

IPhO 1993

Theorieaufgaben und Lösungen · Williamsburg, Virginia, USA · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1993/

Aufgabe 1: Atmosphärische Elektrizität

Allgemeine tabellarische Angaben

Größe	Symbol	Wert
Mittlerer Erdradius	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$.
Erdbeschleunigung	g	9.8 m s^{-2} .
Newtonsche Gravitationskonstante	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.
Permittivität des Vakuums	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$.
Permeabilität des Vakuums	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [sic; korrekter Wert $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$].
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (oder in Luft)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
Elementarladung	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$.
Elektronenmasse	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$.
Protonenmasse	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.
Plancksches Wirkungsquantum	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$.
Avogadro-Konstante	N_A	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
Boltzmann-Konstante	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.
Molare Gaskonstante	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Theoretische Aufgabe 1

ATMOSPHÄRISCHE ELEKTRIZITÄT

Aus elektrostatischer Sicht kann die Erdoberfläche als guter Leiter betrachtet werden. Sie trägt eine bestimmte Gesamtladung Q_0 und besitzt eine mittlere Flächenladungsdichte σ_0 .

1) Bei schönem Wetter herrscht an der Erdoberfläche ein nach unten gerichtetes elektrisches Feld E_0 mit einer Stärke von etwa 150 V/m . Bestimmen Sie den Betrag der Flächenladungsdichte der Erde und den Betrag der auf der Erdoberfläche befindlichen Gesamtladung.

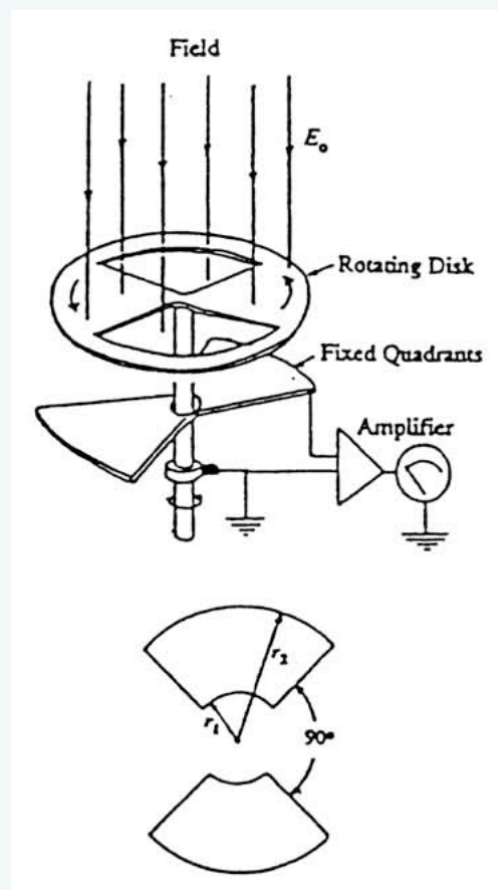
2) Der Betrag des nach unten gerichteten elektrischen Feldes nimmt mit der Höhe ab und beträgt in einer Höhe von 100 m etwa 100 V/m . Berechnen Sie die mittlere Nettoladung pro m^3 der Atmosphäre zwischen der Erdoberfläche und einer Höhe von 100 m .

3) Die in (2) berechnete Nettoladungsdichte ergibt sich tatsächlich daraus, dass pro Volumeneinheit nahezu gleich viele einfach positiv und einfach negativ geladene Ionen vorhanden sind (n_+ und n_-). In der Nähe der Erdoberfläche gilt bei schönem Wetter $n_+ \approx n_- \approx 6 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$. Diese Ionen bewegen sich unter dem Einfluss des vertikalen elektrischen Feldes. Ihre Geschwindigkeit ist proportional zur Feldstärke:

$$v \approx 1.5 \times 10^{-4} \cdot E,$$

wobei v in m/s und E in V/m angegeben wird. Wie lange würde es dauern, bis die Bewegung der atmosphärischen Ionen die Hälfte der Ladung auf der Erdoberfläche neutralisiert hätte, wenn keine anderen Prozesse (z. B. Blitze) diese Ladung aufrechterhielten?

4) Eine Möglichkeit, das atmosphärische elektrische Feld und damit σ_0 zu messen, bietet die in der Abbildung dargestellte Anordnung. Zwei von der Erde isolierte, aber miteinander verbundene Metallquadranten sind unmittelbar unter einer geerdeten, gleichförmig rotierenden Scheibe angebracht, in die zwei quadrantenförmige Öffnungen geschnitten sind. (In der Abbildung ist der Abstand übertrieben groß dargestellt, um die Anordnung zu verdeutlichen.) Zweimal pro Umdrehung sind die isolierten Quadranten dem Feld vollständig ausgesetzt und anschließend ($1/4$ einer Umlaufzeit später) vollständig dagegen abgeschirmt. Es sei T die Umlaufzeit, und r_1 und r_2 seien wie dargestellt der Innen- und der Außenradius der isolierten Quadranten.



Wählen Sie als $t = 0$ einen Zeitpunkt, zu dem die isolierten Quadranten vollständig abgeschirmt sind.

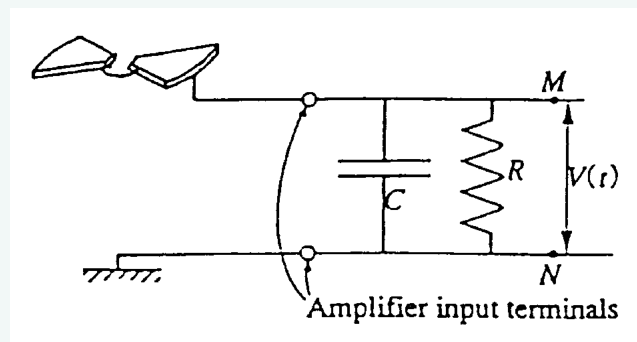
Leiten Sie Ausdrücke her, die die auf der Oberseite der isolierten Quadranten induzierte Gesamtladung $q(t)$ als Funktion der Zeit zwischen $t = 0$ und $t = T/2$ angeben, und skizzieren Sie diesen Verlauf.

[Die Auswirkungen des atmosphärischen Ionenstroms können in dieser Situation vernachlässigt werden.]

(5) Die in (4) beschriebene Anordnung wird an einen Verstärker angeschlossen, dessen Eingangsschaltung einer Parallelschaltung aus einem Kondensator C und einem Widerstand R entspricht. (Sie können annehmen, dass die Kapazität der Quadrantenanordnung gegenüber C vernachlässigbar ist.) Skizzieren Sie den Verlauf der Spannungsdifferenz V zwischen den Punkten M und N als Funktion von t während einer Umdrehung der Scheibe, unmittelbar nachdem diese mit der Umlaufzeit T in Rotation versetzt wurde, falls:

a) $T = T_a \ll CR$;

b) $T = T_b \gg CR$.



[Nehmen Sie an, dass C und R feste Werte haben; nur T ändert sich zwischen den Fällen (a) und (b).]

Leiten Sie einen Ausdruck für das näherungsweise Verhältnis V_a/V_b der größten Werte von $V(t)$ in den Fällen (a) und (b) her.

