

IPhO 1993

Teorik sorular ve çözümler · Williamsburg, Virginia, ABD · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1993/

Soru 1: Atmosfer Elektrliği

Genel Bilgiler Tablosu

Büyüklik	Sembol	Değer
Dünya'nın ortalama yarıçapı	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$.
yerçekimi ivmesi	g	9.8 m s^{-2} .
Newton kütleçekim sabiti	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.
boşluğun elektriksel geçirgenliği	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$.
boşluğun manyetik geçirgenliği	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [sic; doğru değer $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$].
ışığın boşluktaki (veya havadaki) hızı	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
temel yük	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$.
elektronun kütlesi	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.
protonun kütlesi	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.
Planck sabiti	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$.
Avogadro sabiti	N_A	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
Boltzmann sabiti	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.
molar gaz sabiti	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Teorik Soru 1

ATMOSFER ELEKTRİĞİ

Elektrostatik açısından Dünya'nın yüzeyi iyi bir iletken olarak kabul edilebilir. Bu yüzey, belirli bir toplam Q_0 yükü taşır ve ortalama yüzey yük yoğunluğu σ_0 'dır.

1) Açık hava koşullarında, Dünya'nın yüzeyinde aşağı yönlü, yaklaşık 150 V/m büyüklüğünde bir E_0 elektrik alanı vardır. Dünya'nın yüzey yük yoğunluğunun ve yüzeyinde taşınan toplam yükün büyüklüklerini bulunuz.

2) Aşağı yönlü elektrik alanın büyüklüğü yükseklikle azalır ve 100 m yükseklikte yaklaşık 100 V/m olur. Dünya'nın yüzeyi ile 100 m yükseklik arasında atmosferin her m^3 'ündeki ortalama net yük miktarını hesaplayınız.

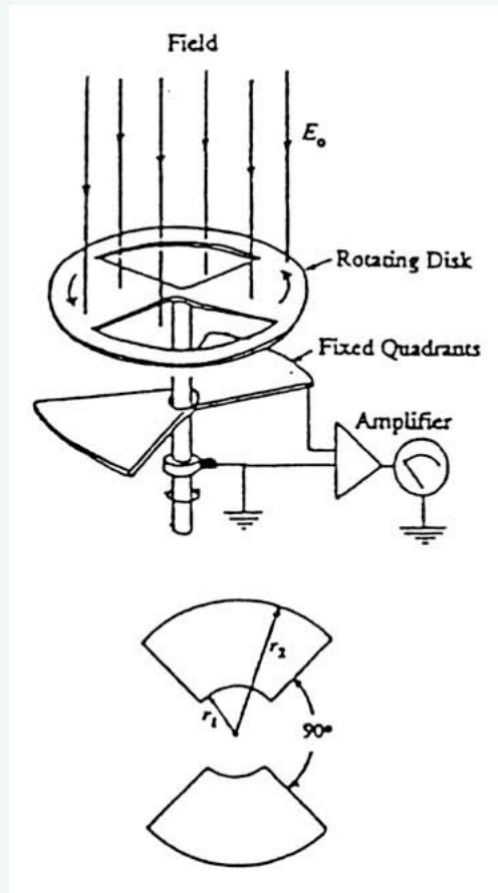
3) (2)'de hesapladığınız net yük yoğunluğu, aslında birim hacimdeki tek yüklü pozitif ve negatif iyon sayılarının (n_+ ve n_-) neredeyse eşit olmasının sonucudur. Dünya'nın yüzeyine yakın bölgede, açık hava koşullarında, $n_+ \approx n_- \approx 6 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$ 'tür. Bu iyonlar düşey elektrik alanın

etkisiyle hareket eder. Süratleri alan şiddetiyle orantılıdır:

$$v \approx 1.5 \times 10^{-4} \cdot E,$$

burada v , m/s, E ise V/m cinsindendir. Dünya'nın yüzey yükünü koruyan başka hiçbir süreç (örneğin yıldırım) gerçekleşmeseydi, atmosferdeki iyonların hareketiyle bu yükün yarısının nötrlenmesi ne kadar sürerdi?

4) Atmosferdeki elektrik alanı ve dolayısıyla σ_0 'ı ölçmenin bir yolu, şekilde gösterilen sistemi kullanmaktır. Toprakтан yalıtılmış, ancak birbirine bağlı iki metal çeyrek daire parçası, üzerinde çeyrek daire biçiminde iki delik bulunan, topraklanmış ve sabit hızla dönen bir diskin hemen altına yerleştirilmiştir. (Şekilde, düzeni göstermek amacıyla aralık abartılmıştır.) Her turda iki kez, yalıtılmış çeyrek daire parçaları alana tamamen açık hâle gelir, ardından (bir periyodun $1/4$ 'ü kadar süre sonra) alandan tamamen perdelenir. Dönme periyodu T , yalıtılmış çeyrek daire parçalarının iç ve dış yarıçapları ise şekilde gösterildiği gibi r_1 ve r_2 olsun.



$t = 0$ anını, yalıtılmış çeyrek daire parçalarının tamamen perdelenildiği bir an olarak alınız.

Yalıtılmış çeyrek daire parçalarının üst yüzeyinde indüklenen toplam $q(t)$ yükünü, $t = 0$ ile $t = T/2$ arasında zamanın fonksiyonu olarak veren ifadeleri elde ediniz ve bu değişimin grafiğini çizin.

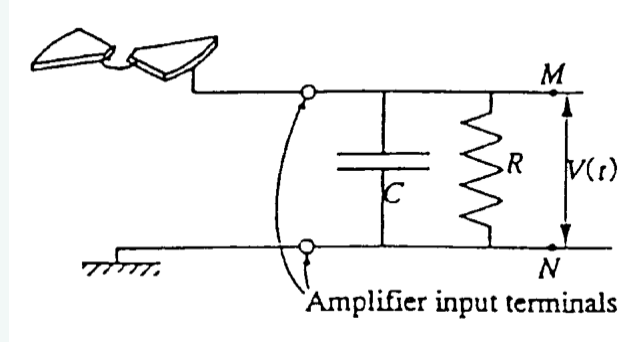
[Bu durumda atmosferdeki iyon akımının etkileri ihmal edilebilir.]

(5) (4)'te açıklanan sistem, giriş devresi paralel bağlı bir C kondansatörü ile bir R direncine eşdeğer olan bir yükseltece bağlanmıştır. (Çeyrek daire sisteminin sığasının C 'ye göre ihmal edilebilir olduğunu varsayabilirsiniz.) Disk, T dönme periyoduyla dönmeye başlatıldıktan hemen

sonra, bir tur boyunca M ve N noktaları arasındaki V gerilim farkının t 'ye bağlı grafiklerinin biçimini aşağıdaki durumlar için çizin:

a) $T = T_a \ll CR$;

b) $T = T_b \gg CR$.



[C ve R 'nin sabit değerlere sahip olduğunu; (a) ve (b) durumları arasında yalnızca T 'nin değiştiğini varsayınız.]

(a) ve (b) durumlarında $V(t)$ 'nin en büyük değerlerinin yaklaşık oranı V_a/V_b için bir ifade elde ediniz.

