

IPhO 1993

理论题与解答 · 美国弗吉尼亚州威廉斯堡 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1993/

题目 1：大气电学

常用数据表

物理量	符号	数值
地球平均半径	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 。
重力加速度	g	9.8 m s^{-2} 。
牛顿引力常量	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ 。
真空介电常数	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ 。
真空磁导率	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [原文如此；正确值为 $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$] 。
真空（或空气）中的光速	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ 。
元电荷	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ 。
电子质量	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 。
质子质量	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
普朗克常量	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$ 。
阿伏伽德罗常量	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ 。
玻尔兹曼常量	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ 。
摩尔气体常量	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ 。

理论题 1

大气电学

从静电学的角度来看，地球表面可以视为良导体。它带有一定的总电荷 Q_0 ，平均面电荷密度为 σ_0 。

1) 在晴好天气条件下，地球表面存在竖直向下的电场 E_0 ，其大小约为 150 V/m 。求地球表面的面电荷密度大小及地球表面所带的总电荷量大小。

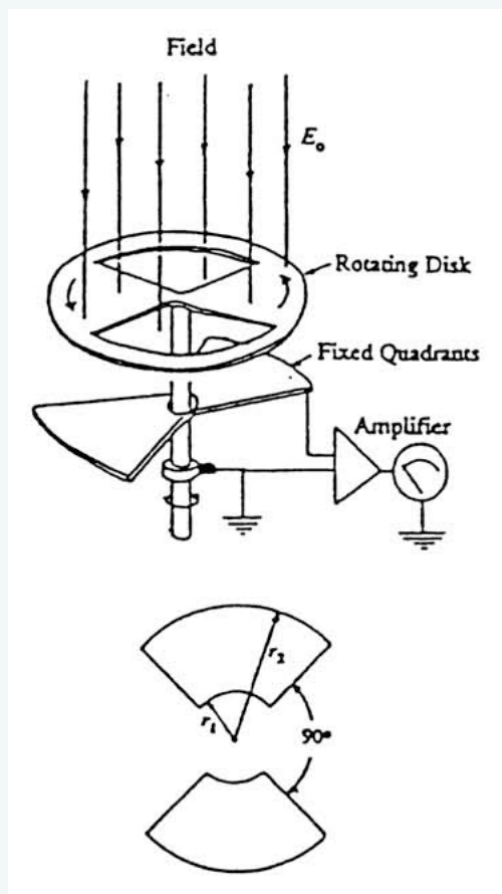
2) 竖直向下的电场大小随高度增加而减小，在 100 m 高处约为 100 V/m 。计算地球表面至 100 m 高度之间的大气中，每 m^3 的平均净电荷量。

3) 你在 (2) 中算出的净电荷密度，实际上是单位体积内数量几乎相等的单价正离子和负离子 (n_+ 和 n_-) 共同作用的结果。在地球表面附近，晴好天气条件下， $n_+ \approx n_- \approx 6 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$ 。这些离子在竖直电场的作用下运动，其速率与电场强度成正比：

$$v \approx 1.5 \times 10^{-4} \cdot E,$$

其中， v 的单位为 m/s ， E 的单位为 V/m 。如果没有其他过程（例如闪电）来维持地球表面的电荷，大气离子的运动需要多长时间才能中和地球表面一半的电荷？

4) 测量大气电场并由此确定 σ_0 的一种方法，是使用图示装置。一对与地绝缘但彼此相连的金属象限板，安装在一个接地且匀速旋转的圆盘正下方，圆盘上开有两个象限形孔。（图中为清楚表示装置的结构，夸大了两者之间的间距。）每转一周，绝缘象限板会两次完全暴露于电场中，随后（经过 $1/4$ 个周期）又被完全屏蔽。设旋转周期为 T ，绝缘象限板的内、外半径分别为图示的 r_1 和 r_2 。



取绝缘象限板被完全屏蔽的某一时刻为 $t = 0$ 。

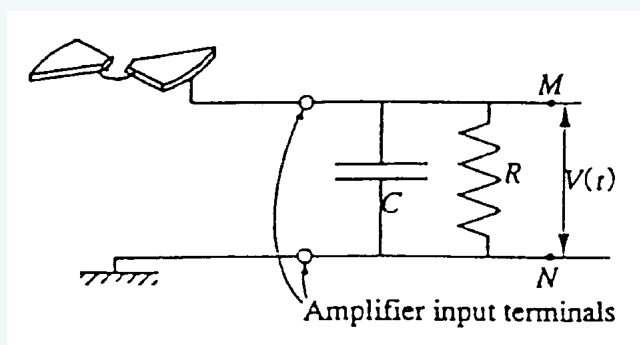
求出从 $t = 0$ 到 $t = T/2$ 这段时间内，绝缘象限板上表面的感应总电荷 $q(t)$ 随时间变化的表达式，并画出该变化的示意图。

[在此情形下，可以忽略大气离子电流的影响。]

(5) 将 (4) 中所述装置接到一个放大器上，其输入电路等效于电容 C 和电阻 R 的并联电路。（可假设象限板系统的电容与 C 相比可以忽略。）圆盘刚开始以周期 T 旋转时，分别在下列情况下，画出一个旋转周期内 M 、 N 两点间电势差 V 随 t 变化的示意图：

a) $T = T_a \ll CR$;

b) $T = T_b \gg CR$ 。



[假设 C 和 R 的值固定；情形 (a) 和 (b) 之间只有 T 发生变化。]

求出情形 (a) 和 (b) 中 $V(t)$ 最大值的近似比值 V_a/V_b 的表达式。

6) 假设 $E_0 = 150 \text{ V/m}$ 、 $r_1 = 1 \text{ cm}$ 、 $r_2 = 7 \text{ cm}$ 、 $C = 0.01 \mu\text{F}$ 、 $R = 20 \text{ M}\Omega$ ，并设圆盘开始以每秒 50 转的转速旋转。

