

المسألة 1: كهرباء الغلاف الجوي

معلومات عامة مجدولة

الكمية	الرمز	القيمة
متوسط نصف قطر الأرض	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$
تسارع الجاذبية	g	9.8 m s^{-2}
ثابت الجذب العام لنيوتن	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
سماحية الفراغ	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
نفاذية الفراغ	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ القيمة الصحيحة [كذا في الأصل: $8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$]
سرعة الضوء في الفراغ (أو الهواء)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
الشحنة الأولية	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
كتلة الإلكترون	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
كتلة البروتون	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
ثابت بلانك	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
ثابت أفوغادرو	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
ثابت بولتزمان	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
ثابت الغاز المولي	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

المسألة النظرية 1

كهرباء الغلاف الجوي

من منظور الكهروستاتيكا، يمكن اعتبار سطح الأرض موصلًا جيدًا. وهو يحمل شحنة كلية معينة Q_0 ، ومتوسط كثافة شحنته السطحية هو σ_0 .

(1) في ظروف الطقس الصحو، يوجد عند سطح الأرض مجال كهربائي متجه إلى أسفل، E_0 ، تساوي شدته نحو 150 V/m . استنتج مقدار كثافة الشحنة السطحية للأرض ومقدار الشحنة الكلية التي يحملها سطح الأرض.

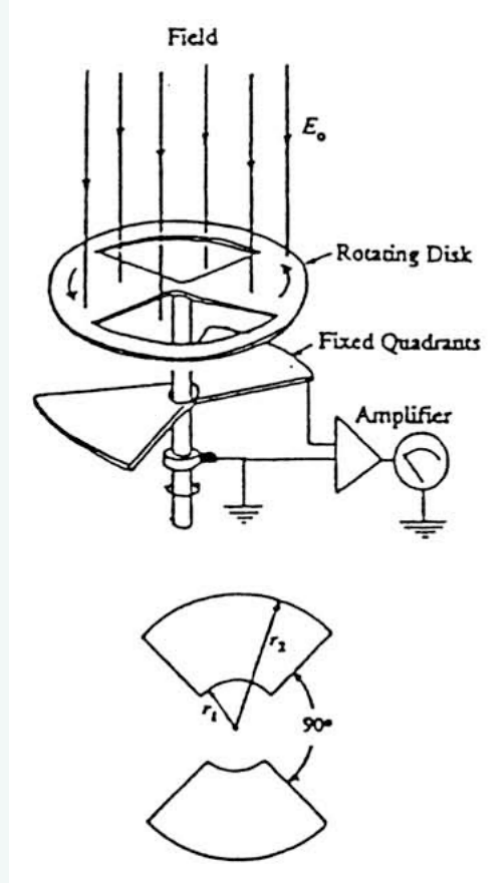
(2) تتناقص شدة المجال الكهربائي المتجه إلى أسفل مع الارتفاع، وتبلغ نحو 100 V/m عند ارتفاع 100 m . احسب متوسط كمية الشحنة الصافية لكل m^3 من الغلاف الجوي بين سطح الأرض وارتفاع 100 m .

(3) إن كثافة الشحنة الصافية التي حسبتها في (2) تنتج في الواقع عن وجود عددين متساويين تقريباً من الأيونات الموجبة والسالبة أحادية الشحنة في وحدة الحجم (n_+ و n_-). بالقرب من سطح الأرض، وفي ظروف الطقس الصحو، تتحرك هذه الأيونات تحت تأثير المجال الكهربائي الرأسي. وتتناسب سرعتها طردياً مع شدة المجال:

$$v \approx 1.5 \times 10^{-4} \cdot E,$$

حيث تُقاس v بوحدة m/s، و E بوحدة V/m. ما الزمن الذي تستغرقه حركة أيونات الغلاف الجوي لمعادلة نصف شحنة سطح الأرض، إذا لم تحدث أي عمليات أخرى (مثل البرق) تُبقي هذه الشحنة؟

