر عندما يبلغ التيار المحدد  $I$  القيمة  $I_0/2$ ، ويبقى عند الصفر مروراً بـ  $t_3$  و  $t_4$  وما بعدهما.

يجب رسم الجزء السالب من الشكل 2d أسفل محور الصفر الأصلي.

### (2) مقاومة مصدر ثابتة

لتكن القوة الدافعة الكهربائية للمصدر  $\mathcal{E}$ . في البداية تكون  $r = 0$ ، ولذلك يكون فرق الجهد عبر مجموعة التوازي صفراً:

$$\mathcal{E} = RI = (7.5 \Omega)(0.50 \text{ A}) = \boxed{3.75 \text{ V}}.$$

خلال  $0 \leq t < 60 \text{ s}$ ، يبقى تيار المغناطيس عند قيمته الابتدائية، وهي الصفر:

$$\boxed{I = 0.50 \text{ A}, \quad I_1 = 0, \quad I_2 = 0.50 \text{ A}.}$$

عند  $t = 60 \text{ s}$ ، يصبح المفتاح ذا مقاومة. وبما أن  $I_1$  لا يمكن أن يقفز، فإن قيمته بعد التبديل مباشرة تظل صفراً، مما يعطي

$$I(60^+) = I_2(60^+) = \frac{\mathcal{E}}{R + r_n} = \frac{3.75}{12.5} = \boxed{0.30 \text{ A}}.$$

خلال فترة الحالة العادية، يعطي قانون كيرشوف للجهود

$$\mathcal{E} = R(I_1 + I_2) + r_n I_2,$$

ومن ثم

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} - RI_1}{R + r_n}.$$

بدمج ذلك مع معادلة المحث،

$$L \frac{dI_1}{dt} = \frac{r_n R}{R + r_n} \left( \frac{\mathcal{E}}{R} - I_1 \right).$$

إذن

$$\tau_R = \frac{L(R + r_n)}{Rr_n} = \frac{10(7.5 + 5)}{7.5(5)} \text{ s} = \frac{10}{3} \text{ s}.$$

خلال  $s \leq t < 60$ ، نعرّف

$$x = \frac{t - 60 \text{ s}}{\tau_R}.$$

تكون التيارات

$$\begin{aligned} I_1(t) &= (0.50 \text{ A})(1 - e^{-x}), \\ I_2(t) &= (0.30 \text{ A})e^{-x}, \\ I(t) &= 0.50 \text{ A} - (0.20 \text{ A})e^{-x}. \end{aligned}$$

عند  $t = 120 \text{ s}$ ، تكون  $x = 18$ ، ويعود المفتاح إلى  $r = 0$ . ويصبح تيار المصدر  $\mathcal{E}/R = 0.50 \text{ A}$ ، بينما يثبت تيار المغناطيس عند قيمته القائمة. ومن ثم، لكل  $t \geq 120 \text{ s}$ ،

$$\begin{aligned} I &= 0.50 \text{ A}, \\ I_1 &= (0.50 \text{ A})(1 - e^{-18}), \\ I_2 &= (0.50 \text{ A})e^{-18} \approx 7.6 \text{ nA}. \end{aligned}$$

خصائص الرسوم البيانية هي:

- **الشكل 3a:**  $I = 0.50 \text{ A}$  حتى دقيقة واحدة؛ ثم هبوط رأسي إلى  $0.30 \text{ A}$ ؛ ثم ارتفاع أسّي مقعّر إلى أسفل نحو  $0.50 \text{ A}$ .
- **الشكل 3c:**  $I_1 = 0$  حتى دقيقة واحدة؛ ثم ارتفاع أسّي متصل مقعّر إلى أسفل نحو  $0.50 \text{ A}$ . ويصبح ثابتاً تماماً عند دقيقتين.
- **الشكل 3d:**  $I_2 = 0.50 \text{ A}$  حتى دقيقة واحدة؛ ثم هبوط رأسي إلى  $0.30 \text{ A}$ ؛ ثم تناقص أسّي نحو الصفر.