6) $E_0 = 150 \text{ V/m}$, $r_1 = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 7 \text{ cm}$, $C = 0.01 \mu\text{F}$, $R = 20 \text{ M}\Omega$ olduğunu kabul ediniz ve diskin saniyede 50 tur atacak şekilde dönmeye başlatıldığını varsayınız.

Bu durumda bir tur boyunca V 'nin en büyük değeri yaklaşık olarak nedir?

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

$V = V_M - V_N$ alınız. 4–6. kısımlar için, tamamen açık durumdaki alanı ve bu alanda indüklenen yükün büyüklüğünü şöyle tanımlayınız:

$$A_m = \frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2), \quad Q_m = \epsilon_0 E_0 A_m > 0.$$

1. Dünya'nın yüzey yükü negatiftir:

$$\sigma_0 \simeq -1.3 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}, \quad Q_0 \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

İstenen büyüklükler, bu değerlerin mutlak değerleridir.

2. Atmosferin ortalama yük yoğunluğu

$$\bar{\rho} \simeq +4.4 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

olarak bulunur.

3. Yalnızca yüzeye ulaşan pozitif iyonlar hesaba katılıp bunların derişimi yaklaşık olarak sabit alındığında,

$$t_{1/2} = \frac{\epsilon_0 \ln 2}{en_+(1.5 \times 10^{-4})} \simeq 4.3 \times 10^2 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

4. Üst yüzeyde indüklenen yük

$$q(t) = \begin{cases} -Q_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -Q_m \left(2 - \frac{4t}{T}\right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

biçimindedir. Grafiği, $(0, 0)$, $(T/4, -Q_m)$ ve $(T/2, 0)$ noktalarını doğru parçalarıyla birleştirir ve her $T/2$ sürede tekrarlanır.

5. $V(0) = 0$ başlangıç koşuluyla ilk tur için: - (a) $V \simeq -q/C$: her birinin yüksekliği

$$V_a \simeq \frac{Q_m}{C}.$$

olan iki pozitif üçgen darbe. - (b) V , RC zaman sabitli üstel geçişlerle yaklaşık $+V_b$ ve $-V_b$ değerleri arasında değişir; burada

$$V_b \simeq \frac{4RQ_m}{T_b}.$$

Dolayısıyla

$$\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{T_b}{4RC}.$$

6. İlk tur sırasındaki en büyük gerilim

$$V_{\max} \simeq 1.0 \times 10^{-3} \text{ V} = 1.0 \text{ mV}.$$

olarak bulunur. Sonlu direnç hesaba katıldığında, $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$ anında ulaşılan 0.989 mV değeri elde edilir.

Çözüm

1) Dünya'nın yüzey yükü

Elektrostatik dengedeki bir iletkenin içindeki elektrik alan sıfırdır. Yüzeyin iki yanına uzanan küçük, yassı bir silindire Gauss yasası uygulandığında

$$E_{\perp, \text{outside}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0},$$

elde edilir; burada normal, iletkenin dışarı doğru yönelmiştir. Alan aşağıya, Dünya'nın içine doğru yöneldiğinden,

$$\sigma_0 = -\epsilon_0 E_0.$$

Böylece

$$\sigma_0 = -(8.85 \times 10^{-12})(150) = -1.3275 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}.$$

Dünya'yı bir küre olarak yaklaştırıp bu değeri ortalama yüzey yük yoğunluğu olarak kullanırsak,

$$Q_0 = 4\pi R_E^2 \sigma_0 = -4\pi(6.4 \times 10^6)^2(1.3275 \times 10^{-9}) \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

Dolayısıyla yüzey yük yoğunluğunun büyüklüğü yaklaşık 1.3 nC m^{-2} , toplam yükün büyüklüğü ise yaklaşık $6.8 \times 10^5 \text{ C}$ 'dur.

2) Atmosferdeki uzay yükü

z yukarı doğru artsın. İki yükseklikteki düşey alanların işaretli değerleri

$$E_z(0) = -150 \text{ V/m}, \quad E_z(100 \text{ m}) = -100 \text{ V/m}.$$

şeklinde. $100/R_E \ll 1$ olduğundan, 100 m'lik yükseklik boyunca Dünya'nın eğriliği ihmal edilebilir. Bu nedenle yatay kesit alanı A olan düşey bir sütuna Gauss yasası uygulandığında

$$\bar{\rho}Ah = \epsilon_0 A [E_z(h) - E_z(0)].$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\bar{\rho} = \epsilon_0 \frac{-100 - (-150)}{100} = (8.85 \times 10^{-12})(0.50) = 4.425 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

Yük **pozitif**dir; bu, aşağı yönlü alanın yükseklik arttıkça zayıflamasıyla tutarlıdır.

3) Yüzey yükünün yarısını nötrlemek için gereken süre

Dünya negatif yüklüdür. Pozitif iyonlar aşağıya doğru sürüklenir ve yüzeyine ulaşabilir; negatif iyonlar ise yukarıya doğru sürüklenir. Dolayısıyla yüzeyi nötrleyen akıma **yalnızca pozitif iyonlar** katkıda bulunur.

İyon hareketliliğini şöyle yazalım:

$$\mu = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad v = \mu E.$$

Bu sürüklenme hesabında, verilen yüzeye yakın n_+ derişiminin yaklaşık olarak sabit kaldığı kabul edilirse, birim alana birim zamanda ulaşan pozitif yük

$$j_+ = en_+v = en_+\mu E.$$

olur. $S(t) = |\sigma(t)|$, kalan negatif yüzey yük yoğunluğunun büyüklüğünü gösterebilir. İletken sınır koşulu

$$E(t) = \frac{S(t)}{\epsilon_0}.$$

bağıntısını verir. Ulaşan her pozitif iyon S' 'yi azalttığından,

$$\frac{dS}{dt} = -j_+ = -\frac{en_+\mu}{\epsilon_0} S.$$

Bu nedenle boşalma üsteldir:

$$S(t) = S(0)e^{-t/\tau_+}, \quad \tau_+ = \frac{\epsilon_0}{en_+\mu}.$$

Sayısal olarak,

$$en_+\mu = (1.60 \times 10^{-19})(6 \times 10^8)(1.5 \times 10^{-4}) = 1.44 \times 10^{-14} \text{ S m}^{-1},$$

ve

$$\tau_+ = \frac{8.85 \times 10^{-12}}{1.44 \times 10^{-14}} \simeq 615 \text{ s}.$$

$S(t_{1/2}) = S(0)/2$ konulduğunda,

$$t_{1/2} = \tau_+ \ln 2 \simeq 426 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

Yukarı hareket eden negatif iyonların iletkenliğini eklemek, Dünya'nın yüzeyine girmeyen bir akımı yanlışlıkla hesaba katmak olurdu.