在这种情况下，一个旋转周期内 V 的最大值约为多少？

题目译自官方英文原文。

答案

取 $V = V_M - V_N$ 。对于第 4–6 问，将完全暴露时的面积及其感应电荷量的大小定义为

$$A_m = \frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2), \quad Q_m = \varepsilon_0 E_0 A_m > 0.$$

1. 地球表面带负电：

$$\sigma_0 \simeq -1.3 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}, \quad Q_0 \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

题目所求的大小为上述数值的绝对值。

2. 大气的平均电荷密度为

$$\bar{\rho} \simeq +4.4 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

3. 只计入到达地表的正离子，并将其浓度视为近似不变，有

$$t_{1/2} = \frac{\varepsilon_0 \ln 2}{en_+(1.5 \times 10^{-4})} \simeq 4.3 \times 10^2 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

4. 上表面的感应电荷为

$$q(t) = \begin{cases} -Q_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -Q_m \left(2 - \frac{4t}{T}\right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

其图像由连接 $(0, 0)$ 、 $(T/4, -Q_m)$ 和 $(T/2, 0)$ 的直线段组成，每隔 $T/2$ 重复一次。

5. 对于从 $V(0) = 0$ 开始的第一转：– (a) $V \simeq -q/C$ ：两个正的三角形脉冲，每个脉冲的高度为

$$V_a \simeq \frac{Q_m}{C}.$$

– (b) V 在约 $+V_b$ 和 $-V_b$ 之间交替变化，过渡过程呈指数变化，时间常数为 RC ，其中

$$V_b \simeq \frac{4RQ_m}{T_b}.$$

因此

$$\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{T_b}{4RC}.$$

6. 第一转中的最大电压为

$$V_{\max} \simeq 1.0 \times 10^{-3} \text{ V} = 1.0 \text{ mV}.$$

考虑电阻为有限值时, 结果为 0.989 mV , 在 $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$ 时达到。

解答

1) 地球表面的电荷

处于静电平衡的导体内部电场为零。对跨越导体表面的一个小扁柱形高斯面应用高斯定律, 得到

$$E_{\perp, \text{outside}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0},$$

其中, 法线方向指向导体外部。由于电场向下指向地球内部,

$$\sigma_0 = -\varepsilon_0 E_0.$$

因此

$$\sigma_0 = -(8.85 \times 10^{-12})(150) = -1.3275 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}.$$

将地球近似为球体, 并以上式作为其平均面电荷密度, 有

$$Q_0 = 4\pi R_E^2 \sigma_0 = -4\pi(6.4 \times 10^6)^2(1.3275 \times 10^{-9}) \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

因此, 面电荷密度的大小约为 1.3 nC m^{-2} , 总电荷量的大小约为 $6.8 \times 10^5 \text{ C}$ 。

2) 大气空间电荷

取 z 轴正方向竖直向上。两个高度处带符号的竖直电场分量为

$$E_z(0) = -150 \text{ V/m}, \quad E_z(100 \text{ m}) = -100 \text{ V/m}.$$

在 100 m 的高度范围内, 由于 $100/R_E \ll 1$, 地球的曲率可以忽略。因此, 对水平横截面积为 A 的竖直柱体应用高斯定律, 得到

$$\bar{\rho}Ah = \varepsilon_0 A [E_z(h) - E_z(0)].$$

于是,

$$\bar{\rho} = \varepsilon_0 \frac{-100 - (-150)}{100} = (8.85 \times 10^{-12})(0.50) = 4.425 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

电荷为**正电荷**, 这与向下的电场随高度增加而减弱相一致。

3) 中和一半表面电荷所需的时间

地球带负电。正离子向下漂移并能够到达地表; 负离子则向上漂移。因此, 中和表面电荷的电流只包含**正离子**的贡献。

将离子迁移率写为

$$\mu = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad v = \mu E.$$

在这一漂移估算中, 将题给的近地表浓度 n_+ 视为近似不变, 则单位时间内到达单位面积的正电荷量为

$$j_+ = en_+v = en_+\mu E.$$

用 $S(t) = |\sigma(t)|$ 表示剩余负面电荷密度的大小。导体的边界条件给出

$$E(t) = \frac{S(t)}{\varepsilon_0}.$$

由于每个到达的正离子都会使 S 减小,

$$\frac{dS}{dt} = -j_+ = -\frac{en_+\mu}{\varepsilon_0} S.$$

因此, 放电过程呈指数衰减:

$$S(t) = S(0)e^{-t/\tau_+}, \quad \tau_+ = \frac{\varepsilon_0}{en_+\mu}.$$

代入数值得

$$en_+\mu = (1.60 \times 10^{-19})(6 \times 10^8)(1.5 \times 10^{-4}) = 1.44 \times 10^{-14} \text{ S m}^{-1},$$

以及

$$\tau_+ = \frac{8.85 \times 10^{-12}}{1.44 \times 10^{-14}} \simeq 615 \text{ s}.$$

令 $S(t_{1/2}) = S(0)/2$, 得到

$$t_{1/2} = \tau_+ \ln 2 \simeq 426 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

若再加上向上运动的负离子所贡献的电导率, 就会错误地计入一股并未流入地表的电流。

4) 象限板上的感应电荷

忽略边缘效应, 并认为凡是被接地圆盘覆盖的象限板部分都受到完全屏蔽。在暴露的上表面, 向下的电场要求其面电荷密度为

$$\sigma_{\text{upper}} = -\varepsilon_0 E_0.$$

两块四分之一圆环形象限板的总面积为

$$A_m = 2 \left[\frac{\pi}{4} (r_2^2 - r_1^2) \right] = \frac{\pi}{2} (r_2^2 - r_1^2).$$