عند دقيقتين، تحدث لكل من  $I$  و  $I_2$  قفزة صاعدة مقدارها نحو  $3.0 \text{ nA}$  فقط، وهي غير مرئية على المقياس المعطى. ولا تشغل جميع التغيرات العابرة المرئية سوى جزء صغير من الدقيقة.

### (3) خفض التيار المستديم إلى الصفر

ينطبق قيد التيار على مقدار تيار المفتاح في الحالة العادية:

$$|I_2| < 0.5 \text{ A}.$$

وبما أن

$$I_2 = \frac{L}{r_n} \frac{dI_1}{dt},$$

فإنه يقتضي

$$\left| \frac{dI_1}{dt} \right| < \frac{r_n}{L} (0.5 \text{ A}) = 0.25 \text{ A s}^{-1}.$$

إن تسخين المفتاح مباشرة في حالة التيار المستديم الابتدائية سيجعل تياراً مقداره 20 A يمر عبره. لذا يجب أولاً نقل تياره إلى المصدر الخارجي بينما لا يزال فائق التوصيل.

فيما يلي جدول زمني محدد لمثال 20 A.

من 0 إلى 3 دقائق: أبق حالة التيار المستديم المعطاة:

$$I = 0, \quad r = 0, \quad I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = -20 \text{ A}.$$

من 3 إلى 6 دقائق: أبق  $r = 0$ ، وأغلق  $K$  مع جعل  $R$  كبيرة بما يكفي، وارفع  $I$  خطياً من الصفر إلى 20 A. عندئذ

$$I_1 = 20 \text{ A}, \quad I_2 = I - 20 \text{ A}.$$

ومن ثم يرتفع  $I_2$  خطياً من -20 A إلى الصفر. وعند ست دقائق، يزود المصدر المغناطيس بتياره كاملاً.

من 6 إلى 9 دقائق: اجعل  $r = r_n = 5 \Omega$  وخفض التيار الكلي خطياً من 20 A إلى الصفر.

لتكن

$$u = t - 360 \text{ s}, \quad T = 180 \text{ s}, \quad a = \frac{20 \text{ A}}{T} = \frac{1}{9} \text{ A s}^{-1}.$$

خلال هذه الفترة،

$$I = 20 \text{ A} - au.$$

بحل  $\tau \dot{I}_1 + I_1 = I$  مع  $I_1(0) = 20 \text{ A}$ ، نحصل على

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= 20 \text{ A} - au + a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \\ I_2 &= -a\tau(1 - e^{-u/\tau}), \end{aligned} \quad \tau = 2.0 \text{ s}.$$

وبالتالي،

$$|I_2| \leq a\tau = \frac{2}{9} \text{ A} \approx 0.222 \text{ A} < 0.5 \text{ A}.$$

يتبع تيار المغناطيس تيار المصدر المتناقص بقيمة أعلى منه قليلاً.

عند 9 دقائق وما بعدها: يكون تيار المصدر قد بلغ الصفر. افتح  $K$ ، مع إبقاء المفتاح في الحالة العادية. ويكون تيار المغناطيس المتبقي

$$D = \frac{2}{9}(1 - e^{-90}) \text{ A} \approx 0.222 \text{ A}.$$

ويدور عبر المغناطيس والمفتاح في الحالة العادية ويتناقص وفقاً للعلاقة

$$\boxed{I = 0, \quad I_1 = De^{-(t-540 \text{ s})/\tau}, \quad I_2 = -De^{-(t-540 \text{ s})/\tau}.$$

بعد 10 s إضافية، يكون  $I_1 \approx 1.5 \text{ mA}$ ، ويستمر في الاقتراب من الصفر.