4) Çeyrek daire parçalarında indüklenen yük

Kenarlardaki saçaklanmayı ihmal edelim ve topraklanmış diskin çeyrek daire parçalarını örttüğü her yerde perdelemenin tam olduğunu kabul edelim. Alana açık bir üst yüzeyde, aşağı yönlü alanın gerektirdiği yüzey yük yoğunluğu

$$\sigma_{\text{upper}} = -\varepsilon_0 E_0.$$

şeklindedir. İki çeyrek halka parçasının toplam alanı

$$A_m = 2 \left[\frac{\pi}{4} (r_2^2 - r_1^2) \right] = \frac{\pi}{2} (r_2^2 - r_1^2).$$

olarak bulunur. Diskin açısal hızı

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

İlk çeyrek tur sırasında, her açıklık $\theta = \omega t$ açısal genişliğinde bir bölgeyi alana açık bırakır. Bu nedenle toplam açık alan

$$A(t) = 2 \left[\frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \theta \right] = \frac{2\pi(r_2^2 - r_1^2)}{T} t, \quad 0 \leq t \leq T/4.$$

olur. Bu alan $T/4$ anında A_m 'ye ulaşır, ardından aynı hızla azalarak $T/2$ anında sıfır olur. Dolayısıyla

$$A(t) = \begin{cases} A_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ A_m \left(2 - \frac{4t}{T} \right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

$q(t) = -\varepsilon_0 E_0 A(t)$ olduğundan,

$$q(t) = \begin{cases} -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} t, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Grafik aşağı yönlü bir üçgen darbedir: sıfırdan başlar, doğrusal olarak azalarak $T/4$ anında $-Q_m$ 'ye ulaşır, ardından doğrusal olarak artarak $T/2$ anında sıfıra döner. Her turda iki özdeş darbe vardır.

Burada q , **üst yüzeydeki** yüküdür. Yalıtılmış bir çeyrek daire sistemi, mevcut yükünü yeniden dağıtarak bu yüzey yükünü edinebilir.

5) Yükselteç girişindeki gerilim

N topraklanmış olmak üzere $V = V_M - V_N$ alalım. Dönme başlamadan önce çeyrek daire parçaları perdelenmiştir ve direnç kondansatörü boşaltmıştır; dolayısıyla

$$q(0) = 0, \quad V(0) = 0.$$

Çeyrek daire sisteminin sığası C 'ye göre ihmal edildiğinde, bağlı giriş iletkeniyle ilişkili yük $q + CV$ 'dir. Pozitif yük, bu iletken den direnç üzerinden V/R hızıyla ayrılır; dolayısıyla yükün korunumu

$$\frac{d}{dt}(q + CV) = -\frac{V}{R},$$

veya

$$\boxed{C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = -\frac{dq}{dt}}.$$

bağıntısını verir. Çeyrek daire parçaları alana açıldıkça, üst yüzeyleri negatif yük kazanır. Bu, kondansatörün üst levhasında pozitif yük bırakır; dolayısıyla gerilim başlangıçta pozitif yönde artar.

4. kısımdan,

$$-\frac{dq}{dt} = \begin{cases} +I_0, & 0 < t < T/4, \\ -I_0, & T/4 < t < T/2, \\ +I_0, & T/2 < t < 3T/4, \\ -I_0, & 3T/4 < t < T, \end{cases} \quad I_0 = \frac{4Q_m}{T}.$$

Dolayısıyla devre, kare dalga biçimindeki bir akımla sürülür.

Eksiksiz bir ifade vermek için $\tau = RC$, $B = RI_0$ ve $t_k = kT/4$ tanımlarını yapalım. $k = 0, 1, 2, 3$ çeyrek turlarında gerilim

$$V(t) = (-1)^k B + [V(t_k) - (-1)^k B] e^{-(t-t_k)/\tau}.$$

şeklinde. Bu ifade, $V(0) = 0$ ile birlikte başlangıçtaki sürekli dalga biçimini belirler.

(a) Hızlı dönme: $T_a \ll RC$

İlk tur sırasında R üzerinden çok az yük sızar. Baş mertebede,

$$C \frac{dV}{dt} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

Başlangıç koşulları kullanıldığında,

$$V(t) \simeq -\frac{q(t)}{C}.$$

Dolayısıyla gerilim, iki pozitif üçgen darbeden oluşur:

t/T_a	0	1/4	1/2	3/4	1
$V/(Q_m/C)$, baş mertebede	0	1	0	1	0

Ardışık değerleri doğru parçalarıyla birleştiriniz. En büyük gerilim yaklaşık olarak

$$\boxed{V_a \simeq \frac{Q_m}{C}}.$$

olur. Sonlu T_a/RC için, parçalar hafifçe eğrilir, minimumlar hafifçe negatif olur ve ikinci pozitif tepe birinciden biraz daha alçaktır. Yukarıdaki pozitif üçgenler, soruda istenen **ilk tur** için baş mertebedeki yaklaşımdır.

(b) Yavaş dönme: $T_b \gg RC$

Kısa geçişler dışında kondansatör akımı küçüktür ve

$$\frac{V}{R} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

Böylece gerilim, dönüşümlü olarak şu seviyelere yaklaşır:

$$\boxed{V \simeq \pm V_b, \quad V_b = \frac{4RQ_m}{T_b}}.$$

Grafik şu özelliklere sahiptir:

- Sıfırdan başlar ve RC zaman sabitiyle üstel olarak $+V_b$ 'ye doğru yükselir.
- $t = T_b/4$ sonrasında üstel olarak $-V_b$ 'ye doğru düşer.
- $t = T_b/2$ sonrasında $+V_b$ 'ye doğru yükselir.
- $t = 3T_b/4$ sonrasında $-V_b$ 'ye doğru düşer.

Her çeyrek tur RC 'ye göre uzun olduğundan, büyük bölümü neredeyse yatay bir platodur. Gerilim, anahtarlama anlarında sürekli kalır. Örneğin, ilk anahtarlamanın hemen ardından,

$$V(t) \simeq -V_b + 2V_b e^{-(t-T_b/4)/(RC)},$$

olduğundan, bu anahtarlamaadan yaklaşık $RC \ln 2$ süre sonra sıfırdan geçer.

Dolayısıyla istenen oran

$$\boxed{\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{Q_m/C}{4RQ_m/T_b} = \frac{T_b}{4RC}.$$

olarak bulunur.

6) Gerilimin sayısal değeri

Tamamen açık durumdaki alan

$$A_m = \frac{\pi}{2} (0.07^2 - 0.01^2) = 7.54 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

olur. Dolayısıyla

$$Q_m = \varepsilon_0 E_0 A_m = (8.85 \times 10^{-12})(150)(7.54 \times 10^{-3}) \simeq 1.00 \times 10^{-11} \text{ C}.$$

İlgili süreler

$$T = \frac{1}{50} = 0.020 \text{ s},$$

$$RC = (20 \times 10^6)(0.01 \times 10^{-6}) = 0.20 \text{ s}.$$

şeklindedir. Özellikle, ilk tepeye kadar geçen süre yalnızca

$$\frac{T}{4} = 0.0050 \text{ s} = 0.025 RC.$$

kadardır. Sonuç olarak, hızlı dönme yaklaşımı

$$\boxed{V_{\max} \simeq \frac{Q_m}{C} = \frac{1.00 \times 10^{-11}}{1.00 \times 10^{-8}} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ V}.$$

değerini verir. Sonlu direnç düzeltmesi, ilk çeyrek turun çözümünden elde edilir:

$$V_{\max} = \frac{4RQ_m}{T} \left(1 - e^{-T/(4RC)}\right) = \frac{Q_m}{C} \frac{1 - e^{-0.025}}{0.025} \simeq 0.989 \text{ mV}.$$