6) Nehmen Sie an, dass $E_0 = 150 \text{ V/m}$, $r_1 = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 7 \text{ cm}$, $C = 0.01 \mu\text{F}$, $R = 20 \text{ M}\Omega$ gilt und die Scheibe mit 50 Umdrehungen pro Sekunde in Rotation versetzt wird.

Wie groß ist in diesem Fall näherungsweise der größte Wert von V während einer Umdrehung?

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Es sei $V = V_M - V_N$. Für die Teile 4–6 definieren wir die vollständig freiliegende Fläche und den Betrag der auf ihr induzierten Ladung durch

$$A_m = \frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2), \quad Q_m = \epsilon_0 E_0 A_m > 0.$$

1. Die Ladung auf der Erdoberfläche ist negativ:

$$\sigma_0 \simeq -1.3 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}, \quad Q_0 \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

Die gesuchten Beträge sind die Absolutwerte.

2. Die mittlere atmosphärische Ladungsdichte beträgt

$$\bar{\rho} \simeq +4.4 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

3. Berücksichtigt man nur die an der Oberfläche ankommenden positiven Ionen und nimmt deren Konzentration als näherungsweise konstant an, so gilt

$$t_{1/2} = \frac{\varepsilon_0 \ln 2}{en_+(1.5 \times 10^{-4})} \simeq 4.3 \times 10^2 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

4. Die auf der Oberseite induzierte Ladung ist

$$q(t) = \begin{cases} -Q_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -Q_m \left(2 - \frac{4t}{T}\right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Ihr Graph verbindet $(0, 0)$, $(T/4, -Q_m)$ und $(T/2, 0)$ durch Geraden und wiederholt sich alle $T/2$.

5. Für die erste Umdrehung, ausgehend von $V(0) = 0$: - **(a)** $V \simeq -q/C$: zwei positive Dreiecksimpulse mit jeweils der Höhe

$$V_a \simeq \frac{Q_m}{C}.$$

- **(b)** V wechselt zwischen näherungsweise $+V_b$ und $-V_b$, mit exponentiellen Übergängen mit der Zeitkonstante RC , wobei

$$V_b \simeq \frac{4RQ_m}{T_b}.$$

Somit gilt

$$\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{T_b}{4RC}.$$

6. Die größte Spannung während der ersten Umdrehung beträgt

$$V_{\max} \simeq 1.0 \times 10^{-3} \text{ V} = 1.0 \text{ mV}.$$

Unter Berücksichtigung des endlichen Widerstands ergibt sich 0.989 mV , erreicht bei $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$.

Lösung

1) Ladung auf der Erdoberfläche

Das elektrische Feld im Inneren eines Leiters im elektrostatischen Gleichgewicht ist null. Wendet man das gaußsche Gesetz auf ein kleines flaches zylindrisches Volumen an, das die Oberfläche durchsetzt, erhält man

$$E_{\perp, \text{outside}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0},$$

wobei die Normale aus dem Leiter heraus zeigt. Da das Feld nach unten in die Erde hinein gerichtet ist, gilt

$$\sigma_0 = -\varepsilon_0 E_0.$$

Damit ergibt sich

$$\sigma_0 = -(8.85 \times 10^{-12})(150) = -1.3275 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}.$$

Nähert man die Erde durch eine Kugel an und verwendet diesen Wert als mittlere Flächenladungsdichte, so erhält man

$$Q_0 = 4\pi R_E^2 \sigma_0 = -4\pi(6.4 \times 10^6)^2(1.3275 \times 10^{-9}) \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

Der Betrag der Flächenladungsdichte beträgt somit näherungsweise 1.3 nC m^{-2} , und der Betrag der Gesamtladung beträgt näherungsweise $6.8 \times 10^5 \text{ C}$.

2) Atmosphärische Raumladung

Die Koordinate z nehme nach oben zu. Die vorzeichenbehafteten vertikalen Feldkomponenten in den beiden Höhen sind

$$E_z(0) = -150 \text{ V/m}, \quad E_z(100 \text{ m}) = -100 \text{ V/m}.$$

Über eine Höhe von 100 m ist die Erdkrümmung vernachlässigbar, da $100/R_E \ll 1$. Das gaußsche Gesetz liefert daher für eine vertikale Säule mit der horizontalen Querschnittsfläche A

$$\bar{\rho}Ah = \varepsilon_0 A [E_z(h) - E_z(0)].$$

Folglich gilt

$$\bar{\rho} = \varepsilon_0 \frac{-100 - (-150)}{100} = (8.85 \times 10^{-12})(0.50) = 4.425 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

Die Ladung ist **positiv**, im Einklang damit, dass das nach unten gerichtete Feld mit zunehmender Höhe schwächer wird.

3) Zeit zur Neutralisierung der Hälfte der Oberflächenladung

Die Erde ist negativ geladen. Positive Ionen driften nach unten und können ihre Oberfläche erreichen; negative Ionen driften nach oben. Der Strom, der die Oberflächenladung neutralisiert, enthält daher **nur den Beitrag der positiven Ionen**.

Wir schreiben die Ionenbeweglichkeit als

$$\mu = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad v = \mu E.$$

Nimmt man bei dieser Abschätzung der Drift an, dass die angegebene oberflächennahe Konzentration n_+ näherungsweise konstant bleibt, so beträgt die pro Flächeneinheit und Zeiteinheit ankommende positive Ladung

$$j_+ = en_+v = en_+\mu E.$$

Es bezeichne $S(t) = |\sigma(t)|$ den Betrag der verbleibenden negativen Flächenladungsdichte. Die Randbedingung am Leiter liefert

$$E(t) = \frac{S(t)}{\varepsilon_0}.$$

Da jedes ankommende positive Ion S verringert, gilt

$$\frac{dS}{dt} = -j_+ = -\frac{en_+\mu}{\varepsilon_0} S.$$

Die Entladung verläuft daher exponentiell:

$$S(t) = S(0)e^{-t/\tau_+}, \quad \tau_+ = \frac{\varepsilon_0}{en_+\mu}.$$

Numerisch ergibt sich

$$en_+\mu = (1.60 \times 10^{-19})(6 \times 10^8)(1.5 \times 10^{-4}) = 1.44 \times 10^{-14} \text{ S m}^{-1},$$

und

$$\tau_+ = \frac{8.85 \times 10^{-12}}{1.44 \times 10^{-14}} \simeq 615 \text{ s}.$$

Setzt man $S(t_{1/2}) = S(0)/2$, so folgt

$$t_{1/2} = \tau_+ \ln 2 \simeq 426 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

Würde man die Leitfähigkeit der nach oben driftenden negativen Ionen hinzuzählen, würde man fälschlicherweise einen Strom berücksichtigen, der nicht in die Erdoberfläche eintritt.