圆盘的角速度为

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

在最初的四分之一转内, 每个开孔暴露出的角宽为 $\theta = \omega t$ 。因此, 总暴露面积为

$$A(t) = 2 \left[\frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \theta \right] = \frac{2\pi(r_2^2 - r_1^2)}{T} t, \quad 0 \leq t \leq T/4.$$

该面积在 $T/4$ 时达到 A_m , 随后以相同的速率减小, 在 $T/2$ 时降至零。因此

$$A(t) = \begin{cases} A_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ A_m \left(2 - \frac{4t}{T} \right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

由于 $q(t) = -\varepsilon_0 E_0 A(t)$,

$$q(t) = \begin{cases} -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} t, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

示意图是一个向下的三角形脉冲：从零开始，线性减小，在 $T/4$ 时达到 $-Q_m$ ，随后线性增大，在 $T/2$ 时回到零。每转一周出现两个相同的脉冲。

这里的 q 是上表面的电荷。一个孤立的象限板系统可以通过重新分布其已有电荷，在上表面形成这样的电荷。

5) 放大器输入端的电压

取 $V = V_M - V_N$ ，其中 N 接地。旋转开始之前，象限板被屏蔽，电容器已通过电阻放电，因此

$$q(0) = 0, \quad V(0) = 0.$$

忽略象限板系统相对于 C 的电容，与输入端相连的导体所带电荷为 $q + CV$ 。正电荷以 V/R 的速率经电阻流出该导体，因此由电荷守恒可得

$$\frac{d}{dt}(q + CV) = -\frac{V}{R},$$

即

$$\boxed{C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = -\frac{dq}{dt}}.$$

随着象限板逐渐暴露，其上表面积累负电荷。这使电容器的上极板留下正电荷，因此电压起初向正值上升。

由第 4 问可得，

$$-\frac{dq}{dt} = \begin{cases} +I_0, & 0 < t < T/4, \\ -I_0, & T/4 < t < T/2, \\ +I_0, & T/2 < t < 3T/4, \\ -I_0, & 3T/4 < t < T, \end{cases} \quad I_0 = \frac{4Q_m}{T}.$$

因此，该电路由方波电流驱动。

为完整起见，令 $\tau = RC$ 、 $B = RI_0$ ，并令 $t_k = kT/4$ 。在第 $k = 0, 1, 2, 3$ 个四分之一周期内，电压为

$$V(t) = (-1)^k B + [V(t_k) - (-1)^k B] e^{-(t-t_k)/\tau}.$$

此表达式与 $V(0) = 0$ 一起确定了启动时的连续波形。

(a) 快速旋转： $T_a \ll RC$

在第一转内，通过 R 泄漏的电荷很少。保留主导项，有

$$C \frac{dV}{dt} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

利用初始条件，得到

$$V(t) \simeq -\frac{q(t)}{C}.$$

因此，电压由两个正的三角形脉冲组成：

t/T_a	0	1/4	1/2	3/4	1
$V/(Q_m/C)$ ，保留主导项	0	1	0	1	0

用直线段依次连接相邻各点。最大电压近似为

$$\boxed{V_a \simeq \frac{Q_m}{C}}.$$

当 T_a/RC 为有限值时，各段略有弯曲，极小值略为负值，第二个正峰值略低于第一个。上述正三角形是题目所要求的第一转波形的主导近似。

(b) 缓慢旋转： $T_b \gg RC$

除短暂的过渡过程外，电容电流很小，且

$$\frac{V}{R} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

因此，电压交替趋近于以下电平：

$$V \simeq \pm V_b, \quad V_b = \frac{4RQ_m}{T_b}.$$

示意图具有以下特征：

- 从零开始，以时间常数 RC 按指数规律上升，趋近于 $+V_b$ 。
- 在 $t = T_b/4$ 之后，按指数规律下降，趋近于 $-V_b$ 。
- 在 $t = T_b/2$ 之后，上升并趋近于 $+V_b$ 。
- 在 $t = 3T_b/4$ 之后，下降并趋近于 $-V_b$ 。

每个四分之一周期都远长于 RC ，因此其中的大部分时间对应于几乎水平的平台。电压在切换时刻保持连续。例如，在第一次切换刚发生之后，

$$V(t) \simeq -V_b + 2V_b e^{-(t-T_b/4)/(RC)},$$

因此，电压在该次切换后约 $RC \ln 2$ 时过零。

所求比值因而为

$$\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{Q_m/C}{4RQ_m/T_b} = \frac{T_b}{4RC}.$$

6) 电压的数值

完全暴露时的面积为

$$A_m = \frac{\pi}{2} (0.07^2 - 0.01^2) = 7.54 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

因此

$$Q_m = \varepsilon_0 E_0 A_m = (8.85 \times 10^{-12})(150)(7.54 \times 10^{-3}) \simeq 1.00 \times 10^{-11} \text{ C}.$$

相关的时间尺度为

$$T = \frac{1}{50} = 0.020 \text{ s},$$

$$RC = (20 \times 10^6)(0.01 \times 10^{-6}) = 0.20 \text{ s}.$$

特别地，到达第一个峰值所需的时间仅为

$$\frac{T}{4} = 0.0050 \text{ s} = 0.025 RC.$$

因此，快速旋转近似给出

$$V_{\max} \simeq \frac{Q_m}{C} = \frac{1.00 \times 10^{-11}}{1.00 \times 10^{-8}} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ V}.$$

