

IPhO 1993

Problemas teóricos y soluciones · Williamsburg, Virginia, EE. UU. · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1993/

Problema 1: Electricidad atmosférica

Información general tabulada

Magnitud	Símbolo	Valor
Radio medio de la Tierra	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m.}$
aceleración de la gravedad	g	$9.8 \text{ m s}^{-2}.$
constante de gravitación universal de Newton	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}.$
permitividad del vacío	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}.$
permeabilidad del vacío	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [sic; valor correcto $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$].
velocidad de la luz en el vacío (o en el aire)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$
carga elemental	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C.}$
masa del electrón	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg.}$
masa del protón	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
constante de Planck	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s.}$
constante de Avogadro	N_A	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$
constante de Boltzmann	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}.$
constante molar de los gases	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$

Problema teórico 1

ELECTRICIDAD ATMOSFÉRICA

Desde el punto de vista de la electrostática, la superficie de la Tierra puede considerarse un buen conductor. Posee una cierta carga total Q_0 y una densidad superficial de carga media σ_0 .

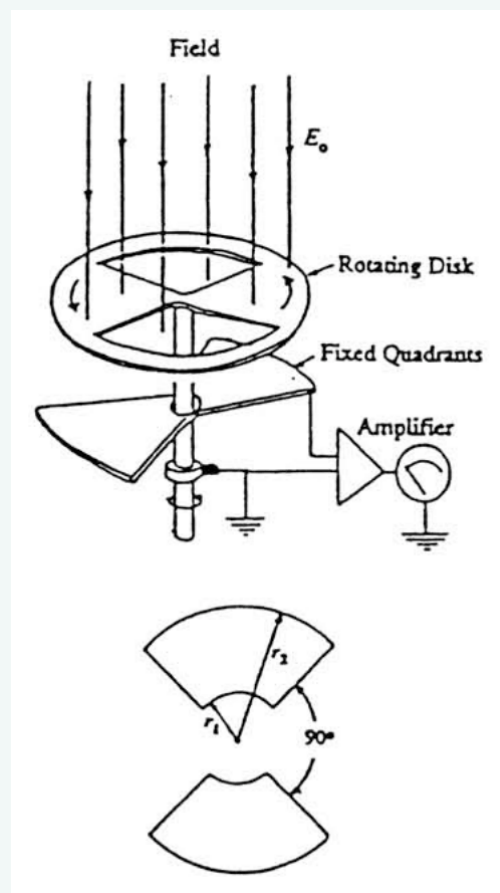
- 1) En condiciones de buen tiempo, en la superficie terrestre existe un campo eléctrico dirigido hacia abajo, E_0 , de aproximadamente 150 V/m . Deduzca el módulo de la densidad superficial de carga de la Tierra y de la carga total que posee su superficie.
- 2) El módulo del campo eléctrico dirigido hacia abajo disminuye con la altura y es de aproximadamente 100 V/m a una altura de 100 m . Calcule la cantidad media de carga neta por m^3 de atmósfera entre la superficie terrestre y los 100 m de altitud.

3) La densidad de carga neta que ha calculado en (2) se debe en realidad a la presencia de cantidades casi iguales de iones positivos y negativos con una sola carga elemental por unidad de volumen (n_+ y n_-). Cerca de la superficie terrestre, en condiciones de buen tiempo, $n_+ \approx n_- \approx 6 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$. Estos iones se mueven bajo la acción del campo eléctrico vertical. Su rapidez es proporcional a la intensidad del campo:

$$v \approx 1.5 \times 10^{-4} \cdot E,$$

donde v se expresa en m/s y E en V/m. ¿Cuánto tiempo tardaría el movimiento de los iones atmosféricos en neutralizar la mitad de la carga de la superficie terrestre, si no se produjeran otros procesos (por ejemplo, rayos) que la mantuvieran?

4) Una forma de medir el campo eléctrico atmosférico y, por tanto, σ_0 , consiste en utilizar el sistema mostrado en el diagrama. Un par de cuadrantes metálicos, aislados de tierra pero conectados entre sí, están montados justo debajo de un disco conectado a tierra que gira uniformemente y en el que se han recortado dos aberturas en forma de cuadrante. (En el diagrama se ha exagerado la separación para mostrar la disposición.) Dos veces en cada vuelta, los cuadrantes aislados quedan completamente expuestos al campo y, después ($1/4$ de período más tarde), quedan completamente apantallados frente a él. Sea T el período de rotación y sean r_1 y r_2 los radios interior y exterior de los cuadrantes aislados, como se muestra.



Tome $t = 0$ en un instante en que los cuadrantes aislados estén completamente apantallados.

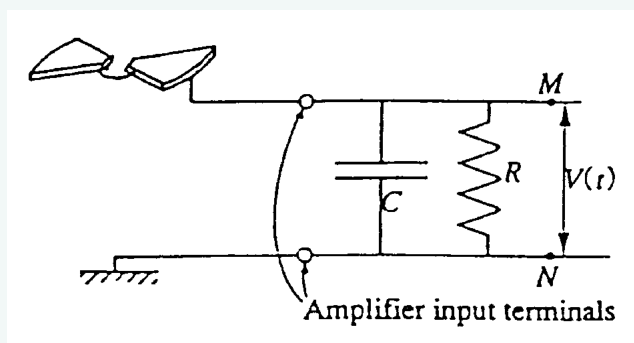
Obtenga expresiones para la carga total $q(t)$ inducida en la superficie superior de los cuadrantes aislados en función del tiempo entre $t = 0$ y $t = T/2$, y trace una gráfica de esta variación.

[En esta situación pueden despreciarse los efectos de la corriente de iones atmosféricos.]

(5) El sistema descrito en (4) se conecta a un amplificador cuyo circuito de entrada equivale a un condensador C y una resistencia R en paralelo. (Puede suponer que la capacidad del sistema de cuadrantes es despreciable frente a C .) Trace gráficas que muestren la forma de la diferencia de potencial V entre los puntos M y N en función de t durante una vuelta del disco, justo después de ponerlo en rotación con un período T , si:

a) $T = T_a \ll CR$;

b) $T = T_b \gg CR$.



[Suponga que C y R tienen valores fijos; solo cambia T entre las situaciones (a) y (b).]

Obtenga una expresión para el cociente aproximado, V_a/V_b , entre los valores máximos de $V(t)$ en los casos (a) y (b).

