

IPhO 1993

Теоретические задачи и решения · Уильямсберг, Виргиния, США · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1993/

Задача 1: Атмосферное электричество

Общие справочные данные

Величина	Обозначение	Значение
Средний радиус Земли	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$.
ускорение свободного падения	g	9.8 m s^{-2} .
гравитационная постоянная Ньютона	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.
электрическая постоянная	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$.
магнитная постоянная	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [так в оригинале; правильное значение $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$].
скорость света в вакууме (или воздухе)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
элементарный заряд	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$.
масса электрона	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.
масса протона	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
постоянная Планка	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$.
постоянная Авогадро	N_A	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
постоянная Больцмана	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.
универсальная газовая постоянная	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Теоретическая задача 1

АТМОСФЕРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

С точки зрения электростатики поверхность Земли можно считать хорошим проводником. Она несёт некоторый суммарный заряд Q_0 со средней поверхностной плотностью заряда σ_0 .

1) В условиях хорошей погоды у поверхности Земли существует направленное вниз электрическое поле E_0 , напряжённость которого составляет около 150 V/m . Определите модуль поверхностной плотности заряда Земли и модуль суммарного заряда на её поверхности.

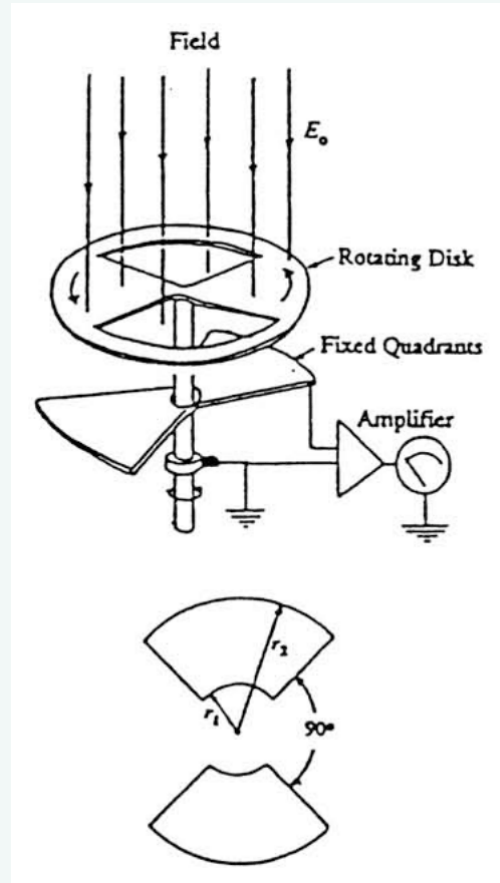
2) Модуль напряжённости направленного вниз электрического поля уменьшается с высотой и на высоте 100 m составляет около 100 V/m. Вычислите средний нескомпенсированный заряд на m^3 атмосферы между поверхностью Земли и высотой 100 m.

3) Найденная вами в (2) плотность нескомпенсированного заряда в действительности обусловлена наличием почти одинакового числа положительных и отрицательных однозарядных ионов в единице объёма (n_+ и n_-). Вблизи поверхности Земли в условиях хорошей погоды $n_+ \approx n_- \approx 6 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$. Эти ионы движутся под действием вертикального электрического поля. Их скорость пропорциональна напряжённости поля:

$$v \approx 1.5 \times 10^{-4} \cdot E,$$

где v выражена в m/s , а E — в V/m . За какое время движение атмосферных ионов нейтрализовало бы половину заряда на поверхности Земли, если бы не происходило никаких других процессов (например, разрядов молнии), поддерживающих этот заряд?

4) Один из способов измерения атмосферного электрического поля, а следовательно, и σ_0 , основан на использовании системы, изображённой на рисунке. Два металлических квадранта, изолированных от земли, но соединённых друг с другом, расположены непосредственно под заземлённым равномерно вращающимся диском, в котором вырезаны два отверстия в форме квадрантов. (На рисунке расстояние между ними увеличено, чтобы показать устройство системы.) Дважды за каждый оборот изолированные квадранты полностью открываются действию поля, а затем (через $1/4$ периода) полностью экранируются от него. Пусть T — период вращения, а r_1 и r_2 — внутренний и внешний радиусы изолированных квадрантов, как показано на рисунке.



Примите за $t = 0$ момент, когда изолированные квадранты полностью экранированы.

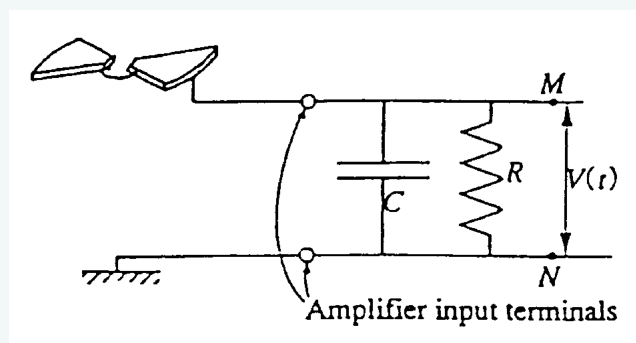
Получите выражения для суммарного заряда $q(t)$, индуцированного на верхней поверхности изолированных квадрантов, как функции времени в промежутке от $t = 0$ до $t = T/2$, и схематически изобразите график этой зависимости.

[В данной ситуации влиянием тока атмосферных ионов можно пренебречь.]

(5) Система, описанная в (4), подключена к усилителю, входная цепь которого эквивалентна параллельно соединённым конденсатору C и резистору R . (Можно считать, что ёмкость системы квадрантов пренебрежимо мала по сравнению с C .) Схематически изобразите графики зависимости разности потенциалов V между точками M и N от t в течение одного оборота диска сразу после начала его вращения с периодом T , если:

а) $T = T_a \ll CR$;

б) $T = T_b \gg CR$.



[Считайте, что C и R имеют фиксированные значения; в ситуациях (а) и (б) различается только T .]

Получите выражение для приближённого отношения V_a/V_b наибольших значений $V(t)$ в случаях (а) и (б).

6) Пусть $E_0 = 150 \text{ V/m}$, $r_1 = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 7 \text{ cm}$, $C = 0.01 \mu\text{F}$, $R = 20 \text{ M}\Omega$, и предположим, что диск приводят во вращение с частотой 50 оборотов в секунду.