由第一个四分之一周期的解可得有限电阻的修正：

$$V_{\max} = \frac{4RQ_m}{T} \left(1 - e^{-T/(4RC)}\right) = \frac{Q_m}{C} \frac{1 - e^{-0.025}}{0.025} \simeq 0.989 \text{ mV}.$$

该最大值出现在 $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$ ；第二个正峰值较小。

解答已与官方解答核对。

题目 2：激光对透明棱镜的作用力

常用数据表

物理量	符号	数值
地球平均半径	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$
重力加速度	g	9.8 m s^{-2}
牛顿引力常量	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
真空介电常数	ε_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
真空磁导率	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [原文如此；正确值为 $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$]
真空（或空气）中的光速	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
元电荷	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
电子质量	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
质子质量	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
普朗克常量	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
阿伏伽德罗常量	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
玻尔兹曼常量	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
摩尔气体常量	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

激光对透明棱镜的作用力

强激光束可以通过折射对微小的透明物体施加可观的力。为说明这一点，考虑一个小玻璃三棱镜，其顶角为 $A = \pi - 2\alpha$ ，底边长为 $2h$ ，宽度为 w 。棱镜的折射率为 n ，质量密度为 ρ 。

设将该棱镜置于沿 x 方向水平传播的激光束中。（在本题中，始终假设棱镜不发生转动，即其顶角始终朝向激光束传播方向的反方向，三角形端面平行于 xy 平面，底面平行于 yz 平面，如图 1 所示。）取周围空气的折射率为 $n_{\text{air}} = 1$ 。假设棱镜各表面均镀有增透膜，因此不发生反射。

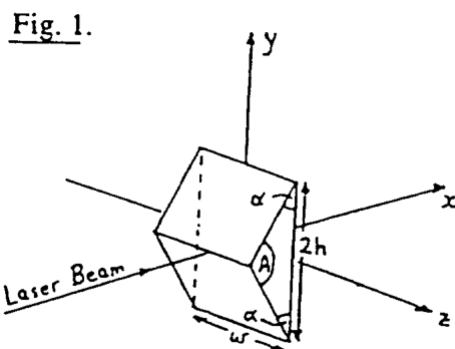


图 1。

激光束的光强沿 z 方向在整个宽度上均匀分布，但随到 x 轴的距离 y 线性减小：在 $y = 0$ 处取最大值 I_0 ，在 $y = \pm 4h$ 处降为零（图 2）。[光强是单位面积上的功率，例如可用 W m^{-2} 表示。]

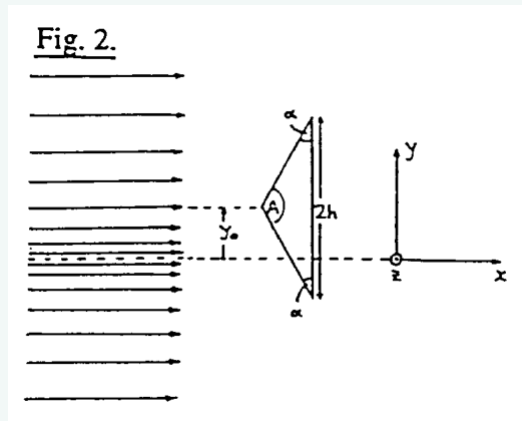


图 2。

1) 对于激光照射到棱镜上表面的情形，写出可用于确定角度 θ （见图 3）的方程（用 α 和 n 表示）。

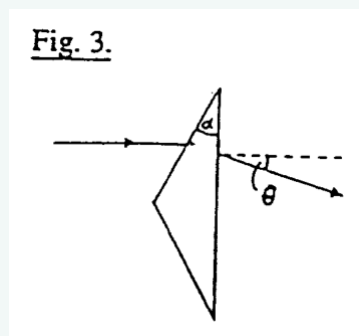


图 3。

2) 当棱镜顶角相对于 x 轴的位移为 y_0 ，且 $|y_0| \leq 3h$ 时，用 I_0 、 θ 、 h 、 w 和 y_0 表示激光对棱镜所施加合力的 x 分量和 y 分量。

画出力的水平分量和竖直分量随竖直位移 y_0 变化的图像。

3) 设激光束沿 z 方向的宽度为 1 mm ，厚度（沿 y 方向）为 $80 \mu\text{m}$ 。棱镜的参数为 $\alpha = 30^\circ$ 、 $h = 10 \mu\text{m}$ 、 $n = 1.5$ 、 $w = 1 \text{ mm}$ 和 $\rho = 2.5 \text{ g cm}^{-3}$ 。

当棱镜顶角位于激光束轴线下，位移为 $y_0 = -h/2$ （ $= -5 \mu\text{m}$ ）时，要使棱镜所受的激光作用力与重力（沿 $-y$ 方向）平衡，需要多少瓦的激光功率？

4) 设在无重力条件下进行该实验，使用同一个棱镜，激光束的尺寸与 (3) 中相同，但 $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$ 。

将棱镜移至距激光束中心线 $y = h/20$ 处并释放，所产生振动的周期是多少？

题目译自官方英文原文。

答案

1. 若 β 为上表面处的折射角, γ 为底面处的入射角, 则

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad \gamma = \alpha - \beta, \quad \sin \theta = n \sin \gamma.$$

等价地,

$$\theta = \arcsin \left[\sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \right].$$

2. 定义

$$u = \frac{y_0}{h}, \quad C_x = \frac{I_0 w h}{4c} (1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0 w h}{4c} \sin \theta.$$

则

$$F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases}$$

$$F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \operatorname{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}$$

水平力的图像关于纵轴对称, 中间为具有最大值的抛物线段, 两侧为直线段。竖直力的图像关于原点对称, 且力为回复力; 中间为二次曲线段, 两侧为常值线段。

3. 所需的激光总功率为

$$P \simeq 33 \text{ W}.$$

对应的峰值光强为 $I_0 \simeq 8.3 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}$ 。