6) Suponga que $E_0 = 150 \text{ V/m}$, $r_1 = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 7 \text{ cm}$, $C = 0.01 \mu\text{F}$, $R = 20 \text{ M}\Omega$, y que el disco se pone en rotación a 50 vueltas por segundo.

¿Cuál es, aproximadamente, el valor máximo de V durante una vuelta en este caso?

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Tómese $V = V_M - V_N$. Para los apartados 4–6, definamos el área completamente expuesta y el módulo de su carga inducida mediante

$$A_m = \frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2), \quad Q_m = \varepsilon_0 E_0 A_m > 0.$$

1. La carga de la superficie terrestre es negativa:

$$\sigma_0 \simeq -1.3 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}, \quad Q_0 \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

Los módulos solicitados son los valores absolutos.

2. La densidad media de carga atmosférica es

$$\bar{\rho} \simeq +4.4 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

3. Contando únicamente los iones positivos que llegan a la superficie y considerando que su concentración es aproximadamente constante,

$$t_{1/2} = \frac{\varepsilon_0 \ln 2}{en_+(1.5 \times 10^{-4})} \simeq 4.3 \times 10^2 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

4. La carga inducida en la superficie superior es

$$q(t) = \begin{cases} -Q_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -Q_m \left(2 - \frac{4t}{T}\right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Su gráfica une $(0, 0)$, $(T/4, -Q_m)$ y $(T/2, 0)$ mediante segmentos rectos y se repite cada $T/2$.

5. Para la primera vuelta, partiendo de $V(0) = 0$: - **(a)** $V \simeq -q/C$: dos pulsos triangulares positivos, cada uno de altura

$$V_a \simeq \frac{Q_m}{C}.$$

- **(b)** V alterna aproximadamente entre $+V_b$ y $-V_b$, con transiciones exponenciales de constante de tiempo RC , donde

$$V_b \simeq \frac{4RQ_m}{T_b}.$$

Por tanto,

$$\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{T_b}{4RC}.$$

6. La diferencia de potencial máxima durante la primera vuelta es

$$V_{\max} \simeq 1.0 \times 10^{-3} \text{ V} = 1.0 \text{ mV}.$$

Al incluir la resistencia finita se obtiene 0.989 mV , que se alcanza en $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$.

Solución

1) Carga de la superficie terrestre

El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático es nulo. La ley de Gauss aplicada a una pequeña superficie cilíndrica que atraviesa su superficie da

$$E_{\perp, \text{outside}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0},$$

donde la normal apunta hacia el exterior del conductor. Puesto que el campo apunta hacia abajo, hacia el interior de la Tierra,

$$\sigma_0 = -\varepsilon_0 E_0.$$

Por tanto,

$$\sigma_0 = -(8.85 \times 10^{-12})(150) = -1.3275 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}.$$

Aproximando la Tierra por una esfera y utilizando este valor como su densidad superficial de carga media,

$$Q_0 = 4\pi R_E^2 \sigma_0 = -4\pi (6.4 \times 10^6)^2 (1.3275 \times 10^{-9}) \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

Así, el módulo de la densidad superficial de carga es aproximadamente 1.3 nC m^{-2} , y el de la carga total es aproximadamente $6.8 \times 10^5 \text{ C}$.

2) Carga espacial atmosférica

Tomemos z creciente hacia arriba. Las componentes verticales del campo, con su signo, a las dos alturas son

$$E_z(0) = -150 \text{ V/m}, \quad E_z(100 \text{ m}) = -100 \text{ V/m}.$$

En un intervalo de altura de 100 m , la curvatura terrestre es despreciable porque $100/R_E \ll 1$. Por tanto, la ley de Gauss para una columna vertical de sección transversal horizontal de área A da

$$\bar{\rho} Ah = \varepsilon_0 A [E_z(h) - E_z(0)].$$

En consecuencia,

$$\bar{\rho} = \varepsilon_0 \frac{-100 - (-150)}{100} = (8.85 \times 10^{-12})(0.50) = 4.425 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

La carga es **positiva**, en consonancia con el debilitamiento del campo dirigido hacia abajo al aumentar la altura.

3) Tiempo necesario para neutralizar la mitad de la carga superficial

La Tierra está cargada negativamente. Los iones positivos se desplazan por deriva hacia abajo y pueden alcanzar su superficie; los iones negativos se desplazan por deriva hacia arriba. Por tanto, la corriente que neutraliza la carga superficial contiene la contribución de **los iones positivos únicamente**.

Escribamos la movilidad iónica como

$$\mu = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad v = \mu E.$$

Suponiendo que la concentración n_+ proporcionada para las proximidades de la superficie permanece aproximadamente constante en esta estimación del movimiento de deriva, la carga positiva que llega por unidad de área y por unidad de tiempo es

$$j_+ = en_+ v = en_+ \mu E.$$

Sea $S(t) = |\sigma(t)|$ el módulo de la densidad superficial de carga negativa restante. La condición de contorno del conductor da

$$E(t) = \frac{S(t)}{\varepsilon_0}.$$

Como cada ion positivo que llega reduce S ,

$$\frac{dS}{dt} = -j_+ = -\frac{en_+\mu}{\varepsilon_0} S.$$

La descarga es, por tanto, exponencial:

$$S(t) = S(0)e^{-t/\tau_+}, \quad \tau_+ = \frac{\varepsilon_0}{en_+\mu}.$$

Numéricamente,

$$en_+\mu = (1.60 \times 10^{-19})(6 \times 10^8)(1.5 \times 10^{-4}) = 1.44 \times 10^{-14} \text{ S m}^{-1},$$

y

$$\tau_+ = \frac{8.85 \times 10^{-12}}{1.44 \times 10^{-14}} \simeq 615 \text{ s.}$$

Imponiendo $S(t_{1/2}) = S(0)/2$,

$$t_{1/2} = \tau_+ \ln 2 \simeq 426 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

Añadir la conductividad de los iones negativos que se mueven hacia arriba supondría contar incorrectamente una corriente que no entra en la superficie terrestre.