Bu değere $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$ anında ulaşılır; ikinci pozitif tepe daha küçüktür.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Saydam Bir Prizma Üzerindeki Lazer Kuvvetleri

Genel Bilgiler Tablosu

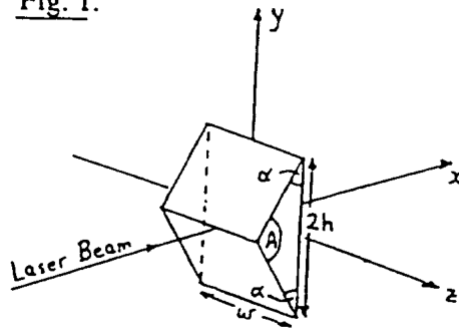
Nicelik	Sembol	Değer
Dünya'nın ortalama yarıçapı	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$
yerçekimi ivmesi	g	9.8 m s^{-2}
Newton'un evrensel kütleçekim sabiti	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
boşluğun elektriksel geçirgenliği	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
boşluğun manyetik geçirgenliği	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [sic; doğru değer $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$]
ışığın boşluktaki (veya havadaki) hızı	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
temel yük	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
elektronun kütlesi	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
protonun kütlesi	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Planck sabiti	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Avogadro sabiti	N_A	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann sabiti	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
molar gaz sabiti	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

SAYDAM BİR PRİZMA ÜZERİNDEKİ LAZER KUVVETLERİ

Güçlü bir lazer demeti, kırılma yoluyla küçük saydam cisimlere kayda değer kuvvetler uygulayabilir. Bunun nasıl gerçekleştiğini görmek için tepe açısı $A = \pi - 2\alpha$, taban uzunluğu $2h$ ve genişliği w olan küçük, cam bir üçgen prizmayı ele alalım. Prizmanın kırılma indisi n , kütle yoğunluğu ise ρ 'dur.

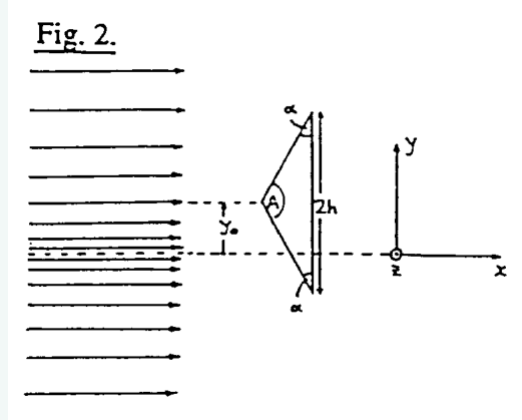
Bu prizmanın, yatay olarak x yönünde ilerleyen bir lazer demetinin içine yerleştirildiğini varsayalım. (Bu soru boyunca prizmanın dönmediğini, yani Şekil 1'de gösterildiği gibi tepesinin daima lazer demetinin yönünün tersine baktığını, üçgen yüzlerinin xy düzlemine paralel ve tabanının yz düzlemine paralel olduğunu varsayın.) Çevredeki havanın kırılma indisini $n_{\text{air}} = 1$ alın. Prizmanın yüzlerinin, yansıma oluşmayacak şekilde yansıma önleyici bir kaplamayla kaplandığını varsayın.

Fig. 1.



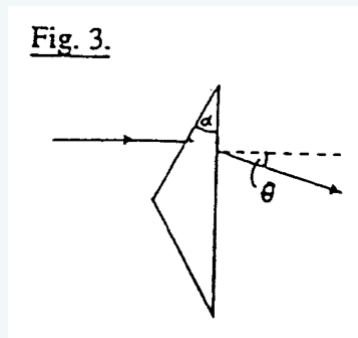
Şekil 1.

Lazer demetinin şiddeti, z yönündeki genişliği boyunca düzgün olmakla birlikte, x ekseninden olan y uzaklığıyla doğrusal olarak azalır; $y = 0$ 'da en büyük değeri I_0 'a ulaşır ve $y = \pm 4h$ 'de sıfıra düşer (Şekil 2). [Şiddet, birim alan başına güçtür; örneğin W m^{-2} birimiyle ifade edilir.]



Şekil 2.

1) Lazer ışığının prizmanın üst yüzüne geldiği durumda, θ açısının (bkz. Şekil 3) belirlenmesini sağlayan denklemleri (α ve n cinsinden) yazın.



Şekil 3.

2) Prizmanın tepesi x ekseninden y_0 kadar yer değiştirdiğinde, $|y_0| \leq 3h$ olmak üzere, lazer ışığının prizmaya uyguladığı net kuvvetin x ve y bileşenlerini I_0 , θ , h , w ve y_0 cinsinden ifade edin. Kuvvetin yatay ve düşey bileşenlerinin değerlerini, düşey yer değiştirme y_0 'ın fonksiyonu olarak gösteren grafikleri çiziniz.

3) Lazer demetinin z yönünde 1 mm genişliğinde ve (y yönünde) $80 \mu\text{m}$ kalınlığında olduğunu varsayalım. Prizmanın özellikleri $\alpha = 30^\circ$, $h = 10 \mu\text{m}$, $n = 1.5$, $w = 1 \text{ mm}$ ve $\rho = 2.5 \text{ g cm}^{-3}$ 'tür.

Prizmanın tepesi lazer demetinin ekseninin $y_0 = -h/2$ ($= -5 \mu\text{m}$) kadar altında olduğunda, bu prizmayı ($-y$ yönündeki) yerçekimi kuvvetine karşı dengelemek için kaç watt lazer gücü gerekir?

4) Bu deneyin yerçekimi yokken, aynı prizma ve (3)'tekiyle aynı boyutlarda, ancak $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$ olan bir lazer demetiyle yapıldığını varsayalım.

Prizma, lazer demetinin merkez çizgisinden $y = h/20$ kadar uzaklaştırılıp serbest bırakıldığında oluşan salınımların periyodu ne olur?

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. β üst yüzdeki kırılma açısı ve γ tabandaki gelme açısı ise,

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad \gamma = \alpha - \beta, \quad \sin \theta = n \sin \gamma.$$

Eşdeğer olarak,

$$\theta = \arcsin \left[\sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \right].$$

2. Şu tanımları yapalım:

$$u = \frac{y_0}{h}, \quad C_x = \frac{I_0 w h}{4c} (1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0 w h}{4c} \sin \theta.$$

O hâlde

$$F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases}$$

$$F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \operatorname{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}$$

Yatay kuvvet grafiği bir çift fonksiyon grafiğidir; merkezde parabolik bir maksimumu ve dış bölgelerde doğru parçaları vardır. Düşey kuvvet grafiği bir tek fonksiyon grafiğidir ve kuvvet geri çağırıcıdır; merkezde ikinci dereceden eğri parçaları, dış bölgelerde ise sabit parçalar bulunur.