4) Induzierte Ladung auf den Quadranten

Wir vernachlässigen Randfelder und nehmen die Abschirmung überall dort als vollständig an, wo die geerdete Scheibe die Quadranten bedeckt. Auf einer freiliegenden Oberseite erfordert das nach unten gerichtete Feld die Flächenladungsdichte

$$\sigma_{\text{upper}} = -\varepsilon_0 E_0.$$

Die Gesamtfläche der beiden Kreisringquadranten beträgt

$$A_m = 2 \left[\frac{\pi}{4} (r_2^2 - r_1^2) \right] = \frac{\pi}{2} (r_2^2 - r_1^2).$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe ist

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Während der ersten Viertelumdrehung legt jede Öffnung einen Winkelbereich der Breite $\theta = \omega t$ frei. Die gesamte freiliegende Fläche ist daher

$$A(t) = 2 \left[\frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \theta \right] = \frac{2\pi(r_2^2 - r_1^2)}{T} t, \quad 0 \leq t \leq T/4.$$

Sie erreicht bei $T/4$ den Wert A_m und nimmt anschließend mit derselben Rate bis auf null bei $T/2$ ab. Somit gilt

$$A(t) = \begin{cases} A_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ A_m \left(2 - \frac{4t}{T} \right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Wegen $q(t) = -\varepsilon_0 E_0 A(t)$ folgt

$$q(t) = \begin{cases} -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} t, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} \left(\frac{T}{2} - t \right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

Die Skizze zeigt einen nach unten gerichteten Dreiecksimpuls: Er beginnt bei null, fällt linear bis auf $-Q_m$ bei $T/4$ und steigt dann linear bis auf null bei $T/2$. Pro Umdrehung treten zwei identische Impulse auf.

Hier ist q die Ladung auf der **Oberseite**. Eine isolierte Quadrantenanordnung kann diese Oberflächenladung durch Umverteilung ihrer vorhandenen Ladung annehmen.

5) Spannung am Verstärkereingang

Es sei $V = V_M - V_N$, wobei N geerdet ist. Vor Beginn der Rotation sind die Quadranten abgeschirmt, und der Widerstand hat den Kondensator entladen, sodass

$$q(0) = 0, \quad V(0) = 0.$$

Vernachlässigt man die Kapazität der Quadrantenanordnung gegenüber C , so ist die zum angeschlossenen Eingangsleiter gehörende Ladung $q + CV$. Positive Ladung verlässt diesen Leiter durch den Widerstand mit der Rate V/R , sodass die Ladungserhaltung ergibt:

$$\frac{d}{dt}(q + CV) = -\frac{V}{R},$$

oder

$$\boxed{C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = -\frac{dq}{dt}}.$$

Wenn die Quadranten freigelegt werden, nehmen ihre Oberseiten negative Ladung an. Dadurch bleibt positive Ladung auf der oberen Kondensatorplatte zurück, sodass die Spannung zunächst zu positiven Werten ansteigt.

Aus Teil 4 folgt

$$-\frac{dq}{dt} = \begin{cases} +I_0, & 0 < t < T/4, \\ -I_0, & T/4 < t < T/2, \\ +I_0, & T/2 < t < 3T/4, \\ -I_0, & 3T/4 < t < T, \end{cases} \quad I_0 = \frac{4Q_m}{T}.$$

Die Schaltung wird somit durch einen Rechteckstrom angeregt.

Der Vollständigkeit halber setzen wir $\tau = RC$, $B = RI_0$ und $t_k = kT/4$. Während der Viertelumdrehung $k = 0, 1, 2, 3$ beträgt die Spannung

$$V(t) = (-1)^k B + [V(t_k) - (-1)^k B] e^{-(t-t_k)/\tau}.$$

Dieser Ausdruck legt zusammen mit $V(0) = 0$ den stetigen Spannungsverlauf beim Anlaufen fest.

(a) Schnelle Rotation: $T_a \ll RC$

Während der ersten Umdrehung fließt nur wenig Ladung durch R ab. In führender Ordnung gilt

$$C \frac{dV}{dt} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich

$$V(t) \simeq -\frac{q(t)}{C}.$$

Die Spannung besteht daher aus zwei positiven Dreiecksimpulsen:

t/T_a	0	1/4	1/2	3/4	1
$V/(Q_m/C)$, in führender Ordnung	0	1	0	1	0

Verbinden Sie aufeinanderfolgende Einträge durch Geraden. Die größte Spannung beträgt näherungsweise

$$V_a \simeq \frac{Q_m}{C}.$$

Für endliches T_a/RC sind die Abschnitte leicht gekrümmt, die Minima werden leicht negativ, und der zweite positive Spitzenwert liegt etwas unter dem ersten. Die oben dargestellten positiven Dreiecke sind die führende Näherung für die geforderte **erste Umdrehung**.

(b) Langsame Rotation: $T_b \gg RC$

Abgesehen von kurzen Übergängen ist der Kondensatorstrom klein, und es gilt

$$\frac{V}{R} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

Die Spannung nähert sich daher abwechselnd den Werten

$$V \simeq \pm V_b, \quad V_b = \frac{4RQ_m}{T_b}.$$

Die Skizze weist die folgenden Merkmale auf:

- Sie beginnt bei null und steigt mit der Zeitkonstante RC exponentiell gegen $+V_b$ an.
- Nach $t = T_b/4$ fällt sie exponentiell gegen $-V_b$ ab.
- Nach $t = T_b/2$ steigt sie gegen $+V_b$ an.
- Nach $t = 3T_b/4$ fällt sie gegen $-V_b$ ab.

Jede Viertelumdrehung dauert lange im Vergleich zu RC , sodass der Verlauf während des größten Teils nahezu horizontal ist. Zu den Umschaltzeitpunkten bleibt die Spannung stetig. Beispielsweise gilt unmittelbar nach dem ersten Umschalten

$$V(t) \simeq -V_b + 2V_b e^{-(t-T_b/4)/(RC)},$$

sodass die Spannung ungefähr $RC \ln 2$ nach diesem Umschalten den Nulldurchgang erreicht.

Das gesuchte Verhältnis ist daher

$$\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{Q_m/C}{4RQ_m/T_b} = \frac{T_b}{4RC}.$$

6) Zahlenwert der Spannung

Die vollständig freiliegende Fläche beträgt

$$A_m = \frac{\pi}{2} (0.07^2 - 0.01^2) = 7.54 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Somit gilt

$$Q_m = \varepsilon_0 E_0 A_m = (8.85 \times 10^{-12})(150)(7.54 \times 10^{-3}) \simeq 1.00 \times 10^{-11} \text{ C}.$$

Die maßgeblichen Zeiten sind

$$T = \frac{1}{50} = 0.020 \text{ s},$$

$$RC = (20 \times 10^6)(0.01 \times 10^{-6}) = 0.20 \text{ s}.$$

Insbesondere beträgt die Zeit bis zum ersten Spitzenwert nur

$$\frac{T}{4} = 0.0050 \text{ s} = 0.025 RC.$$

Folglich liefert die Näherung für schnelle Rotation

$$V_{\max} \simeq \frac{Q_m}{C} = \frac{1.00 \times 10^{-11}}{1.00 \times 10^{-8}} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ V}.$$

Die Korrektur für den endlichen Widerstand folgt aus der Lösung für die erste Viertelumdrehung:

$$V_{\max} = \frac{4RQ_m}{T} \left(1 - e^{-T/(4RC)}\right) = \frac{Q_m}{C} \frac{1 - e^{-0.025}}{0.025} \simeq 0.989 \text{ mV}.$$