4) Carga inducida en los cuadrantes

Despreciemos los efectos de borde y consideremos que el apantallamiento es completo allí donde el disco conectado a tierra cubre los cuadrantes. En una superficie superior expuesta, el campo dirigido hacia abajo exige una densidad superficial de carga

$$\sigma_{\text{upper}} = -\varepsilon_0 E_0.$$

El área total de los dos cuadrantes anulares es

$$A_m = 2 \left[\frac{\pi}{4} (r_2^2 - r_1^2) \right] = \frac{\pi}{2} (r_2^2 - r_1^2).$$

La velocidad angular del disco es

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Durante el primer cuarto de vuelta, cada abertura deja expuesta una anchura angular $\theta = \omega t$. Por tanto, el área total expuesta es

$$A(t) = 2 \left[\frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \theta \right] = \frac{2\pi(r_2^2 - r_1^2)}{T} t, \quad 0 \leq t \leq T/4.$$

Alcanza A_m en $T/4$ y luego disminuye al mismo ritmo hasta anularse en $T/2$. Así,

$$A(t) = \begin{cases} A_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ A_m \left(2 - \frac{4t}{T} \right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Puesto que $q(t) = -\varepsilon_0 E_0 A(t)$,

$$q(t) = \begin{cases} -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} t, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

La gráfica es un pulso triangular hacia abajo: parte de cero, disminuye linealmente hasta $-Q_m$ en $T/4$ y luego aumenta linealmente hasta cero en $T/2$. Hay dos pulsos idénticos por vuelta.

Aquí q es la carga en la **superficie superior**. Un sistema de cuadrantes aislado puede adquirir esta carga superficial redistribuyendo su carga existente.

5) Diferencia de potencial en la entrada del amplificador

Tómese $V = V_M - V_N$, con N conectado a tierra. Antes de que comience la rotación, los cuadrantes están apantallados y la resistencia ha descargado el condensador, por lo que

$$q(0) = 0, \quad V(0) = 0.$$

Despreciando la capacidad del sistema de cuadrantes frente a C , la carga asociada al conductor conectado a la entrada es $q + CV$. La carga positiva sale de este conductor a través de la resistencia a un ritmo V/R , de modo que la conservación de la carga da

$$\frac{d}{dt}(q + CV) = -\frac{V}{R},$$

o bien

$$\boxed{C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = -\frac{dq}{dt}}.$$

A medida que los cuadrantes quedan expuestos, sus superficies superiores adquieren carga negativa. Esto deja carga positiva en la placa superior del condensador, por lo que la diferencia de potencial aumenta inicialmente hacia valores positivos.

Del apartado 4,

$$-\frac{dq}{dt} = \begin{cases} +I_0, & 0 < t < T/4, \\ -I_0, & T/4 < t < T/2, \\ +I_0, & T/2 < t < 3T/4, \\ -I_0, & 3T/4 < t < T, \end{cases} \quad I_0 = \frac{4Q_m}{T}.$$

Por tanto, el circuito está excitado por una corriente de onda cuadrada.

Para completar la descripción, sean $\tau = RC$, $B = RI_0$ y $t_k = kT/4$. En el cuarto de vuelta $k = 0, 1, 2, 3$, la diferencia de potencial es

$$V(t) = (-1)^k B + [V(t_k) - (-1)^k B] e^{-(t-t_k)/\tau}.$$

Esta expresión, junto con $V(0) = 0$, especifica la forma de onda continua durante el arranque.

(a) Rotación rápida: $T_a \ll RC$

Durante la primera vuelta, se fuga poca carga a través de R . En la aproximación dominante,

$$C \frac{dV}{dt} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

Utilizando las condiciones iniciales,

$$V(t) \simeq -\frac{q(t)}{C}.$$

Por tanto, la diferencia de potencial consta de dos pulsos triangulares positivos:

t/T_a	0	1/4	1/2	3/4	1
$V/(Q_m/C)$, en la aproximación dominante	0	1	0	1	0

Únanse los valores sucesivos mediante segmentos rectos. La diferencia de potencial máxima es aproximadamente

$$V_a \simeq \frac{Q_m}{C}.$$

Para un valor finito de T_a/RC , los tramos presentan una ligera curvatura, los mínimos se vuelven ligeramente negativos y el segundo máximo positivo es ligeramente inferior al primero. Los triángulos positivos anteriores constituyen la aproximación dominante para la **primera vuelta** solicitada.

(b) Rotación lenta: $T_b \gg RC$

Salvo durante breves transiciones, la corriente del condensador es pequeña y

$$\frac{V}{R} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

Por tanto, la diferencia de potencial se aproxima a niveles alternos

$$V \simeq \pm V_b, \quad V_b = \frac{4RQ_m}{T_b}.$$

La gráfica presenta las siguientes características:

- Parte de cero y aumenta exponencialmente hacia $+V_b$, con constante de tiempo RC .
- Después de $t = T_b/4$, disminuye exponencialmente hacia $-V_b$.
- Después de $t = T_b/2$, aumenta hacia $+V_b$.
- Después de $t = 3T_b/4$, disminuye hacia $-V_b$.

Cada cuarto de vuelta es largo en comparación con RC , por lo que la mayor parte de él corresponde a una meseta casi horizontal. La diferencia de potencial se mantiene continua en los instantes de conmutación. Por ejemplo, inmediatamente después de la primera conmutación,

$$V(t) \simeq -V_b + 2V_b e^{-(t-T_b/4)/(RC)},$$

por lo que pasa por cero aproximadamente $RC \ln 2$ después de dicha conmutación.

Por tanto, el cociente solicitado es

$$\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{Q_m/C}{4RQ_m/T_b} = \frac{T_b}{4RC}.$$

6) Valor numérico de la diferencia de potencial

El área completamente expuesta es

$$A_m = \frac{\pi}{2} (0.07^2 - 0.01^2) = 7.54 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Así,

$$Q_m = \varepsilon_0 E_0 A_m = (8.85 \times 10^{-12})(150)(7.54 \times 10^{-3}) \simeq 1.00 \times 10^{-11} \text{ C}.$$

Los tiempos relevantes son

$$T = \frac{1}{50} = 0.020 \text{ s},$$

$$RC = (20 \times 10^6)(0.01 \times 10^{-6}) = 0.20 \text{ s}.$$

En particular, el tiempo hasta el primer máximo es solo

$$\frac{T}{4} = 0.0050 \text{ s} = 0.025 RC.$$

En consecuencia, la aproximación de rotación rápida da

$$V_{\max} \simeq \frac{Q_m}{C} = \frac{1.00 \times 10^{-11}}{1.00 \times 10^{-8}} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ V.}$$