3. Gerekli **toplam lazer gücü**

$$P \simeq 33 \text{ W.}$$

olur. Buna karşılık gelen tepe şiddeti $I_0 \simeq 8.3 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}$ 'dir.

4. Küçük salınım yaklaşımı

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho c h^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}} \simeq 1.12 \times 10^{-2} \text{ s.}$$

sonucunu verir. Belirtilen $h/20$ genliğinde zayıf doğrusal olmayan etki de hesaba katılırsa,

$$T \simeq 1.13 \times 10^{-2} \text{ s,}$$

yani yaklaşık 1.08% daha uzun bir periyot elde edilir.

Çözüm

Geometrik optiği kullanıyor, saydam prizmaya uygun olarak soğurmaya ihmal ediyor ve soruda belirtilen yansıma olmaması koşulunu uyguluyoruz. Kuvvetler, prizmanın hızının c' 'ye oranında en düşük mertebeden hesaplanmaktadır.

1) Kırılma ve çıkış açısı

Üst yüz, düşey tabanla α açısı yapar. Dolayısıyla bu yüzün içeriye yönelen normali, yatayın altında α açısıyla yönelir. Yatay gelen ışının gelme açısı α 'dır.

Bu normalden ölçülen kırılma açısı β olsun. Snell yasası

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

bağıntısını verir. Buna göre prizmanın içindeki ışın, yatayın altında

$$\gamma = \alpha - \beta$$

açısıyla ilerler.

Çıkış yüzünün normali yatay olduğundan, γ aynı zamanda bu yüzdeki gelme açısıdır. Snell yasasını yeniden uygularsak,

$$n \sin \gamma = \sin \theta.$$

Böylece

$$\theta = \arcsin \left[n \sin \left(\alpha - \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} \right) \right].$$

Sinüsü açarak eşdeğer bir ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= n(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\sin \theta = \sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right).$$

Şekil 3'te gösterilen, ışığın prizmadan geçerek izlediği yol için $n \sin \gamma \leq 1$ olması gerekir; sorudaki sayısal veriler bu koşulu sağlar. Simetri gereği, alt yüzden giren ışık yatayın üstünde θ açısıyla çıkar.

2) Kuvvet bileşenleri ve grafikler

Şiddet profili

$$I(y) = I_0 \left(1 - \frac{|y|}{4h} \right), \quad |y| \leq 4h.$$

şeklinde.

Üst ve alt yüzlerden giren güçler sırasıyla P_+ ve P_- olsun. Tepe y_0 'dayken, bu yüzlerin gelen demete dik izdüşümlerinin kapladığı aralıklar sırasıyla

$$[y_0, y_0 + h], \quad [y_0 - h, y_0].$$

olur. Bu nedenle

$$P_+ = w \int_{y_0}^{y_0+h} I(y) dy, \quad P_- = w \int_{y_0-h}^{y_0} I(y) dy.$$

Buradaki alan elemanı $w dy$, gelen ışığa dik izdüşüm alanıdır. Gelme açısına bağlı ek bir çarpan gerekmez.

Havada P gücündeki ışık, birim zamanda P/c kadar momentum taşır. Üst yüzden giren ışığın geliş ve çıkış yönleri

$$(1, 0), \quad (\cos \theta, -\sin \theta).$$

şeklindedir. Prizmaya etkiyen kuvvet, gelen momentum akısından çıkan momentum akısının çıkarılmasına eşittir:

$$\mathbf{F}_+ = \frac{P_+}{c}(1 - \cos \theta, \sin \theta).$$

Benzer şekilde,

$$\mathbf{F}_- = \frac{P_-}{c}(1 - \cos \theta, -\sin \theta).$$

Toplarsak,

$$\boxed{F_x = \frac{1 - \cos \theta}{c}(P_+ + P_-), \quad F_y = \frac{\sin \theta}{c}(P_+ - P_-).}$$

Güçleri hesaplamak için $u = y_0/h$ alalım. Boyutsuz şiddet profilinin bir ilkel fonksiyonu

$$J(v) = v - \frac{v|v|}{8}, \quad J'(v) = 1 - \frac{|v|}{4}.$$

şeklindedir. Buna göre,

$$\frac{P_+}{I_0wh} = J(u+1) - J(u), \quad \frac{P_-}{I_0wh} = J(u) - J(u-1).$$

$|u| \leq 1$ için prizma, demet ekseninin her iki tarafına uzanır. Bu ifadeler hesaplandığında

$$\begin{aligned} P_+ + P_- &= \frac{I_0wh}{4}(7 - u^2), \\ P_+ - P_- &= -\frac{I_0wh}{4}u(2 - |u|). \end{aligned}$$

elde edilir.

$1 \leq |u| \leq 3$ için prizmanın tamamı eksenin bir tarafında, şiddetin doğrusal olarak değiştiği bölgede bulunur:

$$\begin{aligned} P_+ + P_- &= \frac{I_0wh}{4}(8 - 2|u|), \\ P_+ - P_- &= -\frac{I_0wh}{4}\text{sgn}(u). \end{aligned}$$

Böylece,

$$C_x = \frac{I_0wh}{4c}(1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0wh}{4c}\sin \theta,$$

tanımlarıyla, istenen kuvvetler

$$\boxed{F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases} \quad F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \text{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}}$$

olarak bulunur.

Grafik değerleri şöyledir:

$u = y_0/h$	F_x/C_x	F_y/C_y
-3	2	1

$u = y_0/h$	F_x/C_x	F_y/C_y
-2	4	1
-1	6	1
-1/2	6.75	0.75
0	7	0
1/2	6.75	-0.75
1	6	-1
2	4	-1
3	2	-1

Yatay kuvvet grafiği için $u = -1$ ile $u = 1$ arasında, başlangıç noktasında maksimum değeri $7C_x$ olan, aşağı doğru açılan bir parabol çizin. $u = \pm 3$ 'te $2C_x$ değerine ulaşacak şekilde doğru parçalarıyla devam edin. Kuvvet, belirtilen aralığın tamamında pozitif kalır.

Düşey kuvvet grafiği için $u = -3$ 'ten -1 'e kadar $+C_y$ sabit değerini, ardından $u = 0$ 'da sıfıra düşen ikinci dereceden eğri parçasını çizin. Bu parçanın başlangıç noktasına göre simetriğini alarak $u = 1$ 'de $-C_y$ 'ye ulaşın, ardından $u = 3$ 'e kadar yatay olarak devam edin. Başlangıç noktasındaki eğimi $-2C_y/h$ 'dir. Her iki kuvvet grafiğinin parçaları da $u = \pm 1$ 'de eğimleri sürekli olacak şekilde birleşir.

Düşey kuvvet geri çağırıcıdır: eksenin altındaki bir prizmanın üst yüzüne daha fazla ışık gelir ve prizma yukarı itilir; eksenin üstündeyken ise aşağı itilir.