Dieser Wert wird bei $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$ erreicht; der zweite positive Spitzenwert ist kleiner.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Laserkräfte auf ein transparentes Prisma

Allgemeine tabellarische Angaben

Größe	Symbol	Wert
Mittlerer Erdradius	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$
Fallbeschleunigung	g	9.8 m s^{-2}
Newtonsche Gravitationskonstante	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Permittivität des Vakuums	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
Permeabilität des Vakuums	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [sic; korrekter Wert $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$]
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (oder in Luft)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Elementarladung	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Elektronenmasse	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Protonenmasse	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Planck-Konstante	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Molare Gaskonstante	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

LASERKRÄFTE AUF EIN TRANSPARENTES PRISMA

Durch Brechung kann ein intensiver Laserstrahl beträchtliche Kräfte auf kleine transparente Körper ausüben. Um dies zu verstehen, betrachten wir ein kleines dreieckiges Glasprisma mit einem Scheitelwinkel $A = \pi - 2\alpha$, einer Basis der Länge $2h$ und einer Breite w . Das Prisma hat

den Brechungsindex n und die Massendichte ρ .

Dieses Prisma werde in einen Laserstrahl gebracht, der sich horizontal in x -Richtung ausbreitet. (Nehmen Sie in der gesamten Aufgabe an, dass sich das Prisma nicht dreht, d. h., seine Spitze zeigt stets entgegen der Ausbreitungsrichtung des Laserstrahls, seine dreieckigen Flächen sind parallel zur xy -Ebene und seine Basisfläche ist parallel zur yz -Ebene, wie in Abb. 1 gezeigt.)

Setzen Sie den Brechungsindex der umgebenden Luft gleich $n_{\text{air}} = 1$. Nehmen Sie an, dass die Flächen des Prismas mit einer Antireflexbeschichtung versehen sind, sodass keine Reflexion auftritt.

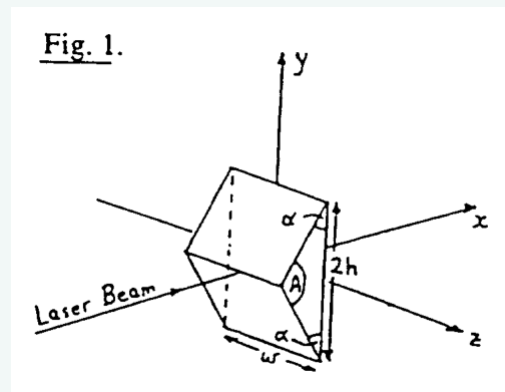


Abb. 1.

Die Intensität des Laserstrahls ist über seine Breite in z -Richtung konstant, nimmt jedoch mit dem Abstand y von der x -Achse linear ab: Sie hat bei $y = 0$ ihren Maximalwert I_0 und fällt bei $y = \pm 4h$ auf null ab (Abb. 2). [Die Intensität ist die Leistung pro Flächeneinheit, beispielsweise ausgedrückt in W m^{-2} .]

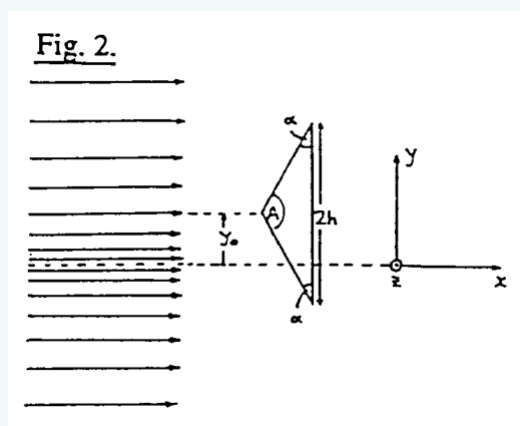


Abb. 2.

1) Stellen Sie Gleichungen auf, aus denen sich der Winkel θ (siehe Abb. 3) in Abhängigkeit von α und n bestimmen lässt, wenn das Laserlicht auf die obere Fläche des Prismas trifft.

Fig. 3.

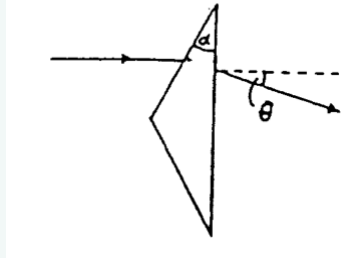


Abb. 3.

2) Drücken Sie die x - und y -Komponenten der resultierenden Kraft, die das Laserlicht auf das Prisma ausübt, durch I_0 , θ , h , w und y_0 aus, wenn die Spitze des Prismas um y_0 gegenüber der x -Achse verschoben ist, wobei $|y_0| \leq 3h$ gilt.

Zeichnen Sie die Graphen der horizontalen und vertikalen Kraftkomponente als Funktionen der vertikalen Verschiebung y_0 .

3) Der Laserstrahl sei in z -Richtung 1 mm breit und $80 \mu\text{m}$ dick (in y -Richtung). Für das Prisma gelten $\alpha = 30^\circ$, $h = 10 \mu\text{m}$, $n = 1.5$, $w = 1 \text{ mm}$ und $\rho = 2.5 \text{ g cm}^{-3}$.

Wie viel Watt Laserleistung wären erforderlich, um die auf dieses Prisma wirkende Gewichtskraft (in $-y$ -Richtung) auszugleichen, wenn sich seine Spitze bei $y_0 = -h/2$ ($= -5 \mu\text{m}$) unterhalb der Achse des Laserstrahls befindet?

4) Dieses Experiment werde ohne Schwerkraft mit demselben Prisma und einem Laserstrahl mit denselben Abmessungen wie in (3), jedoch mit $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$, durchgeführt.

Welche Periodendauer hätten die Schwingungen, die entstehen, wenn das Prisma um $y = h/20$ aus der Mittellinie des Laserstrahls ausgelenkt und losgelassen wird?

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

1. Ist β der Brechungswinkel an der oberen Fläche und γ der Einfallswinkel an der Basisfläche, so gilt

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad \gamma = \alpha - \beta, \quad \sin \theta = n \sin \gamma.$$

Gleichwertig dazu ist

$$\theta = \arcsin \left[\sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \right].$$

2. Wir definieren

$$u = \frac{y_0}{h}, \quad C_x = \frac{I_0 w h}{4c} (1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0 w h}{4c} \sin \theta.$$

Dann gilt

$$F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases}$$

$$F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \operatorname{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}$$

Der Graph der horizontalen Kraft ist gerade, mit einem parabelförmigen Maximum im mittleren Bereich und geraden äußeren Abschnitten. Der Graph der vertikalen Kraft ist ungerade und beschreibt eine rücktreibende Kraft; er hat quadratische Abschnitte im mittleren Bereich und konstante äußere Abschnitte.

3. Die erforderliche **gesamte Laserleistung** beträgt

$$P \simeq 33 \text{ W.}$$

Die zugehörige maximale Intensität ist $I_0 \simeq 8.3 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}$.