وعليه، تكون الرسوم البيانية الكاملة للشكل 4 كما يلي:

| الرسم البياني            | الشكل المطلوب                                                                                                                                 |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>4a: I</b>             | صفر حتى 3 دقائق؛ ارتفاع خطي إلى 20 A عند 6 دقائق؛ انخفاض خطي إلى الصفر عند 9 دقائق؛ وصفر بعد ذلك.                                             |
| <b>4b: r</b>             | صفر حتى 6 دقائق؛ قفزة إلى $5 \Omega$ ؛ والبقاء في الحالة العادية خلال التفريغ النهائي.                                                        |
| <b>4c: I<sub>1</sub></b> | 20 A حتى 6 دقائق؛ ثم يبدأ بسلسلة انخفاضاً شبه خطي، ليبلغ نحو 0.222 A عند 9 دقائق؛ ثم يتناقص أسياً إلى الصفر.                                  |
| <b>4d: I<sub>2</sub></b> | -20 A حتى 3 دقائق؛ ارتفاع خطي إلى الصفر عند 6 دقائق؛ ثم يصبح سالباً قليلاً، مقترباً من -0.222 A؛ وبعد 9 دقائق يعود أسياً نحو الصفر من الأسفل. |

كما في أي تفريغ سلبي لدائرة  $RL$ ، يجري الاقتراب من الصفر التام تقاربياً. وعلى الرسم ذي المقياس الزمني بالدقائق، لا يمكن تمييز الذيل النهائي عن الصفر. وإعادة المفتاح إلى  $r = 0$  قبل اضمحلال هذا الذيل من شأنها أن تحبس التيار المتبقي.

لقيمة ابتدائية مختلفة لـ  $i_1$ ، يُطبَّق الإجراء نفسه مع تدرج بطيء بما يكفي للالتزام بحد  $0.25 \text{ A s}^{-1}$ .

#### (4) تغيير التيار المستديم من 20 A إلى 30 A

مرة أخرى، طابق أولاً تيار المصدر مع تيار المغناطيس القائم قبل تسخين المفتاح.

يمكننا اختيار تدرج خطي تماماً لتيار المغناطيس يستغرق ثلاث دقائق:

$$\alpha = \frac{30 - 20}{180} \text{ A s}^{-1} = \frac{1}{18} \text{ A s}^{-1}.$$

تيار المفتاح المطلوب خلال هذا التدرج هو

$$\delta = \frac{L}{r_n} \alpha = \frac{1}{9} \text{ A} \approx 0.111 \text{ A},$$

وهو أقل بكثير من حد الحالة العادية.

لتحقيق هذا التدرج بدقة، افرض

$$I = I_1 + \delta.$$

عندما يكون  $u = t - 360 \text{ s}$  و  $0 < u < 180 \text{ s}$ ,

$$I_1 = 20 \text{ A} + \alpha u, \quad I_2 = \delta, \quad I = 20 \text{ A} + \alpha u + \delta.$$

وبالفعل،  $r_n I_2 = r_n \delta = L \alpha = L dI_1/dt$ .

فيما يلي جدول زمني كامل يحدد الرسوم البيانية الأربعة جميعاً:

| الزمن (دقيقة) | الشكل 5a، $I$ (A)                         | الشكل 5b، $r$ ( $\Omega$ ) | الشكل 5c، $I_1$ (A)     | الشكل 5d، $I_2$ (A)     |
|---------------|-------------------------------------------|----------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 3–0           | 0                                         | 0                          | 20                      | –20                     |
| 6–3           | خطي $0 \rightarrow 20$                    | 0                          | 20                      | خطي $-20 \rightarrow 0$ |
| 9–6           | خطي $20 + \delta \rightarrow 30 + \delta$ | 5                          | خطي $20 \rightarrow 30$ | $\delta = 1/9$          |
| 12–9          | 30                                        | 5                          | 30                      | 0                       |
| 15–12         | خطي $30 \rightarrow 0$                    | 0                          | 30                      | خطي $0 \rightarrow -30$ |
| بعد 15        | 0                                         | 0                          | 30                      | –30                     |

القيمة العددية لـ  $\delta$  في الجدول هنا بوحدة الأمبير.