3) Yerçekimini dengelemek için gereken lazer gücü

Tepeden tabana olan uzaklık

$$d = h \tan \alpha.$$

olur. Dolayısıyla hacim ve kütle

$$V = \frac{1}{2}(2h)d w = h^2 w \tan \alpha, \quad m = \rho h^2 w \tan \alpha.$$

şeklindedir. SI birimlerini kullanırsak,

$$h = 10^{-5} \text{ m}, \quad w = 10^{-3} \text{ m}, \quad \rho = 2.5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

böylece

$$m = 1.4434 \times 10^{-10} \text{ kg}, \quad mg = 1.4145 \times 10^{-9} \text{ N}.$$

$\alpha = 30^\circ$ ve $n = 1.5$ için,

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\sin 30^\circ}{1.5} \right) = 19.471^\circ,$$

$$\gamma = 10.529^\circ, \quad \theta = 15.908^\circ, \quad \sin \theta = 0.274094.$$

$y_0 = -h/2$ 'de $u = -1/2$ olur ve

$$F_y = \frac{3}{4} C_y = \frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c}.$$

elde edilir. Düşey denge için

$$\frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c} = \rho h^2 w \tan \alpha g.$$

olmalıdır. Dolayısıyla

$$I_0 = \frac{16\rho g h c \tan \alpha}{3 \sin \theta} = 8.2571 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}.$$

İstenen güç, **demetin tamamının** gücüdür. Demetin $80 \mu\text{m}$ kalınlığı $8h$ 'ye eşittir ve üçgen biçimli şiddet profilinin altında kalan alan $4hI_0$ 'dır. Böylece

$$P = w \int_{-4h}^{4h} I(y) dy = 4hwI_0.$$

Değerler yerine konduğunda

$$P = 4(10^{-5})(10^{-3})(8.2571 \times 10^8) = 33.03 \text{ W}.$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\boxed{P \simeq 33 \text{ W}.}$$

Bu, istendiği gibi y yönünde yerçekimini dengeler. Yatay optik kuvvet pozitif kalır.

4) Yerçekimi yokken salınım periyodu

Belirtilen salınım boyunca $|y_0| \leq h/20 < h$ olur. Merkez bölgedeki kuvvet ifadesi

$$F_y = -\frac{I_0 w \sin \theta}{2c} y_0 \left(1 - \frac{|y_0|}{2h}\right).$$

şeklinde yazılabilir. Şu tanımı yapalım:

$$K = \frac{I_0 w \sin \theta}{2c}.$$

$a = h/20$ genliğinde, doğrusal olmayan çarpanın birden farkı en fazla

$$\frac{a}{2h} = \frac{1}{40} = 2.5\%.$$

olur. Bu nedenle en düşük mertebedeki yaklaşım basit harmonik harekettir:

$$m\ddot{y}_0 = -Ky_0, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}.$$

Yukarıda bulunan kütleyi kullanarak,

$$\omega_0^2 = \frac{I_0 \sin \theta}{2\rho ch^2 \tan \alpha},$$

ve

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho ch^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}}}.$$

elde ederiz.

$I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$ için,

$$K = 4.5682 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-1}, \quad \omega_0 = 562.58 \text{ s}^{-1},$$

böylece

$$\boxed{T_0 = 0.0111685 \text{ s} \approx 11.2 \text{ ms}.}$$

Sonlu genlik düzeltmesi de tam kuvvet ifadesinden hesaplanabilir. Potansiyel enerjiyi başlangıç noktasında sıfır alırsak,

$$U(y_0) = \frac{K}{2}y_0^2 - \frac{K}{6h}|y_0|^3.$$

Prizmanın $y_0 = a$ 'da durgun hâlden serbest bırakılmasıyla

$$\frac{1}{2}m\dot{y}_0^2 = U(a) - U(y_0).$$

elde edilir. Simetri gereği periyot, 0'dan a 'ya gitme süresinin dört katıdır:

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{K}} \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2 - (a^3 - y^3)/(3h)}}.$$

$s = y/a$ alırsak,

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2 - \frac{a}{3h}(1 - s^3)}}.$$

$a/h = 1/20$ için sayısal hesaplama

$$\frac{T}{T_0} = 1.01079,$$

ve dolayısıyla

$$T = 0.0112890 \text{ s} \approx 11.3 \text{ ms}.$$

sonucunu verir. Buna göre periyot yaklaşık 0.011 s'dir; küçük salınım yaklaşımı, belirtilen genlikte yaklaşık 1.1% doğruluktadır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Elektron Demeti

Genel Bilgi Tablosu

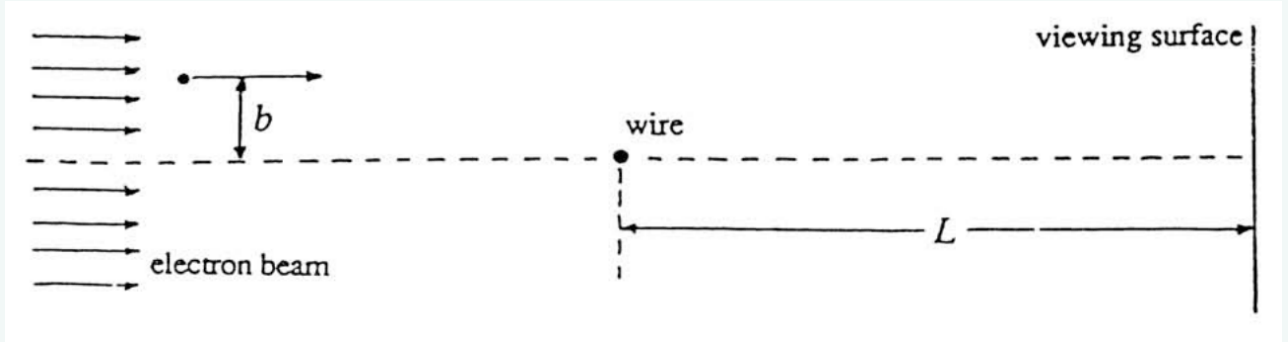
Büyüklik	Sembol	Değer
Dünya'nın ortalama yarıçapı	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}.$
yerçekimi ivmesi	g	$9.8 \text{ m s}^{-2}.$
Newton kütleçekim sabiti	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}.$
boşluğun elektriksel geçirgenliği	ε_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}.$
boşluğun manyetik geçirgenliği	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [sic; doğru değer $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$].
ışığın boşluktaki (veya havadaki) hızı	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$
temel yük	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}.$
elektronun kütlesi	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}.$
protonun kütlesi	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Büyüklik	Sembol	Değer
Planck sabiti	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s.}$
Avogadro sabiti	N_A	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$
Boltzmann sabiti	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}.$
molar gaz sabiti	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$

Teorik Soru 3

ELEKTRON DEMETİ

Bir V_0 hızlandırma gerilimi, enerjik elektronlardan oluşan düzgün, paralel bir demet üretir. Elektronlar, şekilde gösterildiği gibi demetin başlangıç doğrultusuna dik olarak gerilmiş, ince, uzun ve pozitif yüklü bir bakır telin yanından geçer. b sembolü, tel yüksüz olsaydı bir elektronun tele hangi uzaklıktan geçeceğini belirtir. Elektronlar daha sonra, şekilde gösterildiği gibi telin L ($\gg b$) kadar ötesindeki bir ekrana (gözlem yüzeyine) ilerler. Demet başlangıçta telin eksenine göre $\pm b_{\max}$ uzaklıklarına kadar uzanır. Kâğıda dik doğrultuda hem demetin genişliği hem de telin uzunluğu sonsuz kabul edilebilir.