4. 小振动近似给出

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho c h^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}} \simeq 1.12 \times 10^{-2} \text{ s}.$$

在给定振幅 $h/20$ 下保留弱非线性项, 得到

$$T \simeq 1.13 \times 10^{-2} \text{ s},$$

周期约增加 1.08%。

解答

我们采用几何光学, 对透明棱镜忽略吸收, 并使用题设的无反射条件。力的计算仅保留棱镜速度与 c 之比的最低阶项。

1) 折射与出射角

上表面与竖直底面的夹角为 α 。因此, 其内法线指向水平线下方, 与水平线的夹角为 α 。水平入射光线的入射角为 α 。

设 β 为相对于该法线测量的折射角。由斯涅尔定律得

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

因此，棱镜内的光线在水平线下方传播，与水平线的夹角为

$$\gamma = \alpha - \beta$$

出射面的法线沿水平方向，因此 γ 也是该面处的入射角。再次应用斯涅尔定律，得

$$n \sin \gamma = \sin \theta.$$

于是

$$\theta = \arcsin \left[n \sin \left(\alpha - \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} \right) \right].$$

展开正弦函数可得一个等价表达式：

$$\begin{aligned} \sin \theta &= n(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

因此

$$\sin \theta = \sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right).$$

图 3 所示的透射光路要求 $n \sin \gamma \leq 1$ ，题目给出的数值满足此条件。由对称性，从下表面入射的光线出射时位于水平线上方，与水平线的夹角为 θ 。

2) 力的分量及其图像

光强分布为

$$I(y) = I_0 \left(1 - \frac{|y|}{4h} \right), \quad |y| \leq 4h.$$

设 P_+ 和 P_- 分别为入射到上表面和下表面的光功率。当顶角位于 y_0 处时，两表面在垂直于入射光束的平面上的投影区间分别为

$$[y_0, y_0 + h], \quad [y_0 - h, y_0].$$

因此

$$P_+ = w \int_{y_0}^{y_0+h} I(y) dy, \quad P_- = w \int_{y_0-h}^{y_0} I(y) dy.$$

这里的面积元为 $w dy$ ，即在垂直于入射光方向的平面上的投影面积。无需额外引入入射角因子。

空气中功率为 P 的光束每单位时间携带的动量为 P/c 。对于从上表面入射的光，入射方向和出射方向分别为

$$(1, 0), \quad (\cos \theta, -\sin \theta).$$

棱镜所受的力等于入射动量流率减去出射动量流率：

$$\mathbf{F}_+ = \frac{P_+}{c} (1 - \cos \theta, \sin \theta).$$

类似地，

$$\mathbf{F}_- = \frac{P_-}{c} (1 - \cos \theta, -\sin \theta).$$

相加得

$$F_x = \frac{1 - \cos \theta}{c} (P_+ + P_-), \quad F_y = \frac{\sin \theta}{c} (P_+ - P_-).$$

为计算这些功率，令 $u = y_0/h$ 。无量纲光强分布的一个原函数为

$$J(v) = v - \frac{v|v|}{8}, \quad J'(v) = 1 - \frac{|v|}{4}.$$

因此，

$$\frac{P_+}{I_0wh} = J(u+1) - J(u), \quad \frac{P_-}{I_0wh} = J(u) - J(u-1).$$

当 $|u| \leq 1$ 时，棱镜跨在光束轴线两侧。计算上述表达式可得

$$P_+ + P_- = \frac{I_0wh}{4}(7 - u^2),$$

$$P_+ - P_- = -\frac{I_0wh}{4}u(2 - |u|).$$

当 $1 \leq |u| \leq 3$ 时，整个棱镜位于轴线的一侧，该处光强随位置线性变化：

$$P_+ + P_- = \frac{I_0wh}{4}(8 - 2|u|),$$

$$P_+ - P_- = -\frac{I_0wh}{4}\text{sgn}(u).$$

因此，令

$$C_x = \frac{I_0wh}{4c}(1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0wh}{4c}\sin \theta,$$

所求的力为

$$F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases} \quad F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \text{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}$$

绘图所用的数值如下：

$u = y_0/h$	F_x/C_x	F_y/C_y
-3	2	1
-2	4	1
-1	6	1
-1/2	6.75	0.75
0	7	0
1/2	6.75	-0.75
1	6	-1
2	4	-1
3	2	-1

对于水平力的图像，在 $u = -1$ 与 $u = 1$ 之间画一条开口向下的抛物线，在原点处取最大值 $7C_x$ 。再向两侧用直线段延伸至 $u = \pm 3$ 处的 $2C_x$ 。在整个给定区间内，该力始终为正。

对于竖直力的图像，从 $u = -3$ 到 -1 画出常值 $+C_y$ ，然后接一段二次曲线，使其在 $u = 0$ 处减小到零。将该曲线段关于原点作中心对称，得到到达 $u = 1$ 处 $-C_y$ 的曲线段，再水平延伸至 $u = 3$ 。其在原点处的斜率为 $-2C_y/h$ 。两条力的图像在 $u = \pm 1$ 处连接时，斜率均连续。

竖直力是回复力：位于轴线下方的棱镜，其上表面接收到的光更多，因而被向上推；位于轴线上方时，则被向下推。

3) 平衡重力所需的激光功率

顶角到底面的距离为

$$d = h \tan \alpha.$$

因此，体积和质量分别为

$$V = \frac{1}{2}(2h)d w = h^2 w \tan \alpha, \quad m = \rho h^2 w \tan \alpha.$$