La corrección debida a la resistencia finita se obtiene de la solución para el primer cuarto de vuelta:

$$V_{\max} = \frac{4RQ_m}{T} \left(1 - e^{-T/(4RC)}\right) = \frac{Q_m}{C} \frac{1 - e^{-0.025}}{0.025} \simeq 0.989 \text{ mV.}$$

Se alcanza en $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$; el segundo máximo positivo es menor.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Fuerzas de un láser sobre un prisma transparente

Tabla de datos generales

Magnitud	Símbolo	Valor
Radio medio de la Tierra	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$
aceleración de la gravedad	g	9.8 m s^{-2}
constante de gravitación universal de Newton	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
permitividad del vacío	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
permeabilidad del vacío	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [sic; valor correcto $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$]
velocidad de la luz en el vacío (o en el aire)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
carga elemental	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
masa del electrón	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
masa del protón	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
constante de Planck	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
constante de Avogadro	N_A	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
constante de Boltzmann	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
constante molar de los gases	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

FUERZAS DE UN LÁSER SOBRE UN PRISMA TRANSPARENTE

Mediante la refracción, un haz láser intenso puede ejercer fuerzas apreciables sobre objetos transparentes pequeños. Para comprobarlo, considérese un pequeño prisma triangular de vidrio con un ángulo en el vértice $A = \pi - 2\alpha$, una base de longitud $2h$ y una anchura w . El prisma tiene un índice de refracción n y una densidad de masa ρ .

Supóngase que este prisma se coloca en un haz láser que se propaga horizontalmente en la dirección x . (En todo este problema, supóngase que el prisma no gira, es decir, que su vértice apunta siempre en sentido opuesto al de propagación del haz láser, sus caras triangulares son

paralelas al plano xy y su base es paralela al plano yz , como se muestra en la Fig. 1.) Tómesse el índice de refracción del aire circundante como $n_{\text{air}} = 1$. Supóngase que las caras del prisma están recubiertas con una capa antirreflectante, de modo que no se produce reflexión.

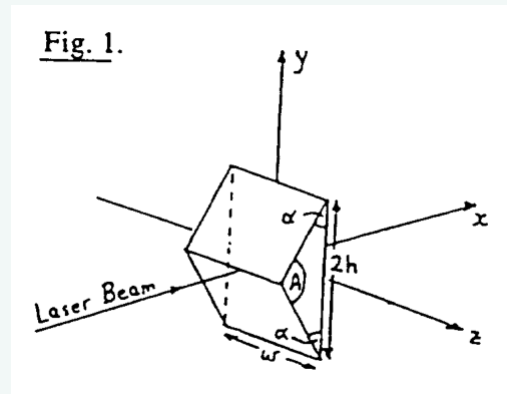


Fig. 1.

El haz láser tiene una intensidad uniforme a lo largo de su anchura en la dirección z , pero que disminuye linealmente con la distancia y al eje x , de modo que alcanza un valor máximo de I_0 en $y = 0$ y se anula en $y = \pm 4h$ (Fig. 2). [La intensidad es la potencia por unidad de área, expresada, por ejemplo, en W m^{-2} .]

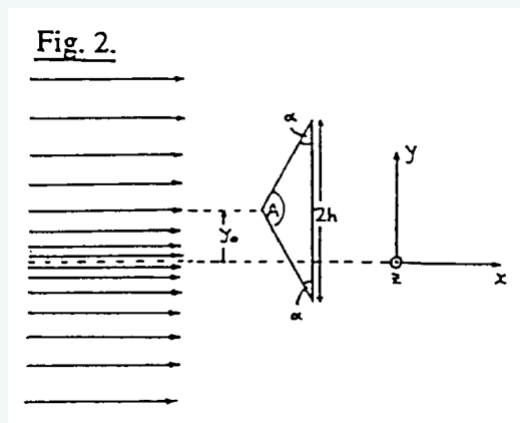


Fig. 2.

1) Escriba las ecuaciones que permiten determinar el ángulo θ (véase la Fig. 3) (en función de α y n) cuando la luz láser incide sobre la cara superior del prisma.

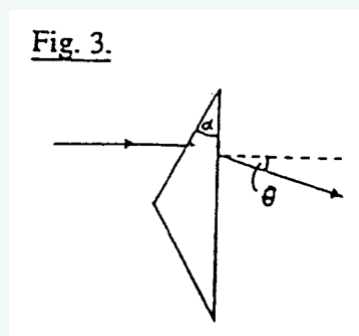


Fig. 3.

2) Exprese, en función de I_0 , θ , h , w e y_0 , las componentes x e y de la fuerza neta que la luz láser ejerce sobre el prisma cuando su vértice está desplazado una distancia y_0 respecto del eje x , donde $|y_0| \leq 3h$.

Represente gráficamente los valores de las componentes horizontal y vertical de la fuerza en función del desplazamiento vertical y_0 .

3) Supóngase que el haz láser tiene una anchura de 1 mm en la dirección z y un espesor de $80 \mu\text{m}$ (en la dirección y). El prisma tiene $\alpha = 30^\circ$, $h = 10 \mu\text{m}$, $n = 1.5$, $w = 1 \text{ mm}$ y $\rho = 2.5 \text{ g cm}^{-3}$.

¿Cuántos vatios de potencia láser se necesitarían para equilibrar la fuerza de la gravedad sobre este prisma (en la dirección $-y$) cuando su vértice se encuentra a una distancia $y_0 = -h/2$ ($= -5 \mu\text{m}$) por debajo del eje del haz láser?

4) Supóngase que este experimento se realiza en ausencia de gravedad, con el mismo prisma y un haz láser de las mismas dimensiones que en (3), pero con $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$.

¿Cuál sería el período de las oscilaciones que se producen cuando se desplaza el prisma y se suelta a una distancia $y = h/20$ del eje central del haz láser?

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

1. Si β es el ángulo de refracción en la cara superior y γ es el ángulo de incidencia en la base,

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad \gamma = \alpha - \beta, \quad \sin \theta = n \sin \gamma.$$

De forma equivalente,

$$\theta = \arcsin \left[\sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \right].$$

2. Definamos

$$u = \frac{y_0}{h}, \quad C_x = \frac{I_0 w h}{4c} (1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0 w h}{4c} \sin \theta.$$

Entonces

$$F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases}$$

$$F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \text{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}$$

La gráfica de la fuerza horizontal es par, con un máximo parabólico central y tramos rectos exteriores. La gráfica de la fuerza vertical es impar y corresponde a una fuerza restauradora, con tramos cuadráticos centrales y tramos constantes exteriores.