(4) إحدى طرق قياس المجال الكهربائي للغلاف الجوي، ومن ثم σ_0 ، هي استخدام المنظومة الموضحة في الرسم. يُركَّب زوج من القطاعات المعدنية الربعية، المعزولة عن الأرض ولكن الموصولة ببعضها ببعض، مباشرةً أسفل قرص مؤرَّض يدور بانتظام، قُطعت فيه فتحتان على شكل قطاعين ربعيين. (يُبلغ في التباعد في الرسم لإظهار ترتيب الأجزاء). ينكشف القطاعان المعزولان بالكامل للمجال مرتين في كل دورة، ثم يُحجبان عنه بالكامل (بعد مرور 1/4 دورة). لتكن T زمن الدورة، وليكن نصف القطر الداخلي والخارجي للقطاعين المعزولين r_1 و r_2 كما هو موضح.



اعتبر $t = 0$ لحظة يكون فيها القطاعان المعزولان محجوبين بالكامل.

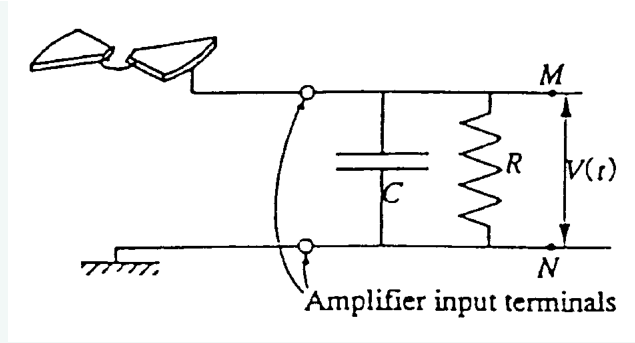
أوجد تعبيرات تعطي الشحنة الكلية $q(t)$ المستحثة على السطح العلوي للقطاعين المعزولين بدلالة الزمن بين $t = 0$ و $t = T/2$ ، وارسم مخططاً بيانياً لهذا التغير.

[يمكن إهمال تأثيرات تيار أيونات الغلاف الجوي في هذه الحالة].

(5) تُوصَل المنظومة الموصوفة في (4) بمضخّ تكافئ دائرة دخله مكثفًا سعته C ومقاومة قيمتها R موصولين على التوالي. (يمكنك افتراض أن سعة منظومة القطاعين مهملة بالمقارنة مع C). ارسم مخططات بيانية لشكل فرق الجهد V بين النقطتين M و N بدلالة t خلال دورة واحدة للقرص، مباشرةً بعد بدء دورانه بزمان دورة T ، إذا كان:

$$T = T_a \ll CR \quad (a)$$

$$T = T_b \gg CR \quad (b)$$



[افترض أن قيمتي R و C ثابتتان؛ وأن T وحده يتغير بين الحالتين (a) و (b).]

أوجد تعبيراً للنسبة التقريبية، V_a/V_b ، بين أكبر قيمتي $V(t)$ في الحالتين (a) و (b).

6 افترض أن $E_0 = 150 \text{ V/m}$ ، و $r_1 = 1 \text{ cm}$ ، و $r_2 = 7 \text{ cm}$ ، و $C = 0.01 \mu\text{F}$ ، و $R = 20 \text{ M}\Omega$ ، وافترض أن القرص يبدأ بالدوران بمعدل 50 دورة في الثانية.

ما أكبر قيمة تقريبية لـ V خلال دورة واحدة في هذه الحالة؟

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

اعتبر $V = V_M - V_N$. للأجزاء 4-6، عرّف المساحة المكشوفة بالكامل ومقدار الشحنة المستحثة عليها بالعلاقين

$$A_m = \frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2), \quad Q_m = \epsilon_0 E_0 A_m > 0.$$

1. شحنة سطح الأرض سالبة:

$$\sigma_0 \simeq -1.3 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}, \quad Q_0 \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

المقداران المطلوبان هما القيمتان المطلقتان.