4. Die Näherung für kleine Schwingungen ergibt

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho c h^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}} \simeq 1.12 \times 10^{-2} \text{ s.}$$

Berücksichtigt man die schwache Nichtlinearität bei der vorgegebenen Amplitude $h/20$, erhält man

$$T \simeq 1.13 \times 10^{-2} \text{ s,}$$

also eine um etwa 1.08% längere Periodendauer.

Lösung

Wir verwenden die geometrische Optik, vernachlässigen die Absorption, wie es für das transparente Prisma angemessen ist, und berücksichtigen die vorausgesetzte Reflexionsfreiheit. Die Kräfte werden in führender Ordnung bezüglich des Verhältnisses der Prismengeschwindigkeit zu c berechnet.

1) Brechung und Austrittswinkel

Die obere Fläche bildet mit der vertikalen Basisfläche den Winkel α . Ihre nach innen gerichtete Normale weist daher unter einem Winkel α unter die Horizontale. Der horizontal einfallende Strahl hat den Einfallswinkel α .

Der von dieser Normalen aus gemessene Brechungswinkel sei β . Das Snelliussche Brechungsgesetz ergibt

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

Der Strahl verläuft im Prisma folglich unter einem Winkel

$$\gamma = \alpha - \beta$$

unterhalb der Horizontalen.

Die Normale der Austrittsfläche ist horizontal, sodass γ dort auch der Einfallswinkel ist. Eine erneute Anwendung des Snelliusschen Brechungsgesetzes ergibt

$$n \sin \gamma = \sin \theta.$$

Somit gilt

$$\theta = \arcsin \left[n \sin \left(\alpha - \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} \right) \right].$$

Ein gleichwertiger Ausdruck folgt durch Anwendung des Additionstheorems für den Sinus:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= n(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\boxed{\sin \theta = \sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right)}.$$

Der in Abb. 3 gezeigte durchgehende Strahlengang setzt $n \sin \gamma \leq 1$ voraus, was für die Zahlenwerte der Aufgabe erfüllt ist. Aufgrund der Symmetrie tritt Licht, das durch die untere Fläche eintritt, unter dem Winkel θ oberhalb der Horizontalen aus.

2) Kraftkomponenten und Graphen

Das Intensitätsprofil lautet

$$I(y) = I_0 \left(1 - \frac{|y|}{4h} \right), \quad |y| \leq 4h.$$

Die durch die obere bzw. untere Fläche eintretenden Leistungen seien P_+ und P_- . Befindet sich die Spitze bei y_0 , so sind die zugehörigen, senkrecht zum einfallenden Strahl projizierten Intervalle

$$[y_0, y_0 + h], \quad [y_0 - h, y_0].$$

Daher gilt

$$P_+ = w \int_{y_0}^{y_0+h} I(y) dy, \quad P_- = w \int_{y_0-h}^{y_0} I(y) dy.$$

Das Flächenelement ist hier $w dy$, also die senkrecht zum einfallenden Licht projizierte Fläche. Ein zusätzlicher Faktor für den Einfallswinkel ist nicht erforderlich.

Licht mit der Leistung P transportiert in Luft pro Zeiteinheit den Impuls P/c . Für Licht, das durch die obere Fläche eintritt, lauten die Einfalls- und Austrittsrichtungen

$$(1, 0), \quad (\cos \theta, -\sin \theta).$$

Die Kraft auf das Prisma ist gleich dem einfallenden Impulsstrom abzüglich des austretenden Impulsstroms:

$$\mathbf{F}_+ = \frac{P_+}{c} (1 - \cos \theta, \sin \theta).$$

Entsprechend gilt

$$\mathbf{F}_- = \frac{P_-}{c} (1 - \cos \theta, -\sin \theta).$$

Durch Addition folgt

$$F_x = \frac{1 - \cos \theta}{c}(P_+ + P_-), \quad F_y = \frac{\sin \theta}{c}(P_+ - P_-).$$

Zur Berechnung der Leistungen setzen wir $u = y_0/h$. Eine Stammfunktion des dimensionslosen Intensitätsprofils ist

$$J(v) = v - \frac{v|v|}{8}, \quad J'(v) = 1 - \frac{|v|}{4}.$$

Folglich gilt

$$\frac{P_+}{I_0wh} = J(u+1) - J(u), \quad \frac{P_-}{I_0wh} = J(u) - J(u-1).$$

Für $|u| \leq 1$ erstreckt sich das Prisma über beide Seiten der Strahlachse. Die Auswertung dieser Ausdrücke ergibt

$$P_+ + P_- = \frac{I_0wh}{4}(7 - u^2),$$

$$P_+ - P_- = -\frac{I_0wh}{4}u(2 - |u|).$$

Für $1 \leq |u| \leq 3$ liegt das gesamte Prisma auf einer Seite der Achse, wo die Intensität linear variiert:

$$P_+ + P_- = \frac{I_0wh}{4}(8 - 2|u|),$$

$$P_+ - P_- = -\frac{I_0wh}{4}\text{sgn}(u).$$

Mit

$$C_x = \frac{I_0wh}{4c}(1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0wh}{4c}\sin \theta,$$

lauten die gesuchten Kräfte somit

$$F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases} \quad F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \text{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}$$

Die Werte für die Graphen sind:

$u = y_0/h$	F_x/C_x	F_y/C_y
-3	2	1
-2	4	1
-1	6	1
-1/2	6.75	0.75
0	7	0
1/2	6.75	-0.75
1	6	-1
2	4	-1
3	2	-1

Zeichnen Sie für den Graphen der horizontalen Kraft zwischen $u = -1$ und $u = 1$ eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Maximum $7C_x$ bei der Auslenkung null. Setzen Sie den Graphen mit geraden Abschnitten bis zum Wert $2C_x$ bei $u = \pm 3$ fort. Die Kraft bleibt im gesamten vorgegebenen Intervall positiv.

Zeichnen Sie für den Graphen der vertikalen Kraft von $u = -3$ bis -1 den konstanten Wert $+C_y$, anschließend den quadratischen Abschnitt, der bis auf null bei $u = 0$ abfällt. Spiegeln Sie diesen Abschnitt am Ursprung, um bei $u = 1$ den Wert $-C_y$ zu erreichen, und setzen Sie den Graphen dann horizontal bis $u = 3$ fort. Seine Steigung im Ursprung beträgt $-2C_y/h$. Bei beiden Kraftgraphen gehen die Abschnitte bei $u = \pm 1$ mit stetiger Steigung ineinander über.

Die vertikale Kraft ist rücktreibend: Ein Prisma unterhalb der Achse empfängt auf seiner oberen Fläche mehr Licht und wird nach oben gedrückt; oberhalb der Achse wird es nach unten gedrückt.