3. La **potencia láser total** necesaria es

$$P \simeq 33 \text{ W.}$$

La intensidad máxima correspondiente es $I_0 \simeq 8.3 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}$.

4. La aproximación de pequeñas oscilaciones da

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho ch^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}} \simeq 1.12 \times 10^{-2} \text{ s.}$$

Si se conserva la débil no linealidad a la amplitud especificada $h/20$, se obtiene

$$T \simeq 1.13 \times 10^{-2} \text{ s,}$$

aproximadamente un 1.08% mayor.

Solución

Utilizamos la óptica geométrica, despreciamos la absorción, como corresponde a un prisma transparente, y aplicamos la ausencia de reflexión estipulada. Las fuerzas se calculan al orden dominante en el cociente entre la rapidez del prisma y c .

1) Refracción y ángulo de salida

La cara superior forma un ángulo α con la base vertical. Por tanto, su normal dirigida hacia el interior apunta con un ángulo α por debajo de la horizontal. El rayo incidente horizontal tiene un ángulo de incidencia α .

Sea β el ángulo de refracción medido desde esta normal. La ley de Snell da

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

En consecuencia, el rayo dentro del prisma se propaga con un ángulo

$$\gamma = \alpha - \beta$$

por debajo de la horizontal.

La normal a la cara de salida es horizontal, de modo que γ también es el ángulo de incidencia en ella. Aplicando de nuevo la ley de Snell,

$$n \sin \gamma = \sin \theta.$$

Así,

$$\theta = \arcsin \left[n \sin \left(\alpha - \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} \right) \right].$$

Se obtiene una expresión equivalente desarrollando el seno:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= n(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sin \theta = \sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right).$$

La trayectoria transmitida que se muestra en la Fig. 3 requiere $n \sin \gamma \leq 1$, condición que se cumple con los datos numéricos del problema. Por simetría, la luz que entra por la cara inferior sale con un ángulo θ por encima de la horizontal.

2) Componentes de la fuerza y gráficas

El perfil de intensidad es

$$I(y) = I_0 \left(1 - \frac{|y|}{4h} \right), \quad |y| \leq 4h.$$

Sean P_+ y P_- las potencias que entran por las caras superior e inferior. Cuando el vértice está en y_0 , sus intervalos proyectados perpendicularmente al haz incidente son, respectivamente,

$$[y_0, y_0 + h], \quad [y_0 - h, y_0].$$

Por tanto,

$$P_+ = w \int_{y_0}^{y_0+h} I(y) dy, \quad P_- = w \int_{y_0-h}^{y_0} I(y) dy.$$

El elemento de área aquí es $w dy$, el área proyectada perpendicularmente a la luz incidente. No hace falta ningún factor adicional asociado al ángulo de incidencia.

La luz de potencia P en el aire transporta cantidad de movimiento a razón de P/c . Para la luz que entra por la cara superior, las direcciones incidente y de salida son

$$(1, 0), \quad (\cos \theta, -\sin \theta).$$

La fuerza sobre el prisma es igual al flujo entrante de cantidad de movimiento menos el flujo saliente de cantidad de movimiento:

$$\mathbf{F}_+ = \frac{P_+}{c} (1 - \cos \theta, \sin \theta).$$

Análogamente,

$$\mathbf{F}_- = \frac{P_-}{c} (1 - \cos \theta, -\sin \theta).$$

Sumando,

$$\boxed{F_x = \frac{1 - \cos \theta}{c} (P_+ + P_-), \quad F_y = \frac{\sin \theta}{c} (P_+ - P_-).}$$

Para calcular las potencias, tomemos $u = y_0/h$. Una primitiva del perfil de intensidad adimensional es

$$J(v) = v - \frac{v|v|}{8}, \quad J'(v) = 1 - \frac{|v|}{4}.$$

En consecuencia,

$$\frac{P_+}{I_0 w h} = J(u+1) - J(u), \quad \frac{P_-}{I_0 w h} = J(u) - J(u-1).$$

Para $|u| \leq 1$, el prisma se extiende a ambos lados del eje del haz. Al evaluar estas expresiones se obtiene

$$P_+ + P_- = \frac{I_0 w h}{4} (7 - u^2),$$

$$P_+ - P_- = -\frac{I_0 w h}{4} u(2 - |u|).$$

Para $1 \leq |u| \leq 3$, todo el prisma queda a un lado del eje, donde la intensidad varía linealmente:

$$P_+ + P_- = \frac{I_0 w h}{4} (8 - 2|u|),$$

$$P_+ - P_- = -\frac{I_0 w h}{4} \operatorname{sgn}(u).$$

Así, con

$$C_x = \frac{I_0 w h}{4c} (1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0 w h}{4c} \sin \theta,$$

las fuerzas solicitadas son

$$F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases} \quad F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \operatorname{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}$$

Los valores de las gráficas son:

$u = y_0/h$	F_x/C_x	F_y/C_y
-3	2	1
-2	4	1
-1	6	1
-1/2	6.75	0.75
0	7	0
1/2	6.75	-0.75
1	6	-1
2	4	-1
3	2	-1

Para la gráfica de la fuerza horizontal, trace una parábola cóncava hacia abajo entre $u = -1$ y $u = 1$, con un máximo de $7C_x$ en el origen. Continúe con segmentos rectos hasta $2C_x$ en $u = \pm 3$. La fuerza se mantiene positiva en todo el intervalo especificado.

Para la gráfica de la fuerza vertical, trace el valor constante $+C_y$ desde $u = -3$ hasta -1 , y después el tramo cuadrático que decrece hasta cero en $u = 0$. Refleje este tramo respecto del origen para llegar a $-C_y$ en $u = 1$, y continúe luego horizontalmente hasta $u = 3$. Su pendiente en el origen es $-2C_y/h$. En ambas gráficas de fuerza, los tramos se unen con pendientes continuas en $u = \pm 1$.

La fuerza vertical es restauradora: un prisma situado por debajo del eje recibe más luz en su cara superior y es empujado hacia arriba; por encima del eje, es empujado hacia abajo.