تفاصيل التبديل مهمة:

- **عند 6 دقائق:**  $I = I_1 = 20 \text{ A}$ ، ومن ثم  $I_2 = 0$ . حوّل المفتاح إلى الحالة العادية، ثم زد  $I$  بالمقدار الصغير  $\delta$ . يبدأ بذلك التدرج الخطي لتيار المغناطيس من دون أي قفزة في  $I_1$ .
- **عند 9 دقائق:** يكون  $I_1$  قد بلغ  $30 \text{ A}$  تماماً. خفّض  $I$  من  $30 + \delta$  إلى  $30 \text{ A}$ . عندئذ يكون  $I_2 = 0$ ، ولذلك يظل تيار المغناطيس ثابتاً.
- **عند 12 دقيقة:** أعد المفتاح إلى  $r = 0$ . خفّض  $I$  إلى الصفر خلال الدقائق الثلاث التالية. يبقى تيار المغناطيس ثابتاً عند  $30 \text{ A}$ ، بينما يصبح  $I_2$  أكثر سلبية تدريجياً.
- **عند 15 دقيقة:** افتح  $K$ . يحمل المغناطيس والمفتاح فائق التوصيل تيارين متساويين في المقدار ومتعاكسين في الاتجاه، مقدار كل منهما  $30 \text{ A}$ .

وهكذا يتضمن الشكل 5a قفزتين صغيرتين بمقدار  $0.111 \text{ A}$  عند 6 و9 دقائق. ويحتوي الشكل 5d على نبضة مستطيلة موجبة صغيرة خلال الفترة 6–9 دقائق. ولا تحدث تيارات المفتاح السالبة الكبيرة إلا عندما تكون  $r = 0$ ، ولذلك فهي لا تخالف القيد المذكور للحالة العادية.

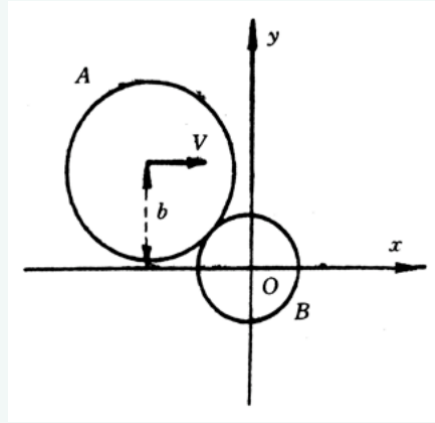
تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

### المسألة 3: تصادم قرصين مع احتكاك سطحي

يتحرك قرص متجانس A كتلته  $m$  ونصف قطره  $R_A$  حركة انتقالية على مستوى أفقي أملس  $y-x$  في اتجاه  $x$  بسرعة  $V$  (انظر الشكل في الصفحة التالية). يقع مركز القرص على مسافة  $b$  من المحور  $x$ . ويصطدم بقرص متجانس ساكن B يقع مركزه في البداية عند مبدأ نظام الإحداثيات. للقرص B الكتلة نفسها والسمك نفسه اللذان للقرص A، لكن نصف قطره هو  $R_B$ . يُفترض أن سرعتي القرصين عند نقطة تلامسهما، في الاتجاه العمودي على الخط الواصل بين مركزيهما، متساويتان بعد التصادم. ويُفترض أيضاً أن مقدار السرعة النسبية للقرصين على امتداد الخط الواصل بين مركزيهما متساوي قبل التصادم وبعده.

(1) في مثل هذا التصادم، أوجد المركبتين X و Y ل سرعتي القرصين بعد التصادم، أي  $V'_{AX}$  و  $V'_{AY}$  و  $V'_{BX}$  و  $V'_{BY}$ ، بدلالة  $m$  و  $R_A$  و  $R_B$  و  $V$  و  $b$ .

(2) أوجد الطاقة الحركية  $E'_A$  للقرص A والطاقة الحركية  $E'_B$  للقرص B بعد التصادم بدلالة  $m$  و  $R_A$  و  $R_B$  و  $V$  و  $b$ .



نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

### الإجابات

لتكن  $D = R_A + R_B$ . لكي يحدث تصادم، يكون  $0 \leq b < D$ ، مع وقوع A فوق المحور x كما هو موضح.

1. مركبات السرعة هي

$$\begin{aligned} V'_{AX} &= \frac{5Vb^2}{6D^2}, & V'_{AY} &= \frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2}, \\ V'_{BX} &= V \left( 1 - \frac{5b^2}{6D^2} \right), & V'_{BY} &= -\frac{5Vb\sqrt{D^2 - b^2}}{6D^2}. \end{aligned}$$

2. باحتساب كل من الحركة الانتقالية والحركة الدورانية،

$$\begin{aligned} E'_A &= \frac{3mV^2b^2}{8D^2}, & E'_B &= \frac{mV^2}{2} \left( 1 - \frac{11b^2}{12D^2} \right). \end{aligned}$$

### الحل

#### (1) السرعات بعد التصادم

نعدّ التصادم أنياً، بحيث يظل الخط الواصل بين المركزين ثابتاً أثناء التصادم. لا يؤثر المستوى الأفقي الأملس بأي دفع أفقي أو عزم قوة حول المحور الرأسي. ولا يدور أي من القرصين في البداية.

نعرف

$$s = \frac{b}{D}, \quad c = \sqrt{1 - s^2}, \quad D = R_A + R_B.$$

عند أول تلامس، يقع مركز A عند  $(-Dc, b)$ ، بينما يقع مركز B عند المبدأ. ومن ثم فإن متجهي الوحدة على امتداد الخط من A إلى B وفي الاتجاه العمودي عليه هما

$$\mathbf{n} = (c, -s), \quad \mathbf{t} = (s, c).$$

السرعة الابتدائية للقرص A هي

$$\mathbf{v}_A = Vc\mathbf{n} + Vs\mathbf{t}.$$

ليكن الدفع المؤثر في B هو

$$\mathbf{J} = J_n\mathbf{n} + J_t\mathbf{t}.$$

الدفع المؤثر في A هو  $-\mathbf{J}$ . ومن ثم تعطي مبرهنة الدفع والزخم الخطي

$$\begin{aligned} v'_{An} &= Vc - \frac{J_n}{m}, & v'_{Bn} &= \frac{J_n}{m}, \\ v'_{At} &= Vs - \frac{J_t}{m}, & v'_{Bt} &= \frac{J_t}{m}. \end{aligned}$$

تعكس السرعة النسبية في الاتجاه الناظمي اتجاهها مع احتفاظها بمقدارها: يتقارب القرصان قبل التصادم ويتباعدان بعده. وبناءً على ذلك،

$$v'_{Bn} - v'_{An} = Vc,$$

ومن ثم

$$\frac{2J_n}{m} - Vc = Vc \implies J_n = mVc.$$

إذن

$$\boxed{v'_{An} = 0, \quad v'_{Bn} = Vc}.$$

لتحديد الدفع المماسي، يجب أن نأخذ الدوران في الحسبان. عزما القصور الذاتي هما

$$I_A = \frac{1}{2}mR_A^2, \quad I_B = \frac{1}{2}mR_B^2.$$

نعد السرعة الزاوية الموجبة في الاتجاه المعاكس لاتجاه عقارب الساعة. تقع نقطتا التلامس عند  $R_A\mathbf{n}$  بالنسبة إلى مركز A وعند  $-R_B\mathbf{n}$  بالنسبة إلى مركز B. وتعطي مبرهنة الدفع الزاوي والزخم الزاوي

$$I_A\omega'_A = -R_AJ_t, \quad I_B\omega'_B = -R_BJ_t.$$

ولذلك،

$$\omega'_A = -\frac{2J_t}{mR_A}, \quad \omega'_B = -\frac{2J_t}{mR_B}.$$

السرعتان المماسيتان للنقطتين الماديتين المتلامستين هما

$$\begin{aligned} u'_{At} &= v'_{At} + R_A\omega'_A = Vs - \frac{3J_t}{m}, \\ u'_{Bt} &= v'_{Bt} - R_B\omega'_B = \frac{3J_t}{m}. \end{aligned}$$