2. متوسط كثافة الشحنة في الغلاف الجوي هو

$$\bar{\rho} \simeq +4.4 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

3. باحتساب الأيونات الموجبة الواصلة إلى السطح وحدها، واعتبار تركيزها ثابتاً تقريباً،

$$t_{1/2} = \frac{\epsilon_0 \ln 2}{en_+(1.5 \times 10^{-4})} \simeq 4.3 \times 10^2 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

4. الشحنة المستحثة على السطح العلوي هي

$$q(t) = \begin{cases} -Q_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -Q_m \left(2 - \frac{4t}{T}\right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

يصل منحناها البياني بين $(0, 0)$ ، و $(T/4, -Q_m)$ ، و $(T/2, 0)$ بخطوط مستقيمة، ويتكرر كل $T/2$.

5. خلال الدورة الأولى، بدءًا من $V(0) = 0$ - $V \simeq -q/C$ (a) : نبضتان مثلثيتان موجبتان، ارتفاع كل منهما

$$V_a \simeq \frac{Q_m}{C}.$$

(b) - يتناوب V بين $+V_b$ و $-V_b$ تقريبًا، مع انتقالات أسية ثابت زمنها RC ، حيث

$$V_b \simeq \frac{4RQ_m}{T_b}.$$

ومن ثم

$$\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{T_b}{4RC}.$$

6. أكبر جهد خلال الدورة الأولى هو

$$V_{\max} \simeq 1.0 \times 10^{-3} \text{ V} = 1.0 \text{ mV}.$$

يؤدي أخذ المقاومة المحدودة في الحساب إلى القيمة 0.989 mV ، التي تُبلغ عند $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$.

الحل

(1) شحنة سطح الأرض

المجال الكهربائي داخل موصل في حالة اتزان كهروستاتيكي يساوي صفرًا. وبتطبيق قانون غاوس على سطح أسطوانتي صغير يعبر سطح الموصل، نحصل على

$$E_{\perp, \text{outside}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0},$$

حيث يتجه العمودي إلى خارج الموصل. وبما أن المجال يتجه إلى أسفل، نحو داخل الأرض، فإن

$$\sigma_0 = -\epsilon_0 E_0.$$

وعليه

$$\sigma_0 = -(8.85 \times 10^{-12})(150) = -1.3275 \times 10^{-9} \text{ C m}^{-2}.$$

بتقريب الأرض إلى كرة واستخدام هذه القيمة بوصفها متوسط كثافة شحنتها السطحية،

$$Q_0 = 4\pi R_E^2 \sigma_0 = -4\pi (6.4 \times 10^6)^2 (1.3275 \times 10^{-9}) \simeq -6.8 \times 10^5 \text{ C}.$$

إن يبلغ مقدار كثافة الشحنة السطحية نحو 1.3 nC m^{-2} ، ويبلغ مقدار الشحنة الكلية نحو $6.8 \times 10^5 \text{ C}$.

(2) الشحنة الفراغية في الغلاف الجوي

ليكن اتجاه تزايد z إلى أعلى. المركبتان الرأسيتان للمجال، مع مراعاة الإشارة، عند الارتفاعين هما

$$E_z(0) = -150 \text{ V/m}, \quad E_z(100 \text{ m}) = -100 \text{ V/m}.$$

على امتداد ارتفاع قدره 100 m ، يمكن إهمال انحناء الأرض لأن $100/R_E \ll 1$. ولذلك يعطي قانون غاوس لعمود رأسي مساحة مقطعه الأفقي A

$$\bar{\rho} Ah = \epsilon_0 A [E_z(h) - E_z(0)].$$

وبناءً على ذلك،

$$\bar{\rho} = \epsilon_0 \frac{-100 - (-150)}{100} = (8.85 \times 10^{-12})(0.50) = 4.425 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-3}.$$

الشحنة موجبة، وهو ما يتفق مع تناقص شدة المجال المتجه إلى أسفل كلما ازداد الارتفاع.