采用国际单位制，

$$h = 10^{-5} \text{ m}, \quad w = 10^{-3} \text{ m}, \quad \rho = 2.5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

于是

$$m = 1.4434 \times 10^{-10} \text{ kg}, \quad mg = 1.4145 \times 10^{-9} \text{ N}.$$

对于 $\alpha = 30^\circ$ 和 $n = 1.5$,

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin 30^\circ}{1.5}\right) = 19.471^\circ, \\ \gamma = 10.529^\circ, \quad \theta = 15.908^\circ, \quad \sin \theta = 0.274094.$$

在 $y_0 = -h/2$ 处，有 $u = -1/2$ ，因此

$$F_y = \frac{3}{4}C_y = \frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c}.$$

竖直方向平衡要求

$$\frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c} = \rho h^2 w \tan \alpha g.$$

因此

$$I_0 = \frac{16\rho g h c \tan \alpha}{3 \sin \theta} = 8.2571 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}.$$

所需功率是整个光束的功率。光束的厚度 $80 \mu\text{m}$ 等于 $8h$ ，其三角形光强分布曲线下的面积为 $4hI_0$ 。于是

$$P = w \int_{-4h}^{4h} I(y) dy = 4hwI_0.$$

代入得

$$P = 4(10^{-5})(10^{-3})(8.2571 \times 10^8) = 33.03 \text{ W}.$$

因此

$$\boxed{P \simeq 33 \text{ W}.}$$

这按题目要求平衡了 y 方向的重力。水平方向的光学作用力仍为正。

4) 无重力时的振动周期

在题设的整个振动过程中， $|y_0| \leq h/20 < h$ 。中心区域的力表达式可写为

$$F_y = -\frac{I_0 w \sin \theta}{2c} y_0 \left(1 - \frac{|y_0|}{2h}\right).$$

定义

$$K = \frac{I_0 w \sin \theta}{2c}.$$

在振幅 $a = h/20$ 下, 非线性因子与 1 的差最多为

$$\frac{a}{2h} = \frac{1}{40} = 2.5\%.$$

因此, 最低阶近似为简谐运动:

$$m\ddot{y}_0 = -Ky_0, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}.$$

利用上面求得的质量,

$$\omega_0^2 = \frac{I_0 \sin \theta}{2\rho ch^2 \tan \alpha},$$

并且

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho ch^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}}.$$

对于 $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$,

$$K = 4.5682 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-1}, \quad \omega_0 = 562.58 \text{ s}^{-1},$$

于是

$$T_0 = 0.0111685 \text{ s} \approx 11.2 \text{ ms}.$$

也可以利用力的精确表达式计算有限振幅修正。取原点处的势能为零,

$$U(y_0) = \frac{K}{2}y_0^2 - \frac{K}{6h}|y_0|^3.$$

从 $y_0 = a$ 处由静止释放, 得

$$\frac{1}{2}m\dot{y}_0^2 = U(a) - U(y_0).$$

由对称性, 周期为从 0 运动到 a 所需时间的四倍:

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{K}} \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2 - (a^3 - y^3)/(3h)}}.$$

令 $s = y/a$,

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2 - \frac{a}{3h}(1 - s^3)}}.$$

当 $a/h = 1/20$ 时, 数值计算得到

$$\frac{T}{T_0} = 1.01079,$$

因此

$$T = 0.0112890 \text{ s} \approx 11.3 \text{ ms}.$$

因此，周期约为 0.011 s；在给定振幅下，小振动近似的误差约为 1.1%。

解答已与官方解答核对。

题目 3：电子束

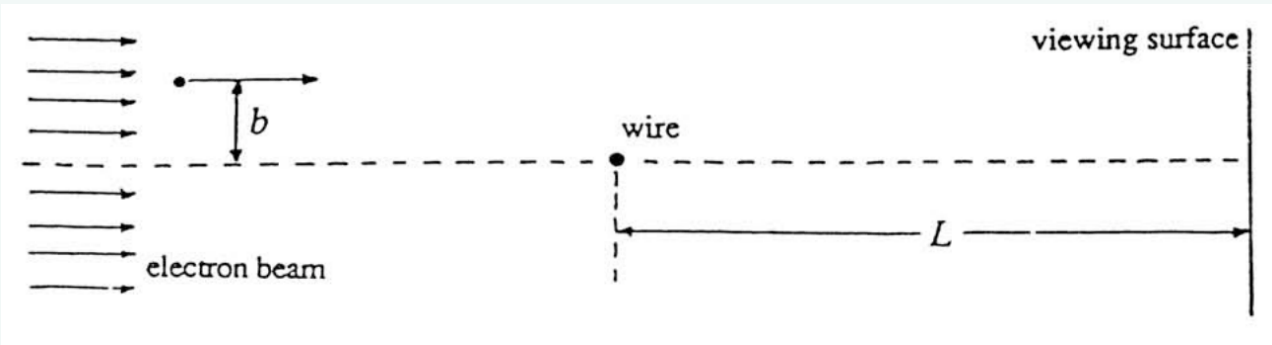
通用数据表

物理量	符号	数值
地球平均半径	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$.
重力加速度	g	9.8 m s^{-2} .
牛顿引力常量	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.
真空介电常数	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$.
真空磁导率	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [原文如此；正确值为 $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$] .
真空（或空气）中的光速	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
元电荷	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$.
电子质量	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.
质子质量	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.
普朗克常量	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$.
阿伏伽德罗常量	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
玻尔兹曼常量	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.
摩尔气体常量	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