يقتضي تساوي هاتين السرعتين، كما ورد في نص المسألة، أن يكون

$$Vs - \frac{3J_t}{m} = \frac{3J_t}{m},$$

وهذا يعطي

$$J_t = \frac{mVs}{6}.$$

ومن ثم

$$v'_{At} = \frac{5}{6}Vs, \quad v'_{Bt} = \frac{1}{6}Vs,$$

والسرعتان الزاويتان، اللتان نحتاج إليهما في الجزء 2، هما

$$\omega'_A = -\frac{Vs}{3R_A}, \quad \omega'_B = -\frac{Vs}{3R_B}.$$

يدور كلا القرصين في اتجاه عقارب الساعة في الوضع الهندسي الموضح.

بالعودة إلى الإحداثيات الديكارتية،

$$\mathbf{v}'_A = \frac{5}{6}Vs\mathbf{t} = \left(\frac{5}{6}Vs^2, \frac{5}{6}Vsc\right),$$

$$\mathbf{v}'_B = Vc\mathbf{n} + \frac{1}{6}Vs\mathbf{t} = \left(V\left(c^2 + \frac{s^2}{6}\right), -\frac{5}{6}Vsc\right).$$

باستخدام  $c^2 = 1 - s^2$  و  $s = b/D$  و  $c = \sqrt{D^2 - b^2}/D$ ، نحصل على المركبات الأربع الواردة في قسم الإجابات. وتحقق مجاميعها قانون حفظ الزخم الخطي:

$$V'_{AX} + V'_{BX} = V, \quad V'_{AY} + V'_{BY} = 0.$$

## (2) الطاقات الحركية بعد التصادم

تشمل الطاقة الحركية لكل قرص الحركة الانتقالية لمركزه والدوران حول مركزه:

$$E'_i = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}'_i|^2 + \frac{1}{2}I_i(\omega'_i)^2.$$

بالنسبة إلى A،

$$\begin{aligned} E'_A &= \frac{1}{2}m\left(\frac{5}{6}Vs\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR_A^2\right)\left(\frac{Vs}{3R_A}\right)^2 \\ &= \left(\frac{25}{72} + \frac{1}{36}\right)mV^2s^2 \\ &= \frac{3}{8}mV^2s^2. \end{aligned}$$

ولذلك،

$$E'_A = \frac{3mV^2b^2}{8(R_A + R_B)^2}.$$

بالنسبة إلى B، تكون مركبتا السرعة النازمية والمماسية متعامدتين، ومن ثم

$$|\mathbf{v}'_B|^2 = V^2c^2 + \frac{V^2s^2}{36}.$$

ويترتب على ذلك أن

$$\begin{aligned}
E'_B &= \frac{1}{2}mV^2 \left( c^2 + \frac{s^2}{36} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}mR_B^2 \right) \left( \frac{Vs}{3R_B} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2}mV^2 c^2 + \frac{1}{24}mV^2 s^2 \\
&= \frac{1}{2}mV^2 \left( 1 - \frac{11s^2}{12} \right).
\end{aligned}$$

ومن ثم

$$\boxed{E'_B = \frac{mV^2}{2} \left( 1 - \frac{11b^2}{12(R_A + R_B)^2} \right)}.$$

للتحقق من الاتساق، فإن الفقد الكلي في الطاقة الحركية هو

$$\frac{1}{2}mV^2 - (E'_A + E'_B) = \boxed{\frac{mV^2 b^2}{12(R_A + R_B)^2}} \geq 0.$$

ينتج هذا الفقد عن الاحتكاك المماسي؛ ولا ينطبق شرط المرونة المفروض إلا على الحركة النسبية في الاتجاه الناطمي. في التصادم المركزي، حيث  $b = 0$ ، يتوقف A، ويكتسب B السرعة  $V$ ، ولا يدور أي من القرصين، ولا تُفقد أي طاقة حركية.

---

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.