3) Potencia láser necesaria para equilibrar la gravedad

La distancia del vértice a la base es

$$d = h \tan \alpha.$$

El volumen y la masa son, por tanto,

$$V = \frac{1}{2} (2h) d w = h^2 w \tan \alpha, \quad m = \rho h^2 w \tan \alpha.$$

Utilizando unidades del SI,

$$h = 10^{-5} \text{ m}, \quad w = 10^{-3} \text{ m}, \quad \rho = 2.5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

de modo que

$$m = 1.4434 \times 10^{-10} \text{ kg}, \quad mg = 1.4145 \times 10^{-9} \text{ N}.$$

Para $\alpha = 30^\circ$ y $n = 1.5$,

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\sin 30^\circ}{1.5} \right) = 19.471^\circ,$$

$$\gamma = 10.529^\circ, \quad \theta = 15.908^\circ, \quad \sin \theta = 0.274094.$$

En $y_0 = -h/2$, tenemos $u = -1/2$, lo que da

$$F_y = \frac{3}{4} C_y = \frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c}.$$

El equilibrio vertical requiere

$$\frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c} = \rho h^2 w \tan \alpha g.$$

Por tanto,

$$I_0 = \frac{16\rho g h c \tan \alpha}{3 \sin \theta} = 8.2571 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}.$$

La potencia necesaria es la potencia de **todo el haz**. Su espesor $80 \mu\text{m}$ es igual a $8h$, y el área bajo su perfil triangular de intensidad es $4hI_0$. Así,

$$P = w \int_{-4h}^{4h} I(y) dy = 4hwI_0.$$

Al sustituir se obtiene

$$P = 4(10^{-5})(10^{-3})(8.2571 \times 10^8) = 33.03 \text{ W}.$$

Por tanto,

$$\boxed{P \simeq 33 \text{ W}.}$$

Esto equilibra la gravedad en la dirección y , como se pide. La fuerza óptica horizontal sigue siendo positiva.

4) Período de oscilación sin gravedad

Durante toda la oscilación indicada, $|y_0| \leq h/20 < h$. La expresión de la fuerza en la región central puede escribirse como

$$F_y = -\frac{I_0 w \sin \theta}{2c} y_0 \left(1 - \frac{|y_0|}{2h} \right).$$

Definamos

$$K = \frac{I_0 w \sin \theta}{2c}.$$

Para una amplitud $a = h/20$, el factor no lineal difiere de la unidad, como máximo, en

$$\frac{a}{2h} = \frac{1}{40} = 2.5\%.$$

Por tanto, la aproximación de orden dominante es un movimiento armónico simple:

$$m\ddot{y}_0 = -Ky_0, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}.$$

Utilizando la masa obtenida anteriormente,

$$\omega_0^2 = \frac{I_0 \sin \theta}{2\rho ch^2 \tan \alpha},$$

y

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho ch^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}}.$$

Para $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$,

$$K = 4.5682 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-1}, \quad \omega_0 = 562.58 \text{ s}^{-1},$$

de modo que

$$T_0 = 0.0111685 \text{ s} \approx 11.2 \text{ ms.}$$

La corrección por amplitud finita también puede calcularse a partir de la fuerza exacta. Tomando la energía potencial nula en el origen,

$$U(y_0) = \frac{K}{2}y_0^2 - \frac{K}{6h}|y_0|^3.$$

Al soltar el prisma desde el reposo en $y_0 = a$, se obtiene

$$\frac{1}{2}m\dot{y}_0^2 = U(a) - U(y_0).$$

Por simetría, el período es cuatro veces el tiempo de recorrido desde 0 hasta a :

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{K}} \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2 - (a^3 - y^3)/(3h)}}.$$

Haciendo $s = y/a$,

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2 - \frac{a}{3h}(1 - s^3)}}.$$

Para $a/h = 1/20$, la evaluación numérica da

$$\frac{T}{T_0} = 1.01079,$$

y, por tanto,

$$T = 0.0112890 \text{ s} \approx 11.3 \text{ ms.}$$

El período es, por tanto, de unos 0.011 s; la aproximación de pequeñas oscilaciones tiene una precisión de aproximadamente el 1.1% a la amplitud especificada.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Haz de electrones

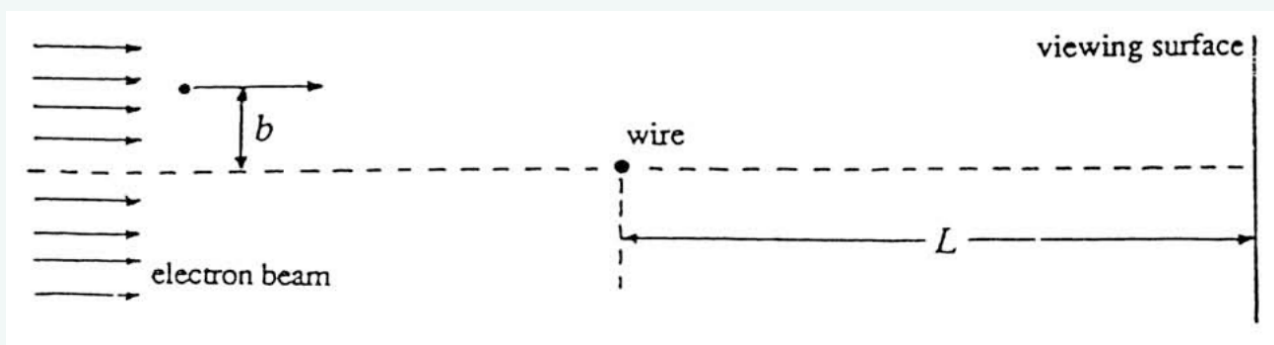
Información general tabulada

Magnitud	Símbolo	Valor
Radio medio de la Tierra	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m.}$
aceleración de la gravedad	g	$9.8 \text{ m s}^{-2}.$
constante de gravitación universal de Newton	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}.$
permitividad del vacío	ε_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}.$
permeabilidad del vacío	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [sic; valor correcto $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$].
velocidad de la luz en el vacío (o en el aire)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$
carga elemental	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C.}$
masa del electrón	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg.}$
masa del protón	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
constante de Planck	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s.}$
constante de Avogadro	N_A	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$
constante de Boltzmann	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}.$
constante molar de los gases	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$

Problema teórico 3

HAZ DE ELECTRONES

Una tensión de aceleración V_0 produce un haz uniforme y paralelo de electrones de alta energía. Los electrones pasan junto a un alambre de cobre delgado, largo y cargado positivamente, tensado perpendicularmente a la dirección original del haz, como se muestra en la figura. El símbolo b denota la distancia a la que un electrón pasaría del alambre si este no estuviera cargado. A continuación, los electrones se dirigen hacia una pantalla (superficie de observación) situada a una distancia L ($\gg b$) más allá del alambre, como se muestra. Inicialmente, el haz se extiende hasta distancias $\pm b_{\text{max}}$ con respecto al eje del alambre. Tanto la anchura del haz como la longitud del alambre pueden considerarse infinitas en la dirección perpendicular al papel.