Yüklü tel, kâğıt düzlemine dik olarak uzanır. Çizim ölçekli değildir.

Bazı sayısal veriler burada verilmiştir; diğer sayısal verileri sınavın başındaki tabloda bulabilirsiniz:

telin yarıçapı	$= r_0 =$	10^{-6} m
b 'nin en büyük değeri	$= b_{\max} =$	10^{-4} m
telin birim uzunluğu başına elektrik yükü	$= q_{\text{linear}} =$	$4.4 \times 10^{-11} \text{ C m}^{-1}$
hızlandırma gerilimi	$= V_0 =$	$2 \times 10^4 \text{ V}$
tel ile gözlem ekranı arasındaki uzaklık	$= L =$	0.3 m.

Not: 2 - 4. kısımlar için analitik ve sayısal çözümler elde etmeyi sağlayan makul yaklaşımlar yapınız.

- 1) Telin oluşturduğu $\mathbf{E}$ elektrik alanını hesaplayınız. $\mathbf{E}$ 'nin büyüklüğünü telin ekseninden uzaklığın fonksiyonu olarak çiziniz.
- 2) Bir elektronun açısal sapmasını klasik fiziği kullanarak hesaplayınız. Bunu, b parametresinin elektronun tele çarpmadığı değerleri için yapınız. θ_{final} , elektronun başlangıç hızı ile gözlem yüzeyine ulaştığındaki hızı arasındaki (küçük) açıyı gösterebilir. Buradan θ_{final} 'i hesaplayınız.
- 3) Klasik fiziğin gözlem ekranı üzerinde öngördüğü çarpma desenini (yani şiddet dağılımını) hesaplayınız ve çiziniz.

4) Kuantum fiziği, şiddet dağılımında (klasik fiziğin öngördüğüne göre) önemli bir fark öngörür. Kuantum fiziğinin öngördüğü deseni çizin ve nicel ayrıntıları veriniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

y , telin tam karşısında $y = 0$ olacak şekilde ekran üzerindeki işaretli enine koordinat, I_0 ise gelen demetin şiddeti olsun.

1. Alan, radyal olarak dışa yönelmiştir:

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0, \\ \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}, & r > r_0. \end{cases}$$

Büyüklüğü yüzeyde sıfırdan $7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$ değerine sıçrar, ardından $1/r$ ile azalır.

2. Her iki taraftan geçen elektronlar, yaklaşık olarak aynı açıyla eksene doğru sapar:

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0} = 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

3. Telin sonlu yarıçapı hesaba katıldığında klasik desen şöyledir:

$$I_{\text{cl}}(y) \simeq \begin{cases} 2I_0, & |y| < 17.6 \mu\text{m}, \\ I_0, & 17.6 \mu\text{m} < |y| < 81.4 \mu\text{m}, \\ 0, & |y| > 81.4 \mu\text{m}. \end{cases}$$

Dolayısıyla merkezdeki iki kat şiddetli bandın genişliği yaklaşık $35 \mu\text{m}$, aydınlanan bölgenin tamamının genişliği ise yaklaşık $163 \mu\text{m}$ 'dir.

4. Eşvireli elektronlar için merkezdeki örtüşme bölgesinde girişim saçakları oluşur:

$$\lambda_{\text{dB}} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}, \quad d \simeq \frac{\lambda_{\text{dB}}}{2\theta_{\text{final}}} = 7.0 \times 10^{-8} \text{ m} = 70 \text{ nm.}$$

Zarfın kenarlarından uzakta, örtüşme bölgesinde

$$I_{\text{q}}(y) \simeq 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right)$$

olur. Merkez aydınlıktır; ardışık maksimumlar $4I_0$ 'a, minimumlar ise sıfıra ulaşır. Örtüşme bölgesi boyunca yaklaşık 5.1×10^2 saçak periyodu vardır. Yan bölgelerin şiddeti yaklaşık I_0 olarak kalır.

Çözüm

1) Elektrik alan

Bakır bir iletkenidir; dolayısıyla telin içinde elektrostatik alan sıfırdır. Sonsuz kabul edilebilecek bir telin dışında silindirik simetri, yalnızca eksene olan r uzaklığına bağlı radyal bir alan gerektirir.

Gauss yasasını, yarıçapı $r > r_0$ ve uzunluğu ℓ olan eş eksenli bir silindirik yüzeye uygulayalım:

$$E(r)(2\pi r\ell) = \frac{q_{\text{linear}}\ell}{\epsilon_0}.$$

Böylece,

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}.$$

Tel pozitif yüklü olduğundan alan dışa yönelmiştir.

Sayısal olarak,

$$\frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{2\pi(8.85 \times 10^{-12})} = 0.791 \text{ V},$$

dolayısıyla

$$E(r_0^+) = \frac{0.791}{10^{-6}} \simeq 7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}.$$

İstenen grafik, $0 \leq r < r_0$ için yatay eksen üzerinde yer alır, $r = r_0$ 'da yukarı sıçrar ve sonrasında azalan bir $1/r$ eğrisini izleyerek sıfıra asimptotik olarak yaklaşır. Örneğin,

$$E(10r_0) = 7.9 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad E(100r_0) = 7.9 \times 10^3 \text{ V m}^{-1}.$$

2) Açısal sapma

x eksenini gelen demet doğrultusunda, y eksenini ise şekil düzleminde ona dik alalım. Tel, $x = y = 0$ noktasından geçer.

Görelili olmayan enerji bağıntısını kullanalım:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV_0, \quad v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_e}} \simeq 8.4 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

Burada $eV_0/(m_e c^2) \simeq 0.039$ olduğundan, görelili olmayan yaklaşım bu soru için makul bir yaklaşımdır.

Küçük enine itmeyi, v 'yi sabit alarak sapmamış $y = b$ yolu boyunca hesaplayalım. Bu, telin düşük potansiyeliyle tutarlıdır: r_0 ile L arasındaki potansiyel farkı yalnızca

$$\Phi(r_0) - \Phi(L) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{L}{r_0}\right) \simeq 10 \text{ V},$$

olup $V_0 = 2 \times 10^4 \text{ V}$ 'tan çok küçüktür.

Telin üstünden geçen bir elektron için $b > 0$ olup enine kuvvet

$$F_y = -eE_y = -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} \frac{b}{x^2 + b^2}.$$

şeklindedir. $dt = dx/v$ olduğundan, elektron $x = L$ 'ye ulaşana kadar enine momentumundaki değişim yaklaşık olarak

$$\begin{aligned} \Delta p_y &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^L F_y dx \\ &= -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 v} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{L}{b}\right) \right]. \end{aligned}$$

olur. Geliş tarafındaki integral sınırı, başlangıç demetinin tele uzaklığı b 'ye göre yeterince büyük bir yerde tanımlandığını varsayar.