Чему приблизительно равно наибольшее значение V в течение одного оборота в этом случае?

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Примем $V = V_M - V_N$. Для пунктов 4–6 обозначим полностью открытую площадь и модуль индуцированного на ней заряда следующим образом:

$$A_m = \frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2), \quad Q_m = \epsilon_0 E_0 A_m > 0.$$

1. Заряд поверхности Земли отрицателен:

$$\sigma_0 \simeq -1.3 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}, \quad Q_0 \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

Искомые модули равны абсолютным значениям этих величин.

2. Средняя объёмная плотность заряда атмосферы равна

$$\bar{\rho} \simeq +4.4 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

3. Учитывая только положительные ионы, достигающие поверхности, и считая их концентрацию приблизительно постоянной, получаем

$$t_{1/2} = \frac{\varepsilon_0 \ln 2}{en_+(1.5 \times 10^{-4})} \simeq 4.3 \times 10^2 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

4. Индуцированный заряд верхней поверхности равен

$$q(t) = \begin{cases} -Q_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -Q_m \left(2 - \frac{4t}{T}\right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Его график соединяет точки $(0, 0)$, $(T/4, -Q_m)$ и $(T/2, 0)$ отрезками прямых и повторяется с периодом $T/2$.

5. Для первого оборота при начальном условии $V(0) = 0$: - **(a)** $V \simeq -q/C$: два положительных треугольных импульса, каждый высотой

$$V_a \simeq \frac{Q_m}{C}.$$

- **(b)** V попеременно принимает значения, приблизительно равные $+V_b$ и $-V_b$, с экспоненциальными переходами с постоянной времени RC , где

$$V_b \simeq \frac{4RQ_m}{T_b}.$$

Таким образом,

$$\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{T_b}{4RC}.$$

6. Наибольшее напряжение в течение первого оборота равно

$$V_{\max} \simeq 1.0 \times 10^{-3} \text{ V} = 1.0 \text{ mV}.$$

Учёт конечного сопротивления даёт 0.989 mV ; это значение достигается при $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$.

Решение

1) Заряд поверхности Земли

Электрическое поле внутри проводника в состоянии электростатического равновесия равно нулю. Применяя теорему Гаусса к малому цилиндру, пересекающему его поверхность, получаем

$$E_{\perp, \text{outside}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0},$$

где нормаль направлена наружу из проводника. Поскольку поле направлено вниз, внутрь Земли,

$$\sigma_0 = -\varepsilon_0 E_0.$$

Следовательно,

$$\sigma_0 = -(8.85 \times 10^{-12})(150) = -1.3275 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}.$$

Считая Землю сферой и используя это значение в качестве средней поверхностной плотности её заряда, получаем

$$Q_0 = 4\pi R_E^2 \sigma_0 = -4\pi(6.4 \times 10^6)^2(1.3275 \times 10^{-9}) \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

Таким образом, модуль поверхностной плотности заряда составляет приблизительно 1.3 nC m^{-2} , а модуль суммарного заряда — приблизительно $6.8 \times 10^5 \text{ C}$.

2) Объёмный заряд атмосферы

Направим ось z вверх. Вертикальные проекции напряжённости поля на двух высотах с учётом знака равны

$$E_z(0) = -150 \text{ V/m}, \quad E_z(100 \text{ m}) = -100 \text{ V/m}.$$

На высоте 100 m кривизной Земли можно пренебречь, поскольку $100/R_E \ll 1$. Поэтому теорема Гаусса для вертикального столба с площадью горизонтального поперечного сечения A даёт

$$\bar{\rho}Ah = \varepsilon_0 A [E_z(h) - E_z(0)].$$

Следовательно,

$$\bar{\rho} = \varepsilon_0 \frac{-100 - (-150)}{100} = (8.85 \times 10^{-12})(0.50) = 4.425 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

Заряд **положителен**, что согласуется с ослаблением направленного вниз поля при увеличении высоты.

3) Время нейтрализации половины поверхностного заряда

Земля заряжена отрицательно. Положительные ионы дрейфуют вниз и могут достичь её поверхности; отрицательные ионы дрейфуют вверх. Таким образом, ток, нейтрализующий заряд поверхности, обусловлен **только положительными ионами**.

Запишем подвижность ионов в виде

$$\mu = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad v = \mu E.$$

Считая, что при этой оценке дрейфа заданная концентрация n_+ вблизи поверхности остаётся приблизительно постоянной, получаем положительный заряд, поступающий на единицу площади за единицу времени:

$$j_+ = en_+v = en_+\mu E.$$

Обозначим через $S(t) = |\sigma(t)|$ модуль плотности оставшегося отрицательного поверхностного заряда. Граничное условие на поверхности проводника даёт

$$E(t) = \frac{S(t)}{\varepsilon_0}.$$

Поскольку каждый приходящий положительный ион уменьшает S ,

$$\frac{dS}{dt} = -j_+ = -\frac{en_+\mu}{\varepsilon_0} S.$$

Поэтому разряд происходит по экспоненциальному закону:

$$S(t) = S(0)e^{-t/\tau_+}, \quad \tau_+ = \frac{\varepsilon_0}{en_+\mu}.$$

Численно

$$en_+\mu = (1.60 \times 10^{-19})(6 \times 10^8)(1.5 \times 10^{-4}) = 1.44 \times 10^{-14} \text{ S m}^{-1},$$

и

$$\tau_+ = \frac{8.85 \times 10^{-12}}{1.44 \times 10^{-14}} \simeq 615 \text{ s}.$$

Полагая $S(t_{1/2}) = S(0)/2$, получаем

$$t_{1/2} = \tau_+ \ln 2 \simeq 426 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

Добавление проводимости, обусловленной движущимися вверх отрицательными ионами, означало бы ошибочный учёт тока, который не поступает на поверхность Земли.