理论题 3

电子束

加速电压 V_0 产生一束均匀、平行的高能电子束。如图所示，电子经过一根细长的带正电铜丝，铜丝沿垂直于电子束初始方向的方向拉直。符号 b 表示若铜丝不带电，电子经过铜丝时与铜丝的距离。随后，电子继续前进，到达位于铜丝后方距离为 L ($\gg b$) 处的屏幕（观察面），如图所示。电子束最初相对于铜丝轴线延伸至 $\pm b_{\text{max}}$ 处。在垂直于纸面的方向上，电子束的宽度和铜丝的长度均可视为无限大。



带电铜丝沿垂直于纸面的方向延伸。示意图未按比例绘制。

这里给出了一些数值数据；其他数值数据可在试卷前面的表格中找到：

铜丝半径	$= r_0 =$	10^{-6} m
b 的最大值	$= b_{\max} =$	10^{-4} m
铜丝单位长度所带电荷量	$= q_{\text{linear}} =$	$4.4 \times 10^{-11} \text{ C m}^{-1}$
加速电压	$= V_0 =$	$2 \times 10^4 \text{ V}$
铜丝到观察屏的距离	$= L =$	0.3 m

注意： 对于第 2 – 4 部分，请作出合理近似，以求得解析解和数值解。

- 1) 计算铜丝产生的电场 $\mathbf{E}$ 。画出 $\mathbf{E}$ 的大小随到铜丝轴线距离变化的示意图。
- 2) 运用经典物理计算电子的偏转角。计算时，参数 b 的取值应使电子不撞上铜丝。用 θ_{final} 表示电子初速度与电子到达观察面时的速度之间的（小）夹角。由此计算 θ_{final} 。
- 3) 计算并画出经典物理预言的观察屏上电子落点图样（即强度分布）。
- 4) 量子物理预言的强度分布与经典物理预言的分布有重大差异。画出量子物理所预言图样的示意图，并给出定量细节。

题目译自官方英文原文。

答案

设 y 为屏幕上带正负号的横向坐标，其中 $y = 0$ 位于铜丝正对的位置，并设 I_0 为入射电子束强度。

1. 电场沿径向向外：

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0, \\ \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}, & r > r_0. \end{cases}$$

电场大小在表面处从零跃变为 $7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$ ，随后按 $1/r$ 递减。

2. 从两侧经过的电子均朝轴线偏转，偏转角近似相同：

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0} = 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

3. 考虑铜丝的有限半径，经典图样为

$$I_{\text{cl}}(y) \simeq \begin{cases} 2I_0, & |y| < 17.6 \mu\text{m}, \\ I_0, & 17.6 \mu\text{m} < |y| < 81.4 \mu\text{m}, \\ 0, & |y| > 81.4 \mu\text{m}. \end{cases}$$

因此，中央强度加倍的条带宽约 $35 \mu\text{m}$ ，整个照亮区域宽约 $163 \mu\text{m}$ 。

4. 对于相干电子，中央重叠区域内存在干涉条纹：

$$\lambda_{\text{dB}} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}, \quad d \simeq \frac{\lambda_{\text{dB}}}{2\theta_{\text{final}}} = 7.0 \times 10^{-8} \text{ m} = 70 \text{ nm}.$$

远离包络边缘处，

$$I_{\text{q}}(y) \simeq 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right)$$

在重叠区域内成立。中心为亮纹；各极大值均达到 $4I_0$ ，各极小值均为零。整个重叠区域内约有 5.1×10^2 个条纹周期。两侧区域的强度仍近似为 I_0 。

解答

1) 电场

铜是导体，因此铜丝内部的静电场为零。在可视为无限长的铜丝外部，由柱对称性可知，电场沿径向，且仅取决于到其轴线的距离 r 。

对半径为 $r > r_0$ 、长度为 ℓ 的同轴圆柱面应用高斯定律：

$$E(r)(2\pi r\ell) = \frac{q_{\text{linear}}\ell}{\epsilon_0}.$$

因此，

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}.$$

由于铜丝带正电，电场方向向外。

代入数值得

$$\frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{2\pi(8.85 \times 10^{-12})} = 0.791 \text{ V},$$

所以

$$E(r_0^+) = \frac{0.791}{10^{-6}} \simeq 7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}.$$

所要求的图线在 $0 \leq r < r_0$ 时位于横轴上，在 $r = r_0$ 处向上跃变，随后沿递减的 $1/r$ 曲线变化，渐近趋于零。例如，

$$E(10r_0) = 7.9 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad E(100r_0) = 7.9 \times 10^3 \text{ V m}^{-1}.$$

2) 偏转角

取 x 轴沿入射电子束方向， y 轴位于图示平面内并与之垂直。铜丝穿过 $x = y = 0$ 处。

使用非相对论能量关系：

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV_0, \quad v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_e}} \simeq 8.4 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

这里 $eV_0/(m_e c^2) \simeq 0.039$ ，因此对本题采用非相对论处理是合理的近似。

沿未偏转轨迹 $y = b$ 计算微小的横向冲量，并将 v 视为常量。这与铜丝电势影响较弱的情况相符： r_0 与 L 之间的电势差仅为

$$\Phi(r_0) - \Phi(L) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{L}{r_0}\right) \simeq 10 \text{ V},$$

远小于 $V_0 = 2 \times 10^4 \text{ V}$ 。

对于从铜丝上方经过的电子, $b > 0$, 其所受横向力为

$$F_y = -eE_y = -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} \frac{b}{x^2 + b^2}.$$

由于 $dt = dx/v$, 电子到达 $x = L$ 时的横向动量变化近似为

$$\begin{aligned} \Delta p_y &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^L F_y dx \\ &= -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 v} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{L}{b}\right) \right]. \end{aligned}$$