3) Zum Ausgleich der Gewichtskraft erforderliche Laserleistung

Der Abstand von der Spitze zur Basisfläche beträgt

$$d = h \tan \alpha.$$

Volumen und Masse sind daher

$$V = \frac{1}{2}(2h)d w = h^2 w \tan \alpha, \quad m = \rho h^2 w \tan \alpha.$$

In SI-Einheiten gilt

$$h = 10^{-5} \text{ m}, \quad w = 10^{-3} \text{ m}, \quad \rho = 2.5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

also

$$m = 1.4434 \times 10^{-10} \text{ kg}, \quad mg = 1.4145 \times 10^{-9} \text{ N}.$$

Für $\alpha = 30^\circ$ und $n = 1.5$ gilt

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\sin 30^\circ}{1.5} \right) = 19.471^\circ, \\ \gamma = 10.529^\circ, \quad \theta = 15.908^\circ, \quad \sin \theta = 0.274094.$$

Bei $y_0 = -h/2$ ist $u = -1/2$, woraus folgt

$$F_y = \frac{3}{4}C_y = \frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c}.$$

Das vertikale Kräftegleichgewicht erfordert

$$\frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c} = \rho h^2 w \tan \alpha g.$$

Daher ist

$$I_0 = \frac{16\rho g h c \tan \alpha}{3 \sin \theta} = 8.2571 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}.$$

Die gesuchte Leistung ist die Leistung des **gesamten Strahls**. Seine Dicke $80 \mu\text{m}$ entspricht $8h$, und die Fläche unter seinem dreieckigen Intensitätsprofil beträgt $4hI_0$. Somit gilt

$$P = w \int_{-4h}^{4h} I(y) dy = 4hwI_0.$$

Einsetzen ergibt

$$P = 4(10^{-5})(10^{-3})(8.2571 \times 10^8) = 33.03 \text{ W.}$$

Damit folgt

$$\boxed{P \simeq 33 \text{ W.}}$$

Dies gleicht wie gefordert die Gewichtskraft in y -Richtung aus. Die horizontale optische Kraft bleibt positiv.

4) Schwingungsdauer ohne Schwerkraft

Während der gesamten betrachteten Schwingung gilt $|y_0| \leq h/20 < h$. Der Kraftausdruck für den mittleren Bereich lässt sich schreiben als

$$F_y = -\frac{I_0 w \sin \theta}{2c} y_0 \left(1 - \frac{|y_0|}{2h}\right).$$

Wir definieren

$$K = \frac{I_0 w \sin \theta}{2c}.$$

Bei der Amplitude $a = h/20$ weicht der nichtlineare Faktor höchstens um

$$\frac{a}{2h} = \frac{1}{40} = 2.5\%$$

von eins ab. In führender Näherung liegt daher eine harmonische Schwingung vor:

$$m\ddot{y}_0 = -Ky_0, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}.$$

Mit der oben bestimmten Masse erhält man

$$\omega_0^2 = \frac{I_0 \sin \theta}{2\rho ch^2 \tan \alpha},$$

und

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho ch^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}}}.$$

Für $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$ gilt

$$K = 4.5682 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-1}, \quad \omega_0 = 562.58 \text{ s}^{-1},$$

also

$$\boxed{T_0 = 0.0111685 \text{ s} \approx 11.2 \text{ ms.}}$$

Die Korrektur aufgrund der endlichen Amplitude lässt sich auch aus der exakten Kraft berechnen.

Wählen wir die potenzielle Energie im Ursprung gleich null, so gilt

$$U(y_0) = \frac{K}{2} y_0^2 - \frac{K}{6h} |y_0|^3.$$

Wird das Prisma bei $y_0 = a$ aus der Ruhe losgelassen, ergibt sich

$$\frac{1}{2} m \dot{y}_0^2 = U(a) - U(y_0).$$

Aufgrund der Symmetrie ist die Periodendauer das Vierfache der Zeit für die Bewegung von 0 nach a :

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{K}} \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2 - (a^3 - y^3)/(3h)}}.$$

Mit $s = y/a$ folgt

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2 - \frac{a}{3h}(1 - s^3)}}.$$

Für $a/h = 1/20$ ergibt die numerische Auswertung

$$\frac{T}{T_0} = 1.01079,$$

und damit

$$T = 0.0112890 \text{ s} \approx 11.3 \text{ ms.}$$

Die Periodendauer beträgt somit etwa 0.011 s; die Näherung für kleine Schwingungen ist bei der vorgegebenen Amplitude auf etwa 1.1% genau.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Elektronenstrahl

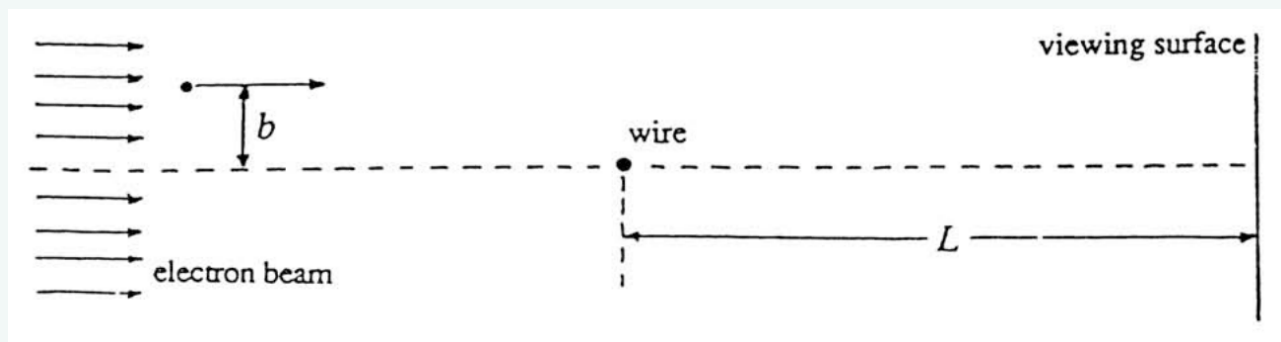
Allgemeine Wertetabelle

Größe	Symbol	Wert
Mittlerer Erdradius	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m.}$
Erdbeschleunigung	g	$9.8 \text{ m s}^{-2}.$
Newtonsche Gravitationskonstante	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}.$
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}.$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [sic; korrekter Wert $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$].
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (oder in Luft)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$
Elementarladung	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C.}$
Elektronenmasse	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg.}$
Protonenmasse	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Plancksche Konstante	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s.}$
Avogadro-Konstante	N_A	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$
Boltzmann-Konstante	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}.$
Universelle Gaskonstante	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$

Theoretische Aufgabe 3

ELEKTRONENSTRAHL

Eine Beschleunigungsspannung V_0 erzeugt einen homogenen, parallelen Strahl energiereicher Elektronen. Die Elektronen passieren einen dünnen, langen, positiv geladenen Kupferdraht, der senkrecht zur ursprünglichen Strahlrichtung gespannt ist, wie in der Abbildung gezeigt. Das Symbol b bezeichnet den Abstand, in dem ein Elektron den Draht passieren würde, wenn dieser ungeladen wäre. Anschließend bewegen sich die Elektronen zu einem Schirm (Beobachtungsfläche), der sich, wie dargestellt, im Abstand L ($\gg b$) hinter dem Draht befindet. Der Strahl erstreckt sich anfangs bis zu den Abständen $\pm b_{\max}$ relativ zur Drahtachse. Sowohl die Breite des Strahls als auch die Länge des Drahtes können in der Richtung senkrecht zur Papierebene als unendlich angesehen werden.



Der geladene Draht verläuft senkrecht zur Papierebene. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu.