El alambre cargado se extiende perpendicularmente al plano del papel. El esquema no está a escala.

A continuación se proporcionan algunos datos numéricos; encontrará otros datos numéricos en la tabla al principio del examen:

radio del alambre	$= r_0 =$	10^{-6} m
valor máximo de b	$= b_{\text{max}} =$	10^{-4} m
carga eléctrica por unidad de longitud del alambre	$= q_{\text{linear}} =$	$4.4 \times 10^{-11} \text{ C m}^{-1}$
tensión de aceleración	$= V_0 =$	$2 \times 10^4 \text{ V}$
distancia del alambre a la pantalla de observación	$= L =$	0.3 m.

Nota: Para los apartados 2 - 4, utilice aproximaciones razonables que permitan obtener soluciones analíticas y numéricas.

1) Calcule el campo eléctrico $\mathbf{E}$ producido por el alambre. Represente esquemáticamente el módulo de $\mathbf{E}$ en función de la distancia al eje del alambre.

2) Utilice la física clásica para calcular la desviación angular de un electrón. Hágalo para valores del parámetro b tales que el electrón no choque con el alambre. Sea θ_{final} el ángulo (pequeño) entre la velocidad inicial del electrón y su velocidad cuando alcanza la superficie de observación. Calcule, por tanto, θ_{final} .

3) Calcule y represente esquemáticamente el patrón de impactos (es decir, la distribución de intensidad) sobre la pantalla de observación que predice la física clásica.

4) La física cuántica predice una diferencia importante en la distribución de intensidad (con respecto a lo que predice la física clásica). Represente esquemáticamente el patrón de la predicción cuántica y proporcione detalles cuantitativos.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea y la coordenada transversal con signo sobre la pantalla, con $y = 0$ directamente frente al alambre, y sea I_0 la intensidad del haz incidente.

1. El campo es radial y está dirigido hacia fuera:

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0, \\ \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}, & r > r_0. \end{cases}$$

Su módulo salta de cero a $7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$ en la superficie y después disminuye como $1/r$.

2. Los electrones que pasan por ambos lados se desvían hacia el eje aproximadamente el mismo ángulo:

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0} = 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

3. Teniendo en cuenta el radio finito del alambre, el patrón clásico es

$$I_{\text{cl}}(y) \simeq \begin{cases} 2I_0, & |y| < 17.6 \mu\text{m}, \\ I_0, & 17.6 \mu\text{m} < |y| < 81.4 \mu\text{m}, \\ 0, & |y| > 81.4 \mu\text{m}. \end{cases}$$

Por tanto, la banda central de intensidad doble tiene una anchura de unos $35 \mu\text{m}$, y toda la región iluminada tiene una anchura de unos $163 \mu\text{m}$.

4. Para electrones coherentes, la región central de superposición contiene franjas de interferencia:

$$\lambda_{\text{dB}} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}, \quad d \simeq \frac{\lambda_{\text{dB}}}{2\theta_{\text{final}}} = 7.0 \times 10^{-8} \text{ m} = 70 \text{ nm}.$$

Lejos de los bordes de la envolvente,

$$I_{\text{q}}(y) \simeq 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right)$$

en la región de superposición. El centro es brillante; los máximos sucesivos alcanzan $4I_0$, y los mínimos llegan a cero. Hay aproximadamente 5.1×10^2 períodos de las franjas a lo ancho de la región de superposición. Las zonas laterales permanecen aproximadamente a I_0 .

Solución

1) Campo eléctrico

El cobre es un conductor, por lo que el campo electrostático en el interior del alambre es nulo. Fuera de un alambre que puede considerarse infinito, la simetría cilíndrica exige un campo radial que dependa únicamente de la distancia r a su eje.

Aplicamos la ley de Gauss a una superficie cilíndrica coaxial de radio $r > r_0$ y longitud ℓ :

$$E(r)(2\pi r\ell) = \frac{q_{\text{linear}}\ell}{\epsilon_0}.$$

Por tanto,

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}.$$

El sentido es hacia fuera porque el alambre está cargado positivamente.

Numéricamente,

$$\frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{2\pi(8.85 \times 10^{-12})} = 0.791 \text{ V},$$

de modo que

$$E(r_0^+) = \frac{0.791}{10^{-6}} \simeq 7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}.$$

La gráfica solicitada coincide con el eje horizontal para $0 \leq r < r_0$, presenta un salto hacia arriba en $r = r_0$ y, a partir de ahí, sigue una curva decreciente $1/r$, acercándose asintóticamente a cero. Por ejemplo,

$$E(10r_0) = 7.9 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad E(100r_0) = 7.9 \times 10^3 \text{ V m}^{-1}.$$

2) Desviación angular

Tomamos el eje x en la dirección del haz incidente y el eje y perpendicular a él en el plano de la figura. El alambre pasa por $x = y = 0$.

Utilizamos la relación no relativista para la energía:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV_0, \quad v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_e}} \simeq 8.4 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

Aquí $eV_0/(m_e c^2) \simeq 0.039$, de modo que el tratamiento no relativista es una aproximación razonable para este problema.

Calculamos el pequeño impulso transversal a lo largo de la trayectoria sin desviación $y = b$, tomando v como constante. Esto es coherente con el pequeño potencial del alambre: la diferencia de potencial entre r_0 y L es de solo

$$\Phi(r_0) - \Phi(L) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{L}{r_0}\right) \simeq 10 \text{ V},$$

mucho menor que $V_0 = 2 \times 10^4 \text{ V}$.

Para un electrón que pasa por encima del alambre, $b > 0$, la fuerza transversal es

$$F_y = -eE_y = -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} \frac{b}{x^2 + b^2}.$$

Puesto que $dt = dx/v$, la variación de la cantidad de movimiento transversal hasta que el electrón alcanza $x = L$ es aproximadamente

$$\begin{aligned} \Delta p_y &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^L F_y dx \\ &= -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 v} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{L}{b}\right) \right]. \end{aligned}$$

El límite inicial supone que el haz inicial se especifica a una distancia del alambre suficientemente grande en comparación con b .