Küçük bir sapma için,

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{|\Delta p_y|}{m_e v}.$$

$m_e v^2 = 2eV_0$ kullanılarak,

$$\theta_{\text{final}}(b) \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\pi\epsilon_0 V_0} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{L}{b} \right) \right].$$

$L \gg b$ olduğundan köşeli parantez içindeki ifade yaklaşık π 'dir ve

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0}.$$

elde edilir.

Dolayısıyla bu duyarlılıkta sapma, çarpma parametresinden bağımsızdır:

$$\theta_{\text{final}} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{4(8.85 \times 10^{-12})(2 \times 10^4)} \simeq 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

$b = b_{\text{max}}$ için bile, ekran uzaklığının sonlu olmasından kaynaklanan köşeli parantez içindeki düzeltmenin bağıl büyüklüğü yalnızca yaklaşık 10^{-4} 'tür.

Demetin üst yarısı aşağıya, alt yarısı ise yukarıya sapar. Aynı yaklaşım çerçevesinde, telin yanından geçebilen elektronlar için $b > r_0$ 'dır. Çekimin çarpışma sınırında neden olduğu küçük değişim ihmal edilir.

3) Klasik şiddet dağılımı

Şöyle yazalım:

$$\alpha = \theta_{\text{final}}, \quad a = L\alpha \simeq 18.6 \mu\text{m}.$$

$L \gg b_{\text{max}}$ olduğundan sapmanın telin yakınında gerçekleştiği kabul edilebilir. Bu nedenle eksenin b kadar üstünden gelen bir elektron

$$y = b - a,$$

koordinatına ulaşırken, aynı uzaklıkta alttan gelen bir elektron

$$y = -b + a.$$

koordinatına ulaşır.

Yalnızca $r_0 < b < b_{\text{max}}$ aralığındaki elektronlar geçer. Dolayısıyla geçen iki kısım, ekranda aşağıdaki aralıkları kaplar:

$$\text{üstten gelen kısım: } r_0 - a < y < b_{\text{max}} - a,$$

$$\text{alttan gelen kısım: } -b_{\text{max}} + a < y < a - r_0.$$

Sayısal olarak bu aralıklar sırasıyla

$$-17.6 < y < 81.4 \mu\text{m}$$

ve

$$-81.4 < y < 17.6 \mu\text{m},$$

şeklindedir.

Her bir kısım için dönüşüm $|dy/db| = 1$ koşulunu sağlar. Bu nedenle elektron akısının korunumu, yalnızca bir kısmın ulaştığı her yerde I_0 , her iki kısmın ulaştığı her yerde ise $2I_0$ şiddetini verir.

Şu tanımları yapalım:

$$w = a - r_0 \simeq 17.6 \mu\text{m}, \quad Y = b_{\text{max}} - a \simeq 81.4 \mu\text{m}.$$

Böylece

$$I_{\text{cl}}(y) = \begin{cases} 2I_0, & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

Çizim $y = 0$ 'a göre simetriktir. Soldan başlanırsa şiddet, $-81.4 \mu\text{m}$ 'de sıfırdan I_0 'a sıçrar, $-17.6 \mu\text{m}$ 'de $2I_0$ 'a yükselir, $+17.6 \mu\text{m}$ 'de I_0 'a düşer ve $+81.4 \mu\text{m}$ 'de yeniden sıfır olur. Bantlar, tele paralel doğrultuda düzgün biçimde uzanır.

Genişlikleri şöyledir:

$$\begin{aligned} \text{merkezdeki örtüşme genişliği} &= 2(a - r_0) \simeq 35.3 \mu\text{m}, \\ \text{her bir yan bölgenin genişliği} &= b_{\text{max}} - 2a + r_0 \simeq 63.7 \mu\text{m}. \end{aligned}$$

Merkezde geometrik gölge yoktur: sapan iki kısım birbiriyle örtüşür.

Akıyı kontrol etmek için,

$$\int I_{\text{cl}}(y) dy = 2I_0(b_{\text{max}} - r_0),$$

yazılır; bu, bu yaklaşımda telin durdurduğu elektronlar dışarıda bırakıldığında gelen akıya tam olarak eşittir.

4) Kuantum şiddet dağılımı

İdeal, tek enerjili ve eşevreli bir gelen demet için telin karşılıklı iki yanından geçen kısımlar, örtüştikleri yerde girişim yapar.

Elektronun de Broglie dalga boyu

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV_0}},$$

olduğundan,

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31})(1.60 \times 10^{-19})(2 \times 10^4)}} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

Örtüşme bölgesinde yaklaşık olarak düzlemsel olan iki dalga, başlangıç doğrultusuyla $+\alpha$ ve $-\alpha$ açıları yaparak ilerler. Bu nedenle dalga vektörlerinin enine bileşenleri $+k \sin \alpha$ ve $-k \sin \alpha$ 'dır; burada

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{dB}}}.$$

Yansıma simetrisi, $y = 0$ 'da fazlarının eşit olmasını sağlar. Ekranın y koordinatındaki faz farkları

$$\Delta\phi(y) = 2ky \sin \alpha.$$

şeklinde. Her dalga ayrı ayrı I_0 şiddeti katkısında bulunduğundan,

$$I_q(y) = I_0 + I_0 + 2I_0 \cos \Delta\phi \\ = 4I_0 \cos^2(ky \sin \alpha).$$

Böylece saçak aralığı

$$d = \frac{\lambda_{dB}}{2 \sin \alpha} \simeq \frac{\lambda_{dB}}{2\alpha},$$

olup buradan

$$d \simeq 6.99 \times 10^{-8} \text{ m} \simeq 70 \text{ nm.}$$

elde edilir.

Geometrik zarf yaklaşımının duyarlılığı içinde,

$$I_q(y) \simeq \begin{cases} 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right), & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

İstenen çizimin geniş ölçekli zarfı klasik deseninkiyle aynıdır; ancak merkezdeki plato yerini birbirine yakın saçaklara bırakır:

- Aydınlik saçaklar $y = nd$ konumlarında oluşur ve şiddetleri $4I_0$ 'dır; n bir tam sayıdır.
- Karanlık saçaklar $y = (n + \frac{1}{2})d$ konumlarında oluşur ve şiddetleri sıfırdır.
- $y = 0$ 'daki merkez saçığı aydınlıktır.
- Saçaklar doğrusaldır ve tele paraleldir.
- Ortalama şiddetleri $2I_0$ olup merkezdeki klasik şiddete eşittir.

Örtüşme bölgesi boyunca yaklaşık saçak periyodu sayısı

$$N \simeq \frac{2w}{d} = \frac{35.3 \times 10^{-6}}{6.99 \times 10^{-8}} \simeq 5.1 \times 10^2.$$

şeklindedir.

Kırınım, zarf sınırlarını yumuşatır; dolayısıyla parçalı ifade bu kenarlardan uzak bölgeler için geçerlidir. İlgili enine kırınım ölçeği

$$\sqrt{\lambda_{dB} L} \simeq 1.6 \mu\text{m}.$$

mertebedindedir. 70 nm aralıklı saçakları ayırt edemeyen bir dedektör, bunların ortalamasını ölçer ve yaklaşık olarak klasik dağılımı elde eder.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.