4) Индуцированный заряд на квадрантах

Пренебрежём краевыми эффектами и будем считать экранирование полным везде, где заземлённый диск закрывает квадранты. На открытой верхней поверхности направленному вниз полю соответствует поверхностная плотность заряда

$$\sigma_{\text{upper}} = -\varepsilon_0 E_0.$$

Суммарная площадь двух кольцевых квадрантов равна

$$A_m = 2 \left[\frac{\pi}{4}(r_2^2 - r_1^2) \right] = \frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2).$$

Угловая скорость диска равна

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

В течение первой четверти оборота каждое отверстие открывает участок с угловой шириной $\theta = \omega t$. Поэтому суммарная открытая площадь равна

$$A(t) = 2 \left[\frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\theta \right] = \frac{2\pi(r_2^2 - r_1^2)}{T}t, \quad 0 \leq t \leq T/4.$$

Она достигает A_m в момент $T/4$, затем с той же скоростью уменьшается до нуля к моменту $T/2$. Таким образом,

$$A(t) = \begin{cases} A_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ A_m \left(2 - \frac{4t}{T} \right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Поскольку $q(t) = -\varepsilon_0 E_0 A(t)$,

$$q(t) = \begin{cases} -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0(r_2^2 - r_1^2)}{T}t, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0(r_2^2 - r_1^2)}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

График представляет собой направленный вниз треугольный импульс: заряд начинается с нуля, линейно уменьшается до $-Q_m$ в момент $T/4$, затем линейно увеличивается до нуля в момент $T/2$. На каждый оборот приходится два одинаковых импульса.

Здесь q — заряд **верхней поверхности**. Изолированная система квадрантов может приобрести этот поверхностный заряд за счёт перераспределения уже имеющегося в ней заряда.

5) Напряжение на входе усилителя

Примем $V = V_M - V_N$, причём точка N заземлена. До начала вращения квадранты экранированы, а конденсатор разряжен через резистор, поэтому

$$q(0) = 0, \quad V(0) = 0.$$

Пренебрегая ёмкостью системы квадрантов по сравнению с C , получаем, что заряд соединённого с ней входного проводника равен $q + CV$. Положительный заряд уходит с этого проводника через резистор со скоростью V/R , поэтому закон сохранения заряда даёт

$$\frac{d}{dt}(q + CV) = -\frac{V}{R},$$

или

$$\boxed{C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = -\frac{dq}{dt}}.$$

По мере открытия квадрантов их верхние поверхности приобретают отрицательный заряд. При этом на верхней обкладке конденсатора остаётся положительный заряд, поэтому вначале напряжение растёт, принимая положительные значения.

Из пункта 4

$$-\frac{dq}{dt} = \begin{cases} +I_0, & 0 < t < T/4, \\ -I_0, & T/4 < t < T/2, \\ +I_0, & T/2 < t < 3T/4, \\ -I_0, & 3T/4 < t < T, \end{cases} \quad I_0 = \frac{4Q_m}{T}.$$

Таким образом, на цепь воздействует ток прямоугольной формы.

Для полноты положим $\tau = RC$, $B = RI_0$ и $t_k = kT/4$. На четверти оборота $k = 0, 1, 2, 3$ напряжение равно

$$V(t) = (-1)^k B + [V(t_k) - (-1)^k B] e^{-(t-t_k)/\tau}.$$

Это выражение вместе с условием $V(0) = 0$ задаёт непрерывную зависимость напряжения от времени после начала вращения.

(а) Быстрое вращение: $T_a \ll RC$

За первый оборот через R утекает лишь небольшой заряд. В главном приближении

$$C \frac{dV}{dt} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

Используя начальные условия, получаем

$$V(t) \simeq -\frac{q(t)}{C}.$$

Поэтому напряжение имеет вид двух положительных треугольных импульсов:

t/T_a	0	1/4	1/2	3/4	1
$V/(Q_m/C)$, в главном приближении	0	1	0	1	0

Соедините последовательные точки отрезками прямых. Наибольшее напряжение приблизительно равно

$$V_a \simeq \frac{Q_m}{C}.$$

При конечном T_a/RC участки графика слегка искривлены, минимумы становятся немного отрицательными, а второй положительный максимум оказывается немного ниже первого. Приведённые выше положительные треугольники являются главным приближением для требуемого **первого оборота**.

(b) Медленное вращение: $T_b \gg RC$

За исключением коротких переходных процессов ток через конденсатор мал и

$$\frac{V}{R} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

Следовательно, напряжение приближается к чередующимся уровням

$$V \simeq \pm V_b, \quad V_b = \frac{4RQ_m}{T_b}.$$

График имеет следующие особенности:

- Напряжение начинается с нуля и экспоненциально возрастает к $+V_b$ с постоянной времени RC .
- После $t = T_b/4$ оно экспоненциально убывает к $-V_b$.
- После $t = T_b/2$ оно возрастает к $+V_b$.
- После $t = 3T_b/4$ оно убывает к $-V_b$.

Каждая четверть периода велика по сравнению с RC , поэтому большую её часть график представляет собой почти горизонтальное плато. В моменты переключения напряжение остаётся непрерывным. Например, сразу после первого переключения

$$V(t) \simeq -V_b + 2V_b e^{-(t-T_b/4)/(RC)},$$

так что оно проходит через ноль приблизительно через $RC \ln 2$ после этого переключения.

Таким образом, искомое отношение равно

$$\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{Q_m/C}{4RQ_m/T_b} = \frac{T_b}{4RC}.$$

6) Численное значение напряжения

Полностью открытая площадь равна

$$A_m = \frac{\pi}{2} (0.07^2 - 0.01^2) = 7.54 \times 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Следовательно,

$$Q_m = \varepsilon_0 E_0 A_m = (8.85 \times 10^{-12})(150)(7.54 \times 10^{-3}) \simeq 1.00 \times 10^{-11} \text{ С}.$$

Соответствующие времена равны

$$T = \frac{1}{50} = 0.020 \text{ s},$$

$$RC = (20 \times 10^6)(0.01 \times 10^{-6}) = 0.20 \text{ s}.$$

В частности, время до первого максимума составляет всего

$$\frac{T}{4} = 0.0050 \text{ s} = 0.025 RC.$$

Поэтому приближение быстрого вращения даёт

$$V_{\max} \simeq \frac{Q_m}{C} = \frac{1.00 \times 10^{-11}}{1.00 \times 10^{-8}} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ V}.$$

Поправка на конечное сопротивление следует из решения для первой четверти оборота:

$$V_{\max} = \frac{4RQ_m}{T} \left(1 - e^{-T/(4RC)}\right) = \frac{Q_m}{C} \frac{1 - e^{-0.025}}{0.025} \simeq 0.989 \text{ mV}.$$