Para una desviación pequeña,

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{|\Delta p_y|}{m_e v}.$$

Utilizando $m_e v^2 = 2eV_0$,

$$\theta_{\text{final}}(b) \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\pi\epsilon_0 V_0} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{L}{b}\right) \right].$$

Como $L \gg b$, el corchete es aproximadamente π , lo que da

$$\boxed{\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0}.$$

Así, con esta precisión, la desviación es independiente del parámetro de impacto:

$$\theta_{\text{final}} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{4(8.85 \times 10^{-12})(2 \times 10^4)} \simeq 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

Incluso para $b = b_{\text{max}}$, la corrección en el corchete debida a la distancia finita a la pantalla es de solo aproximadamente 10^{-4} en términos relativos.

La mitad superior del haz se desvía hacia abajo; la mitad inferior se desvía hacia arriba. Dentro de la misma aproximación, los electrones transmitidos tienen $b > r_0$. Se desprecia el pequeño cambio en el valor límite para la colisión causado por la atracción.

3) Distribución clásica de intensidad

Escribimos

$$\alpha = \theta_{\text{final}}, \quad a = L\alpha \simeq 18.6 \mu\text{m}.$$

Como $L \gg b_{\text{max}}$, puede considerarse que la desviación se produce cerca del alambre. Por tanto, un electrón que incide a una distancia b por encima del eje llega a

$$y = b - a,$$

mientras que uno que incide a la misma distancia por debajo llega a

$$y = -b + a.$$

Solo se transmite la parte con $r_0 < b < b_{\text{max}}$. En consecuencia, las dos porciones transmitidas ocupan los siguientes intervalos de la pantalla:

$$\text{porción incidente superior: } r_0 - a < y < b_{\text{max}} - a,$$

$$\text{porción incidente inferior: } -b_{\text{max}} + a < y < a - r_0.$$

Numéricamente, estos son

$$-17.6 < y < 81.4 \mu\text{m}$$

y

$$-81.4 < y < 17.6 \mu\text{m},$$

respectivamente.

Para cada porción, la correspondencia cumple $|dy/db| = 1$. Por tanto, la conservación del flujo de electrones da una intensidad I_0 donde llega una sola porción, y $2I_0$ donde llegan ambas.

Definimos

$$w = a - r_0 \simeq 17.6 \mu\text{m}, \quad Y = b_{\text{max}} - a \simeq 81.4 \mu\text{m}.$$

Entonces

$$I_{\text{cl}}(y) = \begin{cases} 2I_0, & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

La representación es simétrica respecto a $y = 0$. Partiendo de la izquierda, la intensidad salta de cero a I_0 en $-81.4 \mu\text{m}$, aumenta a $2I_0$ en $-17.6 \mu\text{m}$, disminuye a I_0 en $+17.6 \mu\text{m}$ y vuelve a cero en $+81.4 \mu\text{m}$. Las bandas se extienden uniformemente en dirección paralela al alambre.

Sus anchuras son

anchura de la superposición central = $2(a - r_0) \simeq 35.3 \mu\text{m}$,

anchura de cada zona lateral = $b_{\text{max}} - 2a + r_0 \simeq 63.7 \mu\text{m}$.

No hay una sombra geométrica central: las dos porciones desviadas se superponen.

Como comprobación del flujo,

$$\int I_{\text{cl}}(y) dy = 2I_0(b_{\text{max}} - r_0),$$

que es exactamente el flujo incidente excluyendo los electrones interceptados por el alambre en esta aproximación.

4) Distribución cuántica de intensidad

Para un haz incidente ideal, monoenergético y coherente, las porciones que pasan por lados opuestos del alambre interfieren donde se superponen.

La longitud de onda de de Broglie del electrón es

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e e V_0}},$$

de modo que

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31})(1.60 \times 10^{-19})(2 \times 10^4)}} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

Dentro de la región de superposición, las dos ondas aproximadamente planas se propagan formando ángulos $+\alpha$ y $-\alpha$ con la dirección original. Por tanto, las componentes transversales de sus vectores de onda son $+k \sin \alpha$ y $-k \sin \alpha$, donde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{dB}}}.$$

La simetría de reflexión hace que sus fases sean iguales en $y = 0$. Su diferencia de fase en la coordenada y de la pantalla es

$$\Delta\phi(y) = 2ky \sin \alpha.$$

Cada onda por separado contribuye con una intensidad I_0 , de modo que

$$\begin{aligned} I_{\text{q}}(y) &= I_0 + I_0 + 2I_0 \cos \Delta\phi \\ &= 4I_0 \cos^2(ky \sin \alpha). \end{aligned}$$

La separación entre franjas es, por tanto,

$$d = \frac{\lambda_{\text{dB}}}{2 \sin \alpha} \simeq \frac{\lambda_{\text{dB}}}{2\alpha},$$

lo que da

$$d \simeq 6.99 \times 10^{-8} \text{ m} \simeq 70 \text{ nm}.$$

Con la precisión de la aproximación de envolvente geométrica,

$$I_{\text{q}}(y) \simeq \begin{cases} 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right), & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

La representación solicitada tiene la misma envolvente amplia que el patrón clásico, pero la meseta central se sustituye por franjas muy próximas entre sí:

- Las franjas brillantes se encuentran en $y = nd$, con intensidad $4I_0$; n es un número entero.
- Las franjas oscuras se encuentran en $y = (n + \frac{1}{2})d$, con intensidad nula.
- La franja central en $y = 0$ es brillante.
- Las franjas son rectas y paralelas al alambre.
- Su intensidad media es $2I_0$, igual a la intensidad central clásica.

El número aproximado de períodos de las franjas a lo ancho de la región de superposición es

$$N \simeq \frac{2w}{d} = \frac{35.3 \times 10^{-6}}{6.99 \times 10^{-8}} \simeq 5.1 \times 10^2.$$

La difracción suaviza los límites de la envolvente, por lo que la expresión por tramos se aplica lejos de esos bordes. La escala transversal de difracción pertinente es del orden de

$$\sqrt{\lambda_{dB}L} \simeq 1.6 \mu\text{m}.$$

Un detector que no pueda resolver las franjas de 70 nm mide su promedio y recupera aproximadamente la distribución clásica.

La solución se comprobó con la solución oficial.