Einige Zahlenwerte sind hier angegeben; weitere Zahlenwerte finden Sie in der Tabelle am Anfang der Prüfungsunterlagen:

Drahtradius	$= r_0 =$	10^{-6} m
Maximalwert von b	$= b_{\max} =$	10^{-4} m
Elektrische Ladung pro Längeneinheit des Drahtes	$= q_{\text{linear}} =$	$4.4 \times 10^{-11} \text{ C m}^{-1}$
Beschleunigungsspannung	$= V_0 =$	$2 \times 10^4 \text{ V}$
Abstand vom Draht zum Beobachtungsschirm	$= L =$	0.3 m

Hinweis: Verwenden Sie für die Teile 2 - 4 sinnvolle Näherungen, die zu analytischen und numerischen Lösungen führen.

- 1) Berechnen Sie das vom Draht erzeugte elektrische Feld $\mathbf{E}$. Skizzieren Sie den Betrag von $\mathbf{E}$ als Funktion des Abstands von der Drahtachse.
- 2) Berechnen Sie mithilfe der klassischen Physik den Ablenkwinkel eines Elektrons. Führen Sie dies für Werte des Parameters b durch, bei denen das Elektron nicht auf den Draht trifft. Mit θ_{final} sei der (kleine) Winkel zwischen der Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons und seiner Geschwindigkeit beim Erreichen der Beobachtungsfläche bezeichnet. Berechnen Sie damit θ_{final} .
- 3) Berechnen und skizzieren Sie das von der klassischen Physik vorhergesagte Auftreffmuster (d. h. die Intensitätsverteilung) auf dem Beobachtungsschirm.

4) Die Quantenphysik sagt einen wesentlichen Unterschied in der Intensitätsverteilung gegenüber der Vorhersage der klassischen Physik voraus. Skizzieren Sie das quantenphysikalisch vorhergesagte Muster und machen Sie quantitative Angaben dazu.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Es sei y die vorzeichenbehaftete Querkoordinate auf dem Schirm, wobei $y = 0$ dem Draht direkt gegenüberliegt, und I_0 die Intensität des einfallenden Strahls.

1. Das Feld ist radial nach außen gerichtet:

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0, \\ \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}, & r > r_0. \end{cases}$$

Sein Betrag springt an der Oberfläche von null auf $7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$ und nimmt anschließend wie $1/r$ ab.

2. Elektronen, die auf beiden Seiten vorbeifliegen, werden um annähernd denselben Winkel zur Achse hin abgelenkt:

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0} = 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

3. Unter Berücksichtigung des endlichen Drahtradius ergibt sich das klassische Muster zu

$$I_{\text{cl}}(y) \simeq \begin{cases} 2I_0, & |y| < 17.6 \text{ } \mu\text{m}, \\ I_0, & 17.6 \text{ } \mu\text{m} < |y| < 81.4 \text{ } \mu\text{m}, \\ 0, & |y| > 81.4 \text{ } \mu\text{m}. \end{cases}$$

Somit ist das zentrale Band mit doppelter Intensität etwa $35 \text{ } \mu\text{m}$ breit, und der gesamte beleuchtete Bereich ist etwa $163 \text{ } \mu\text{m}$ breit.

4. Bei kohärenten Elektronen enthält der zentrale Überlappungsbereich Interferenzstreifen:

$$\lambda_{\text{dB}} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}, \quad d \simeq \frac{\lambda_{\text{dB}}}{2\theta_{\text{final}}} = 7.0 \times 10^{-8} \text{ m} = 70 \text{ nm.}$$

Abseits der Ränder der Einhüllenden gilt im Überlappungsbereich

$$I_{\text{q}}(y) \simeq 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right)$$

Das Zentrum ist hell; aufeinanderfolgende Maxima erreichen $4I_0$, und die Minima erreichen null. Über den Überlappungsbereich erstrecken sich ungefähr 5.1×10^2 Streifenperioden. Die Intensität in den Seitenbereichen bleibt annähernd bei I_0 .

Lösung

1) Elektrisches Feld

Kupfer ist ein Leiter, daher verschwindet das elektrostatische Feld im Inneren des Drahtes. Außerhalb eines praktisch unendlich langen Drahtes erfordert die Zylindersymmetrie ein radiales Feld, das nur vom Abstand r von seiner Achse abhängt.

Wir wenden das gaußsche Gesetz auf eine koaxiale Zylinderfläche mit dem Radius $r > r_0$ und der Länge ℓ an:

$$E(r)(2\pi r\ell) = \frac{q_{\text{linear}}\ell}{\varepsilon_0}.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\varepsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}.$$

Das Feld ist nach außen gerichtet, da der Draht positiv geladen ist.

Numerisch ergibt sich

$$\frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{2\pi(8.85 \times 10^{-12})} = 0.791 \text{ V},$$

also

$$E(r_0^+) = \frac{0.791}{10^{-6}} \simeq 7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}.$$

Der gesuchte Graph liegt für $0 \leq r < r_0$ auf der horizontalen Achse, springt bei $r = r_0$ nach oben und folgt danach einer abfallenden $1/r$ -Kurve, die sich asymptotisch null nähert. Beispielsweise gilt

$$E(10r_0) = 7.9 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad E(100r_0) = 7.9 \times 10^3 \text{ V m}^{-1}.$$

2) Ablenkwinkel

Wir wählen die x -Achse entlang des einfallenden Strahls und die y -Achse senkrecht dazu in der Abbildungsebene. Der Draht verläuft durch $x = y = 0$.

Wir verwenden die nichtrelativistische Energiebeziehung:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV_0, \quad v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_e}} \simeq 8.4 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

Hier gilt $eV_0/(m_e c^2) \simeq 0.039$, sodass die nichtrelativistische Behandlung für diese Aufgabe eine sinnvolle Näherung ist.

Wir berechnen den kleinen transversalen Kraftstoß entlang der unabgelenkten Bahn $y = b$ und nehmen dabei v als konstant an. Dies ist mit dem schwachen Drahtpotential vereinbar: Die Potentialdifferenz zwischen r_0 und L beträgt nur

$$\Phi(r_0) - \Phi(L) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{L}{r_0}\right) \simeq 10 \text{ V},$$

und ist damit viel kleiner als $V_0 = 2 \times 10^4 \text{ V}$.

Für ein Elektron, das oberhalb des Drahtes vorbeifliegt, also mit $b > 0$, lautet die transversale Kraft

$$F_y = -eE_y = -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} \frac{b}{x^2 + b^2}.$$

Da $dt = dx/v$ gilt, beträgt die transversale Impulsänderung bis zum Erreichen von $x = L$ näherungsweise

$$\begin{aligned}\Delta p_y &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^L F_y dx \\ &= -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 v} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{L}{b}\right) \right].\end{aligned}$$

Die untere Integrationsgrenze setzt voraus, dass der einfallende Strahl in einem im Vergleich zu b hinreichend großen Abstand vor dem Draht vorgegeben ist.