Этот максимум достигается при $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$; второй положительный максимум меньше.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Силы, действующие на прозрачную призму со стороны лазерного излучения

Общие справочные данные

Величина	Обозначение	Значение
Средний радиус Земли	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$
Ускорение свободного падения	g	9.8 m s^{-2}
Гравитационная постоянная Ньютона	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Электрическая постоянная	ε_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
Магнитная постоянная	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [так в оригинале; правильное значение $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$]
Скорость света в вакууме (или воздухе)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Элементарный заряд	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Масса электрона	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Масса протона	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Постоянная Планка	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Постоянная Авогадро	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Постоянная Больцмана	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

Величина	Обозначение	Значение
Универсальная газовая постоянная	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ПРОЗРАЧНУЮ ПРИЗМУ СО СТОРОНЫ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

За счёт преломления мощный лазерный пучок может оказывать заметное силовое воздействие на небольшие прозрачные тела. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим небольшую стеклянную треугольную призму с углом при вершине $A = \pi - 2\alpha$, основанием длиной $2h$ и шириной w . Показатель преломления призмы равен n , а плотность её материала — ρ .

Пусть эта призма помещена в лазерный пучок, распространяющийся горизонтально в направлении x . (Во всей задаче считайте, что призма не вращается, то есть её вершина всегда направлена противоположно направлению распространения лазерного пучка, её треугольные грани параллельны плоскости xy , а основание параллельно плоскости yz , как показано на рис. 1.) Считайте показатель преломления окружающего воздуха равным $n_{\text{air}} = 1$. Предположите, что грани призмы имеют просветляющее покрытие, так что отражение отсутствует.

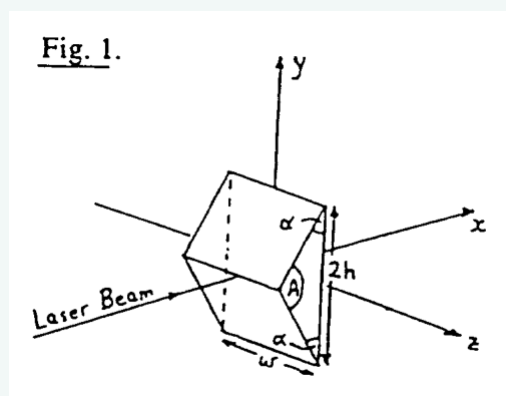


Рис. 1.

Интенсивность лазерного пучка постоянна по его ширине в направлении z , но линейно убывает с расстоянием y от оси x : она имеет максимальное значение I_0 при $y = 0$ и обращается в нуль при $y = \pm 4h$ (рис. 2). [Интенсивность — это мощность, приходящаяся на единицу площади; она выражается, например, в W m^{-2} .]

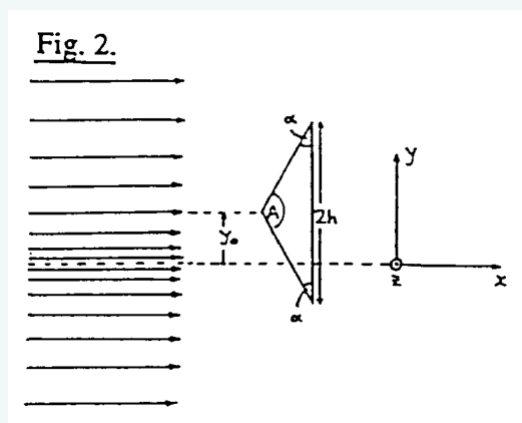


Рис. 2.

1) Запишите уравнения, из которых можно определить угол θ (см. рис. 3) через α и n в случае, когда лазерный свет падает на верхнюю грань призмы.

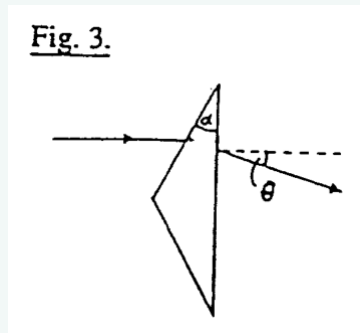


Рис. 3.

2) Выразите через I_0 , θ , h , w и y_0 компоненты по осям x и y результирующей силы, действующей на призму со стороны лазерного света, когда вершина призмы смещена от оси x на y_0 , где $|y_0| \leq 3h$.

Постройте графики зависимости горизонтальной и вертикальной компонент силы от вертикального смещения y_0 .

3) Пусть лазерный пучок имеет ширину 1 мм в направлении z и толщину $80 \mu\text{m}$ (в направлении y). Параметры призмы: $\alpha = 30^\circ$, $h = 10 \mu\text{m}$, $n = 1.5$, $w = 1 \text{ mm}$ и $\rho = 2.5 \text{ g cm}^{-3}$.

Какая мощность лазера в ваттах потребуется, чтобы уравновесить действующую на призму силу тяжести (направленную вдоль $-y$), если вершина призмы находится на расстоянии $y_0 = -h/2$ ($= -5 \mu\text{m}$) ниже оси лазерного пучка?

4) Пусть этот эксперимент проводится в отсутствие силы тяжести с той же призмой и лазерным пучком тех же размеров, что и в (3), но с $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$.

Каков будет период колебаний, возникающих, если призму сместить на расстояние $y = h/20$ от центральной линии лазерного пучка и отпустить?

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

1. Если β — угол преломления на верхней грани, а γ — угол падения на основание, то

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad \gamma = \alpha - \beta, \quad \sin \theta = n \sin \gamma.$$

Эквивалентная запись:

$$\theta = \arcsin \left[\sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \right].$$

2. Введём обозначения

$$u = \frac{y_0}{h}, \quad C_x = \frac{I_0 w h}{4c} (1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0 w h}{4c} \sin \theta.$$

Тогда

$$F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases}$$

$$F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \operatorname{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}$$

График горизонтальной компоненты силы чётный, с параболическим максимумом в центре и прямолинейными внешними участками. График вертикальной компоненты силы нечётный и соответствует возвращающей силе; центральные участки квадратичные, а внешние — постоянные.

3. Требуемая **полная мощность лазерного пучка** равна

$$P \simeq 33 \text{ W}.$$

Соответствующая максимальная интенсивность равна $I_0 \simeq 8.3 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}$.