上游积分下限的选取假设: 给定初始电子束的位置到铜丝的距离与 b 相比足够大。

对于小角度偏转,

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{|\Delta p_y|}{m_e v}.$$

利用 $m_e v^2 = 2eV_0$, 得

$$\theta_{\text{final}}(b) \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\pi\epsilon_0 V_0} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{L}{b}\right) \right].$$

由于 $L \gg b$, 方括号内的量近似为 π , 得到

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0}.$$

因此, 在这一精度下, 偏转角与瞄准距离无关:

$$\theta_{\text{final}} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{4(8.85 \times 10^{-12})(2 \times 10^4)} \simeq 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

即使在 $b = b_{\text{max}}$ 时, 屏幕距离有限所引起的方括号内修正量的相对大小也仅为 10^{-4} 。

电子束的上半部分向下偏转, 下半部分向上偏转。在同一近似下, 能够通过的电子满足 $b > r_0$ 。这里忽略吸引力造成的碰撞临界值的微小变化。

3) 经典强度分布

记

$$\alpha = \theta_{\text{final}}, \quad a = L\alpha \simeq 18.6 \mu\text{m}.$$

由于 $L \gg b_{\text{max}}$, 可将偏转视为发生在铜丝附近。因此, 在轴线上距离为 b 处入射的电子到达

$$y = b - a,$$

而在轴线下相同距离处入射的电子到达

$$y = -b + a.$$

只有 $r_0 < b < b_{\text{max}}$ 的电子能够通过。因此, 通过的两部分电子束分别占据屏幕上的以下区间:

$$\text{上方入射部分: } r_0 - a < y < b_{\text{max}} - a,$$

$$\text{下方入射部分: } -b_{\text{max}} + a < y < a - r_0.$$

代入数值，这两个区间分别为

$$-17.6 < y < 81.4 \mu\text{m}$$

和

$$-81.4 < y < 17.6 \mu\text{m},$$

对于每一部分，映射均满足 $|dy/db| = 1$ 。因此，由电子通量守恒可知，只有一部分电子束到达的地方强度为 I_0 ，两部分均到达的地方强度为 $2I_0$ 。

定义

$$w = a - r_0 \simeq 17.6 \mu\text{m}, \quad Y = b_{\text{max}} - a \simeq 81.4 \mu\text{m}.$$

则

$$I_{\text{cl}}(y) = \begin{cases} 2I_0, & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

示意图关于 $y = 0$ 对称。从左侧开始，强度在 $-81.4 \mu\text{m}$ 处由零跃变为 I_0 ，在 $-17.6 \mu\text{m}$ 处升至 $2I_0$ ，在 $+17.6 \mu\text{m}$ 处降至 I_0 ，并在 $+81.4 \mu\text{m}$ 处恢复为零。各条带沿平行于铜丝的方向均匀延伸。

它们的宽度为

$$\text{中央重叠区域宽度} = 2(a - r_0) \simeq 35.3 \mu\text{m},$$

$$\text{每侧区域宽度} = b_{\text{max}} - 2a + r_0 \simeq 63.7 \mu\text{m}.$$

中央不存在几何阴影：偏转后的两部分电子束相互重叠。

检验通量可得

$$\int I_{\text{cl}}(y) dy = 2I_0(b_{\text{max}} - r_0),$$

这恰好等于在此近似下扣除被铜丝截获的电子后的入射通量。

4) 量子强度分布

对于理想的单能相干入射电子束，从铜丝两侧通过的部分在重叠区域内发生干涉。

电子的德布罗意波长为

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV_0}},$$

所以

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31})(1.60 \times 10^{-19})(2 \times 10^4)}} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

在重叠区域内，两列近似平面波分别沿与原方向成 $+\alpha$ 和 $-\alpha$ 角的方向传播。因此，它们的横向波矢分量分别为 $+k \sin \alpha$ 和 $-k \sin \alpha$ ，其中

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{dB}}}.$$

镜像对称性使它们在 $y = 0$ 处的相位相同。在屏幕坐标 y 处，它们的相位差为

$$\Delta\phi(y) = 2ky \sin \alpha.$$

每列波单独贡献的强度均为 I_0 ，所以

$$\begin{aligned} I_q(y) &= I_0 + I_0 + 2I_0 \cos \Delta\phi \\ &= 4I_0 \cos^2(ky \sin \alpha). \end{aligned}$$

因此，条纹间距为

$$d = \frac{\lambda_{\text{dB}}}{2 \sin \alpha} \simeq \frac{\lambda_{\text{dB}}}{2\alpha},$$

得到

$$d \simeq 6.99 \times 10^{-8} \text{ m} \simeq 70 \text{ nm}.$$

在几何包络近似的精度下，

$$I_q(y) \simeq \begin{cases} 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right), & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

所要求的示意图与经典图样具有相同的大尺度包络，但中央平台被密集的条纹取代：

- 亮纹出现在 $y = nd$ 处，强度为 $4I_0$ ； n 为整数。
- 暗纹出现在 $y = (n + \frac{1}{2})d$ 处，强度为零。
- 位于 $y = 0$ 处的中央条纹为亮纹。
- 条纹为直线，且与铜丝平行。
- 条纹的平均强度为 $2I_0$ ，等于经典分布的中央强度。

整个重叠区域内的条纹周期数近似为

$$N \simeq \frac{2w}{d} = \frac{35.3 \times 10^{-6}}{6.99 \times 10^{-8}} \simeq 5.1 \times 10^2.$$

衍射使包络边界变得平滑，因此上述分段表达式适用于远离这些边缘的区域。相关的横向衍射尺度的量级为

$$\sqrt{\lambda_{\text{dB}} L} \simeq 1.6 \text{ } \mu\text{m}.$$

无法分辨 70 nm 条纹的探测器测得的是条纹的平均值，因而近似得到经典分布。

解答已与官方解答核对。