Für eine kleine Ablenkung gilt

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{|\Delta p_y|}{m_e v}.$$

Mit $m_e v^2 = 2eV_0$ folgt

$$\theta_{\text{final}}(b) \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\pi\epsilon_0 V_0} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{L}{b}\right) \right].$$

Da $L \gg b$ ist, ist der Ausdruck in eckigen Klammern annähernd gleich π , sodass

$$\boxed{\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0}.$$

Damit ist die Ablenkung in dieser Näherung unabhängig vom Stoßparameter:

$$\theta_{\text{final}} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{4(8.85 \times 10^{-12})(2 \times 10^4)} \simeq 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

Selbst bei $b = b_{\text{max}}$ beträgt die relative Korrektur im Klammerausdruck aufgrund des endlichen Schirmabstands nur etwa 10^{-4} .

Die obere Hälfte des Strahls wird nach unten abgelenkt, die untere Hälfte nach oben. In derselben Näherung gilt für vorbeifliegende Elektronen $b > r_0$. Die kleine, durch die Anziehung verursachte Änderung des Grenzwerts für einen Zusammenstoß mit dem Draht wird vernachlässigt.

3) Klassische Intensitätsverteilung

Wir setzen

$$\alpha = \theta_{\text{final}}, \quad a = L\alpha \simeq 18.6 \text{ } \mu\text{m}.$$

Da $L \gg b_{\text{max}}$ ist, kann die Ablenkung als in der Nähe des Drahtes stattfindend behandelt werden. Ein Elektron, das im Abstand b oberhalb der Achse einfällt, erreicht daher

$$y = b - a,$$

während eines, das im gleichen Abstand unterhalb einfällt, folgende Koordinate erreicht:

$$y = -b + a.$$

Nur Elektronen mit $r_0 < b < b_{\text{max}}$ passieren den Draht. Folglich nehmen die beiden durchgelassenen Strahlanteile die folgenden Intervalle auf dem Schirm ein:

$$\begin{aligned}\text{oberer einfallender Anteil: } & r_0 - a < y < b_{\max} - a, \\ \text{unterer einfallender Anteil: } & -b_{\max} + a < y < a - r_0.\end{aligned}$$

Numerisch sind dies

$$-17.6 < y < 81.4 \mu\text{m}$$

und

$$-81.4 < y < 17.6 \mu\text{m},$$

für den oberen beziehungsweise unteren Anteil.

Für jeden Anteil gilt bei dieser Abbildung $|dy/db| = 1$. Die Erhaltung des Elektronenflusses ergibt daher eine Intensität I_0 überall dort, wo ein Anteil auftritt, und $2I_0$ überall dort, wo beide auftreten.

Wir definieren

$$w = a - r_0 \simeq 17.6 \mu\text{m}, \quad Y = b_{\max} - a \simeq 81.4 \mu\text{m}.$$

Dann gilt

$$I_{\text{cl}}(y) = \begin{cases} 2I_0, & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

Die Skizze ist symmetrisch bezüglich $y = 0$. Von links beginnend springt die Intensität bei $-81.4 \mu\text{m}$ von null auf I_0 , steigt bei $-17.6 \mu\text{m}$ auf $2I_0$, fällt bei $+17.6 \mu\text{m}$ auf I_0 und kehrt bei $+81.4 \mu\text{m}$ auf null zurück. Die Bänder erstrecken sich gleichförmig parallel zum Draht.

Ihre Breiten betragen

$$\begin{aligned}\text{Breite des zentralen Überlappungsbereichs} &= 2(a - r_0) \simeq 35.3 \mu\text{m}, \\ \text{Breite jedes Seitenbereichs} &= b_{\max} - 2a + r_0 \simeq 63.7 \mu\text{m}.\end{aligned}$$

Es gibt keinen zentralen geometrischen Schatten: Die beiden abgelenkten Anteile überlappen sich.

Zur Kontrolle des Flusses gilt

$$\int I_{\text{cl}}(y) dy = 2I_0(b_{\max} - r_0),$$

was genau dem einfallenden Fluss abzüglich der in dieser Näherung vom Draht abgefangenen Elektronen entspricht.

4) Quantenphysikalische Intensitätsverteilung

Bei einem idealen monoenergetischen, kohärenten einfallenden Strahl interferieren die auf gegenüberliegenden Seiten des Drahtes vorbeifliegenden Anteile dort, wo sie sich überlappen.

Die De-Broglie-Wellenlänge der Elektronen beträgt

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV_0}},$$

also

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31})(1.60 \times 10^{-19})(2 \times 10^4)}} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

Innerhalb des Überlappungsbereichs breiten sich die beiden annähernd ebenen Wellen unter den Winkeln $+\alpha$ und $-\alpha$ zur ursprünglichen Richtung aus. Ihre transversalen Wellenvektorkomponenten sind daher $+k \sin \alpha$ und $-k \sin \alpha$, wobei

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{dB}}}.$$

Aufgrund der Spiegelsymmetrie sind ihre Phasen bei $y = 0$ gleich. Ihre Phasendifferenz an der Schirmkoordinate y beträgt

$$\Delta\phi(y) = 2ky \sin \alpha.$$

Jede Welle trägt für sich die Intensität I_0 bei, sodass

$$\begin{aligned} I_{\text{q}}(y) &= I_0 + I_0 + 2I_0 \cos \Delta\phi \\ &= 4I_0 \cos^2(ky \sin \alpha). \end{aligned}$$

Der Streifenabstand ist somit

$$d = \frac{\lambda_{\text{dB}}}{2 \sin \alpha} \simeq \frac{\lambda_{\text{dB}}}{2\alpha},$$

woraus sich ergibt:

$$d \simeq 6.99 \times 10^{-8} \text{ m} \simeq 70 \text{ nm}.$$

In der Näherung einer geometrisch bestimmten Einhüllenden gilt

$$I_{\text{q}}(y) \simeq \begin{cases} 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right), & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

Die gesuchte Skizze hat dieselbe breite Einhüllende wie das klassische Muster, aber das zentrale Plateau wird durch eng beieinanderliegende Streifen ersetzt:

- Helle Streifen treten bei $y = nd$ mit der Intensität $4I_0$ auf; n ist eine ganze Zahl.
- Dunkle Streifen treten bei $y = (n + \frac{1}{2})d$ mit der Intensität null auf.
- Der zentrale Streifen bei $y = 0$ ist hell.
- Die Streifen sind gerade und parallel zum Draht.
- Ihre mittlere Intensität beträgt $2I_0$ und ist damit gleich der klassischen Intensität im Zentrum.

Die ungefähre Anzahl der Streifenperioden über den Überlappungsbereich beträgt

$$N \simeq \frac{2w}{d} = \frac{35.3 \times 10^{-6}}{6.99 \times 10^{-8}} \simeq 5.1 \times 10^2.$$

Beugung rundet die Ränder der Einhüllenden ab, sodass der stückweise definierte Ausdruck für Bereiche abseits dieser Ränder gedacht ist. Die maßgebliche transversale Beugungsskala liegt in der Größenordnung

$$\sqrt{\lambda_{\text{dB}} L} \simeq 1.6 \text{ } \mu\text{m}.$$

Ein Detektor, der die Streifen mit einem Abstand von **70 nm** nicht auflösen kann, misst deren Mittelwert und erhält näherungsweise wieder die klassische Verteilung.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.