4. Приближение малых колебаний даёт

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho c h^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}} \simeq 1.12 \times 10^{-2} \text{ s}.$$

Учёт слабой нелинейности при заданной амплитуде $h/20$ даёт

$$T \simeq 1.13 \times 10^{-2} \text{ s},$$

что примерно на 1.08% больше.

Решение

Используем геометрическую оптику, пренебрежём поглощением, как и следует для прозрачной призмы, и учтём заданное отсутствие отражения. Силы вычисляются в главном порядке по отношению скорости призмы к c .

1) Преломление и угол выхода луча

Верхняя грань образует угол α с вертикальным основанием. Поэтому направленная внутрь нормаль к ней составляет угол α с горизонталью и направлена ниже неё. Угол падения горизонтального падающего луча равен α .

Пусть β — угол преломления, отсчитываемый от этой нормали. Закон Снеллиуса даёт

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

Следовательно, внутри призмы луч распространяется под углом

$$\gamma = \alpha - \beta$$

ниже горизонтали.

Нормаль к выходной грани горизонтальна, поэтому γ также является углом падения на эту грань. Ещё раз применяя закон Снеллиуса, получаем

$$n \sin \gamma = \sin \theta.$$

Таким образом,

$$\theta = \arcsin \left[n \sin \left(\alpha - \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} \right) \right].$$

Эквивалентное выражение получается при раскрытии синуса разности:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= n(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\boxed{\sin \theta = \sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right)}.$$

Для показанного на рис. 3 хода прошедшего луча требуется выполнение условия $n \sin \gamma \leq 1$, которое удовлетворяется при численных данных задачи. В силу симметрии свет, входящий через нижнюю грань, выходит под углом θ выше горизонтали.

2) Компоненты силы и графики

Распределение интенсивности имеет вид

$$I(y) = I_0 \left(1 - \frac{|y|}{4h} \right), \quad |y| \leq 4h.$$

Обозначим через P_+ и P_- мощности света, входящего через верхнюю и нижнюю грани. Когда вершина находится в точке y_0 , проекции этих граней на плоскость, перпендикулярную падающему пучку, занимают соответственно интервалы

$$[y_0, y_0 + h], \quad [y_0 - h, y_0].$$

Поэтому

$$P_+ = w \int_{y_0}^{y_0+h} I(y) dy, \quad P_- = w \int_{y_0-h}^{y_0} I(y) dy.$$

Элемент площади здесь равен $w dy$: это площадь проекции на плоскость, перпендикулярную падающему свету. Дополнительный множитель, учитывающий угол падения, не требуется.

Свет мощностью P в воздухе переносит за единицу времени импульс P/c . Для света, входящего через верхнюю грань, направления падающего и выходящего лучей задаются векторами

$$(1, 0), \quad (\cos \theta, -\sin \theta).$$

Сила, действующая на призму, равна разности входящего и выходящего потоков импульса:

$$\mathbf{F}_+ = \frac{P_+}{c} (1 - \cos \theta, \sin \theta).$$

Аналогично,

$$\mathbf{F}_- = \frac{P_-}{c} (1 - \cos \theta, -\sin \theta).$$

Складывая, получаем

$$F_x = \frac{1 - \cos \theta}{c}(P_+ + P_-), \quad F_y = \frac{\sin \theta}{c}(P_+ - P_-).$$

Для вычисления мощностей положим $u = y_0/h$. Первообразная безразмерного распределения интенсивности имеет вид

$$J(v) = v - \frac{v|v|}{8}, \quad J'(v) = 1 - \frac{|v|}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{P_+}{I_0wh} = J(u+1) - J(u), \quad \frac{P_-}{I_0wh} = J(u) - J(u-1).$$

При $|u| \leq 1$ призма располагается по обе стороны от оси пучка. Вычисление этих выражений даёт

$$P_+ + P_- = \frac{I_0wh}{4}(7 - u^2),$$

$$P_+ - P_- = -\frac{I_0wh}{4}u(2 - |u|).$$

При $1 \leq |u| \leq 3$ вся призма находится по одну сторону от оси, где интенсивность изменяется линейно:

$$P_+ + P_- = \frac{I_0wh}{4}(8 - 2|u|),$$

$$P_+ - P_- = -\frac{I_0wh}{4}\text{sgn}(u).$$

Таким образом, при обозначениях

$$C_x = \frac{I_0wh}{4c}(1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0wh}{4c}\sin \theta,$$

искомые силы равны

$$F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases} \quad F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \text{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}$$

Значения для построения графиков:

$u = y_0/h$	F_x/C_x	F_y/C_y
-3	2	1
-2	4	1
-1	6	1
-1/2	6.75	0.75
0	7	0
1/2	6.75	-0.75
1	6	-1
2	4	-1
3	2	-1

Для графика горизонтальной компоненты силы проведите между $u = -1$ и $u = 1$ параболу с ветвями, направленными вниз, и максимумом $7C_x$ при нулевом смещении. Продолжите её прямолинейными отрезками до значения $2C_x$ при $u = \pm 3$. На всём заданном интервале сила остаётся положительной.

Для графика вертикальной компоненты силы проведите горизонтальный отрезок со значением $+C_y$ от $u = -3$ до -1 , затем квадратичный участок, убывающий до нуля при $u = 0$. Отрадите этот участок относительно начала координат, чтобы получить значение $-C_y$ при $u = 1$, затем продолжите график горизонтально до $u = 3$. Его наклон в начале координат равен $-2C_y/h$. Оба графика силы сопрягаются с непрерывным наклоном при $u = \pm 1$.

Вертикальная сила является возвращающей: на верхнюю грань призмы, расположенной ниже оси, попадает больше света, и призма выталкивается вверх; выше оси она выталкивается вниз.

3) Мощность лазера, необходимая для уравнивания силы тяжести

Расстояние от вершины до основания равно

$$d = h \tan \alpha.$$

Поэтому объём и масса равны

$$V = \frac{1}{2}(2h)d w = h^2 w \tan \alpha, \quad m = \rho h^2 w \tan \alpha.$$

В единицах СИ

$$h = 10^{-5} \text{ м}, \quad w = 10^{-3} \text{ м}, \quad \rho = 2.5 \times 10^3 \text{ кг м}^{-3},$$

так что

$$m = 1.4434 \times 10^{-10} \text{ кг}, \quad mg = 1.4145 \times 10^{-9} \text{ Н}.$$

При $\alpha = 30^\circ$ и $n = 1.5$

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\sin 30^\circ}{1.5} \right) = 19.471^\circ, \\ \gamma = 10.529^\circ, \quad \theta = 15.908^\circ, \quad \sin \theta = 0.274094.$$

При $y_0 = -h/2$ имеем $u = -1/2$, откуда

$$F_y = \frac{3}{4}C_y = \frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c}.$$

Для равновесия по вертикали требуется

$$\frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c} = \rho h^2 w \tan \alpha g.$$

Отсюда

$$I_0 = \frac{16\rho g h c \tan \alpha}{3 \sin \theta} = 8.2571 \times 10^8 \text{ Вт м}^{-2}.$$

Искомая мощность — это мощность **всего пучка**. Его толщина $80 \mu\text{м}$ равна $8h$, а площадь под графиком его треугольного распределения интенсивности равна $4hI_0$. Таким образом,

$$P = w \int_{-4h}^{4h} I(y) dy = 4hwI_0.$$

Подстановка даёт

$$P = 4(10^{-5})(10^{-3})(8.2571 \times 10^8) = 33.03 \text{ W}.$$

Следовательно,

$$P \simeq 33 \text{ W}.$$

Это уравнивает силу тяжести в направлении y , как и требуется. Горизонтальная сила со стороны света остаётся положительной.

4) Период колебаний в отсутствие силы тяжести

На протяжении заданных колебаний $|y_0| \leq h/20 < h$. Выражение для силы на центральном участке можно записать в виде

$$F_y = -\frac{I_0 w \sin \theta}{2c} y_0 \left(1 - \frac{|y_0|}{2h}\right).$$

Введём обозначение

$$K = \frac{I_0 w \sin \theta}{2c}.$$

При амплитуде $a = h/20$ нелинейный множитель отличается от единицы не более чем на

$$\frac{a}{2h} = \frac{1}{40} = 2.5\%.$$

Поэтому в главном приближении движение представляет собой гармонические колебания:

$$m\ddot{y}_0 = -Ky_0, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}.$$

Используя найденную выше массу, получаем

$$\omega_0^2 = \frac{I_0 \sin \theta}{2\rho ch^2 \tan \alpha},$$

и

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho ch^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}}.$$

При $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$

$$K = 4.5682 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-1}, \quad \omega_0 = 562.58 \text{ s}^{-1},$$

так что

$$T_0 = 0.0111685 \text{ s} \approx 11.2 \text{ ms}.$$

Поправку на конечную амплитуду можно также вычислить из точного выражения для силы.

Полагая потенциальную энергию равной нулю в начале координат, получаем

$$U(y_0) = \frac{K}{2} y_0^2 - \frac{K}{6h} |y_0|^3.$$

Если призму отпустить без начальной скорости из положения $y_0 = a$, то

$$\frac{1}{2} m \dot{y}_0^2 = U(a) - U(y_0).$$

В силу симметрии период в четыре раза больше времени движения от 0 до a :

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{K}} \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2 - (a^3 - y^3)/(3h)}}.$$

Полагая $s = y/a$, получаем

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2 - \frac{a}{3h}(1 - s^3)}}.$$

При $a/h = 1/20$ численное вычисление даёт

$$\frac{T}{T_0} = 1.01079,$$

и, следовательно,

$$T = 0.0112890 \text{ s} \approx 11.3 \text{ ms}.$$

Таким образом, период составляет около 0.011 s; при заданной амплитуде приближение малых колебаний даёт точность примерно 1.1%.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Электронный пучок

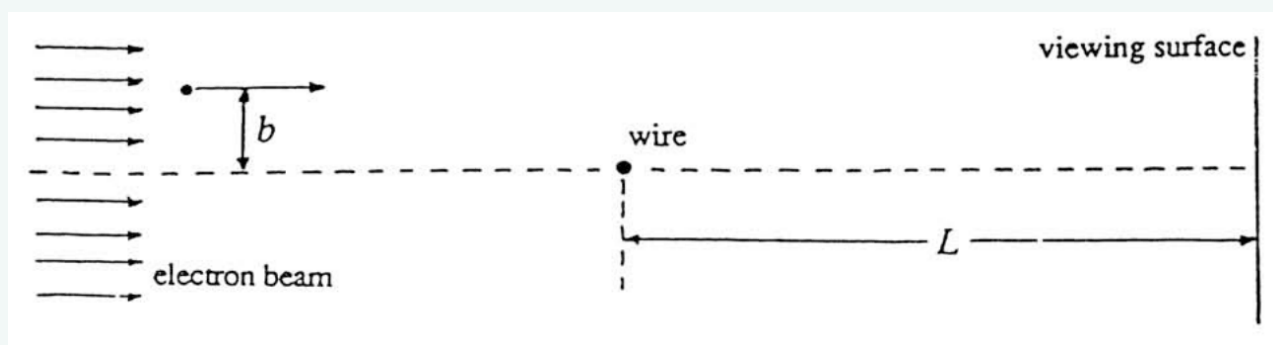
Общие справочные данные

Величина	Обозначение	Значение
Средний радиус Земли	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$.
ускорение свободного падения	g	9.8 m s^{-2} .
гравитационная постоянная Ньютона	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.
электрическая постоянная	ε_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$.
магнитная постоянная	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [так в оригинале; правильное значение $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$].
скорость света в вакууме (или воздухе)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
элементарный заряд	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$.
масса электрона	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.
масса протона	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.
постоянная Планка	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$.
постоянная Авогадро	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
постоянная Больцмана	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.
универсальная газовая постоянная	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Теоретическая задача 3

ЭЛЕКТРОННЫЙ ПУЧОК

Ускоряющее напряжение V_0 создаёт однородный параллельный пучок электронов высокой энергии. Электроны пролетают мимо тонкой длинной положительно заряженной медной проволоки, натянутой под прямым углом к первоначальному направлению пучка, как показано на рисунке. Символом b обозначено расстояние, на котором электрон пролетел бы мимо проволоки, если бы она не была заряжена. Затем электроны попадают на экран (поверхность наблюдения), расположенный на расстоянии L ($\gg b$) за проволокой, как показано на рисунке. Первоначально пучок простирается до расстояний $\pm b_{\max}$ относительно оси проволоки. Как ширину пучка, так и длину проволоки в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, можно считать бесконечными.



Заряженная проволока расположена перпендикулярно плоскости рисунка. Масштаб на рисунке не соблюден.

Некоторые численные данные приведены ниже; остальные численные данные вы найдёте в таблице в начале комплекта заданий:

радиус проволоки	$= r_0 =$	10^{-6} m
максимальное значение b	$= b_{\max} =$	10^{-4} m
электрический заряд на единицу длины проволоки	$= q_{\text{linear}} =$	$4.4 \times 10^{-11} \text{ C m}^{-1}$
ускоряющее напряжение	$= V_0 =$	$2 \times 10^4 \text{ V}$
расстояние от проволоки до экрана наблюдения	$= L =$	0.3 m .

Примечание: В пунктах 2 – 4 используйте разумные приближения, позволяющие получить аналитические и численные решения.

- 1) Рассчитайте электрическое поле $\mathbf{E}$, создаваемое проволокой. Постройте эскиз графика модуля $\mathbf{E}$ в зависимости от расстояния до оси проволоки.
- 2) Используя классическую физику, рассчитайте угол отклонения электрона. Сделайте это для таких значений параметра b , при которых электрон не сталкивается с проволокой. Обозначим через θ_{final} (малый) угол между начальной скоростью электрона и его скоростью в момент достижения поверхности наблюдения. Найдите θ_{final} .
- 3) Рассчитайте и изобразите схематически картину попаданий электронов (то есть распределение интенсивности) на экране наблюдения, предсказываемую классической физикой.

4) Квантовая физика предсказывает существенное отличие в распределении интенсивности (по сравнению с предсказанием классической физики). Схематически изобразите картину, предсказываемую квантовой физикой, и приведите её количественные характеристики.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Пусть y — поперечная координата на экране, принимающая значения обоих знаков, причём $y = 0$ соответствует точке прямо напротив проволоки, а I_0 — интенсивность падающего пучка.

1. Поле направлено радиально наружу:

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0, \\ \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}, & r > r_0. \end{cases}$$

На поверхности его модуль скачком возрастает от нуля до $7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$, а затем убывает как $1/r$.

2. Электроны, пролетающие с обеих сторон проволоки, отклоняются к оси приблизительно на один и тот же угол:

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0} = 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

3. С учётом конечного радиуса проволоки классическое распределение имеет вид

$$I_{\text{cl}}(y) \simeq \begin{cases} 2I_0, & |y| < 17.6 \text{ } \mu\text{m}, \\ I_0, & 17.6 \text{ } \mu\text{m} < |y| < 81.4 \text{ } \mu\text{m}, \\ 0, & |y| > 81.4 \text{ } \mu\text{m}. \end{cases}$$

Таким образом, ширина центральной полосы с удвоенной интенсивностью составляет около $35 \text{ } \mu\text{m}$, а ширина всей освещённой области — около $163 \text{ } \mu\text{m}$.

4. Для когерентных электронов в центральной области перекрытия возникают интерференционные полосы:

$$\lambda_{\text{dB}} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}, \quad d \simeq \frac{\lambda_{\text{dB}}}{2\theta_{\text{final}}} = 7.0 \times 10^{-8} \text{ m} = 70 \text{ nm.}$$

Вдали от краёв огибающей

$$I_{\text{q}}(y) \simeq 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right)$$

в области перекрытия. Центр светлый; в последовательных максимумах интенсивность достигает $4I_0$, а в минимумах обращается в нуль. На ширине области перекрытия укладывается примерно 5.1×10^2 периодов интерференционной картины. В боковых областях интенсивность остаётся приблизительно равной I_0 .

Решение

1) Электрическое поле

Медь — проводник, поэтому внутри проволоки электростатическое поле равно нулю. Снаружи проволоки, которую можно считать бесконечной, цилиндрическая симметрия требует, чтобы поле было радиальным и зависело только от расстояния r до её оси.

Применим теорему Гаусса к соосной цилиндрической поверхности радиуса $r > r_0$ и длины ℓ :

$$E(r)(2\pi r\ell) = \frac{q_{\text{linear}}\ell}{\varepsilon_0}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\varepsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}.$$

Поле направлено наружу, поскольку проволока заряжена положительно.

Численно,

$$\frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{2\pi(8.85 \times 10^{-12})} = 0.791 \text{ V},$$

поэтому

$$E(r_0^+) = \frac{0.791}{10^{-6}} \simeq 7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}.$$

Искомый график лежит на горизонтальной оси при $0 \leq r < r_0$, скачком поднимается при $r = r_0$, а затем следует убывающей кривой $1/r$, асимптотически приближаясь к нулю. Например,

$$E(10r_0) = 7.9 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad E(100r_0) = 7.9 \times 10^3 \text{ V m}^{-1}.$$

2) Угол отклонения

Направим ось x вдоль падающего пучка, а ось y — перпендикулярно ей в плоскости рисунка. Проволока проходит через точку $x = y = 0$.

Используем нерелятивистское соотношение для энергии:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV_0, \quad v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_e}} \simeq 8.4 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

Здесь $eV_0/(m_e c^2) \simeq 0.039$, поэтому нерелятивистское рассмотрение является разумным приближением для этой задачи.

Рассчитаем малое изменение поперечного импульса вдоль неотклонённой траектории $y = b$, считая v постоянной. Это согласуется с малостью потенциала проволоки: разность потенциалов между r_0 и L составляет всего

$$\Phi(r_0) - \Phi(L) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{L}{r_0}\right) \simeq 10 \text{ V},$$

что значительно меньше $V_0 = 2 \times 10^4 \text{ V}$.

Для электрона, пролетающего над проволокой, $b > 0$, поперечная сила равна

$$F_y = -eE_y = -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\varepsilon_0} \frac{b}{x^2 + b^2}.$$

Поскольку $dt = dx/v$, изменение поперечного импульса к моменту достижения электроном $x = L$ приблизительно равно

$$\begin{aligned}\Delta p_y &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^L F_y dx \\ &= -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 v} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{L}{b}\right) \right].\end{aligned}$$

Нижний предел интегрирования предполагает, что начальные параметры пучка заданы перед проволокой на расстоянии, достаточно большом по сравнению с b .

При малом отклонении

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{|\Delta p_y|}{m_e v}.$$

Используя $m_e v^2 = 2eV_0$, получаем

$$\theta_{\text{final}}(b) \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\pi\epsilon_0 V_0} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{L}{b}\right) \right].$$

Поскольку $L \gg b$, выражение в скобках приблизительно равно π , что даёт

$$\boxed{\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0}.$$

Таким образом, с данной точностью угол отклонения не зависит от прицельного параметра:

$$\theta_{\text{final}} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{4(8.85 \times 10^{-12})(2 \times 10^4)} \simeq 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

Даже при $b = b_{\text{max}}$ относительная величина поправки в скобках, обусловленной конечным расстоянием до экрана, составляет лишь около 10^{-4} .

Верхняя половина пучка отклоняется вниз, а нижняя — вверх. В том же приближении для электронов, пролетающих мимо проволоки, выполняется $b > r_0$. Малым изменением граничного прицельного параметра столкновения из-за притяжения пренебрегаем.

3) Классическое распределение интенсивности

Обозначим

$$\alpha = \theta_{\text{final}}, \quad a = L\alpha \simeq 18.6 \text{ } \mu\text{m}.$$

Поскольку $L \gg b_{\text{max}}$, можно считать, что отклонение происходит вблизи проволоки. Поэтому электрон, падающий на расстоянии b выше оси, достигает точки

$$y = b - a,$$

а электрон, падающий на таком же расстоянии ниже оси, достигает точки

$$y = -b + a.$$

Мимо проволоки пролетают только электроны с $r_0 < b < b_{\text{max}}$. Следовательно, две прошедшие части пучка занимают на экране следующие интервалы:

$$\text{верхняя часть падающего пучка: } r_0 - a < y < b_{\text{max}} - a,$$

$$\text{нижняя часть падающего пучка: } -b_{\text{max}} + a < y < a - r_0.$$

Численно эти интервалы имеют вид

$$-17.6 < y < 81.4 \text{ }\mu\text{m}$$

и

$$-81.4 < y < 17.6 \text{ }\mu\text{m},$$

соответственно.

Для каждой части пучка при таком отображении $|dy/db| = 1$. Поэтому из сохранения потока электронов следует, что интенсивность равна I_0 везде, куда попадает одна часть пучка, и $2I_0$ везде, куда попадают обе части.

Введём обозначения

$$w = a - r_0 \simeq 17.6 \text{ }\mu\text{m}, \quad Y = b_{\max} - a \simeq 81.4 \text{ }\mu\text{m}.$$

Тогда

$$I_{\text{cl}}(y) = \begin{cases} 2I_0, & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

График симметричен относительно $y = 0$. При движении слева направо интенсивность скачком возрастает от нуля до I_0 при $-81.4 \text{ }\mu\text{m}$, увеличивается до $2I_0$ при $-17.6 \text{ }\mu\text{m}$, падает до I_0 при $+17.6 \text{ }\mu\text{m}$ и вновь становится равной нулю при $+81.4 \text{ }\mu\text{m}$. Полосы однородны вдоль направления, параллельного проволоке.

Их ширины равны

$$\text{ширина центральной области перекрытия} = 2(a - r_0) \simeq 35.3 \text{ }\mu\text{m},$$

$$\text{ширина каждой боковой области} = b_{\max} - 2a + r_0 \simeq 63.7 \text{ }\mu\text{m}.$$

Центральной геометрической тени нет: две отклонённые части пучка перекрываются.

Для проверки сохранения потока вычислим

$$\int I_{\text{cl}}(y) dy = 2I_0(b_{\max} - r_0),$$

что в точности равно падающему потоку за вычетом электронов, перехваченных проволокой в этом приближении.

4) Квантовое распределение интенсивности

Для идеального моноэнергетического когерентного падающего пучка части, проходящие по разные стороны проволоки, интерферируют там, где они перекрываются.

Длина волны де Бройля электрона равна

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV_0}},$$

поэтому

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31})(1.60 \times 10^{-19})(2 \times 10^4)}} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

В области перекрытия две приблизительно плоские волны распространяются под углами $+\alpha$ и $-\alpha$ к первоначальному направлению. Поэтому поперечные компоненты их волновых векторов равны $+k \sin \alpha$ и $-k \sin \alpha$, где

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{dB}}.$$

В силу зеркальной симметрии их фазы при $y = 0$ равны. Разность их фаз в точке экрана с координатой y составляет

$$\Delta\phi(y) = 2ky \sin \alpha.$$

Каждая волна по отдельности даёт интенсивность I_0 , поэтому

$$\begin{aligned} I_q(y) &= I_0 + I_0 + 2I_0 \cos \Delta\phi \\ &= 4I_0 \cos^2(ky \sin \alpha). \end{aligned}$$

Таким образом, расстояние между соседними интерференционными полосами равно

$$d = \frac{\lambda_{dB}}{2 \sin \alpha} \simeq \frac{\lambda_{dB}}{2\alpha},$$

откуда

$$d \simeq 6.99 \times 10^{-8} \text{ m} \simeq 70 \text{ nm}.$$

В приближении геометрической огибающей

$$I_q(y) \simeq \begin{cases} 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right), & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

Искомый график имеет ту же широкую огибающую, что и классическое распределение, но центральное плато заменяется близко расположенными интерференционными полосами:

- Светлые полосы расположены при $y = nd$, где интенсивность равна $4I_0$; n — целое число.
- Тёмные полосы расположены при $y = (n + \frac{1}{2})d$, где интенсивность равна нулю.
- Центральная полоса при $y = 0$ — светлая.
- Полосы прямолинейны и параллельны проволоке.
- Их средняя интенсивность равна $2I_0$, то есть классической интенсивности в центре.

Приблизительное число периодов интерференционной картины на ширине области перекрытия равно

$$N \simeq \frac{2w}{d} = \frac{35.3 \times 10^{-6}}{6.99 \times 10^{-8}} \simeq 5.1 \times 10^2.$$

Дифракция сглаживает границы огибающей, поэтому кусочно заданное выражение применимо вдали от этих краёв. Характерный поперечный масштаб дифракции имеет порядок

$$\sqrt{\lambda_{dB} L} \simeq 1.6 \text{ } \mu\text{m}.$$

Детектор, который не может разрешить полосы с периодом 70 nm, измеряет их среднюю интенсивность и приблизительно воспроизводит классическое распределение.

Решение проверено по официальному решению.