(3) الزمن اللازم لمعادلة نصف الشحنة السطحية

الأرض مشحونة بشحنة سالبة. تتجرف الأيونات الموجبة إلى أسفل ويمكنها الوصول إلى سطحها؛ أما الأيونات السالبة فتتجرف إلى أعلى. لذا فإن التيار الذي يعادل شحنة السطح يتضمن مساهمة الأيونات الموجبة وحدها.

نكتب حركية الأيونات على الصورة

$$\mu = 1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad v = \mu E.$$

باعتبار التركيز المعطى بالقرب من السطح n_+ ثابتاً تقريباً في هذا التقدير للانجراف، تكون الشحنة الموجبة الواصلة إلى وحدة المساحة في وحدة الزمن

$$j_+ = en_+v = en_+\mu E.$$

لتكن $S(t) = |\sigma(t)|$ مقدار كثافة الشحنة السطحية السالبة المتبقية. يعطي الشرط الحدي للموصل

$$E(t) = \frac{S(t)}{\varepsilon_0}.$$

وبما أن كل أيون موجب يصل إلى السطح يقلل S ، فإن

$$\frac{dS}{dt} = -j_+ = -\frac{en_+\mu}{\varepsilon_0} S.$$

ومن ثم يكون التفريغ أسياً:

$$S(t) = S(0)e^{-t/\tau_+}, \quad \tau_+ = \frac{\varepsilon_0}{en_+\mu}.$$

عددياً،

$$en_+\mu = (1.60 \times 10^{-19})(6 \times 10^8)(1.5 \times 10^{-4}) = 1.44 \times 10^{-14} \text{ S m}^{-1},$$

و

$$\tau_+ = \frac{8.85 \times 10^{-12}}{1.44 \times 10^{-14}} \simeq 615 \text{ s}.$$

بوضع $S(t_{1/2}) = S(0)/2$

$$t_{1/2} = \tau_+ \ln 2 \simeq 426 \text{ s} \simeq 7.1 \text{ min}.$$

إن إضافة موصلية الأيونات السالبة المتحركة إلى أعلى ستؤدي، على نحو غير صحيح، إلى احتساب تيار لا يدخل سطح الأرض.

(4) الشحنة المستحثة على القطاعين الربيعيين

أهمل تأثيرات الحواف، واعتبر الحجب كاملاً حيثما يغطي القرص المؤرض القطاعين. على السطح العلوي المنكشف، يقتضي المجال المتجه إلى أسفل كثافة شحنة سطحية مقدارها الجبري

$$\sigma_{\text{upper}} = -\varepsilon_0 E_0.$$

المساحة الكلية للقطاعين الحلقيين الربيعيين هي

$$A_m = 2 \left[\frac{\pi}{4} (r_2^2 - r_1^2) \right] = \frac{\pi}{2} (r_2^2 - r_1^2).$$

السرعة الزاوية للقرص هي

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

خلال الربع الأول من الدورة، تكشف كل فتحة عرضاً زاوياً $\theta = \omega t$. ولذلك تكون المساحة الكلية المنكشفة

$$A(t) = 2 \left[\frac{1}{2} (r_2^2 - r_1^2) \theta \right] = \frac{2\pi(r_2^2 - r_1^2)}{T} t, \quad 0 \leq t \leq T/4.$$

تبلغ هذه المساحة A_m عند $T/4$ ، ثم تتناقص بالمعدل نفسه إلى الصفر عند $T/2$. ومن ثم

$$A(t) = \begin{cases} A_m \frac{4t}{T}, & 0 \leq t \leq T/4, \\ A_m \left(2 - \frac{4t}{T}\right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

بما أن $q(t) = -\varepsilon_0 E_0 A(t)$ ، فإن

$$q(t) = \begin{cases} -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} t, & 0 \leq t \leq T/4, \\ -\frac{2\pi\varepsilon_0 E_0 (r_2^2 - r_1^2)}{T} \left(\frac{T}{2} - t\right), & T/4 \leq t \leq T/2. \end{cases}$$

المخطط نبضة مثلثية متجهة إلى أسفل: تبدأ من الصفر، وتتناقص خطياً إلى $-Q_m$ عند $T/4$ ، ثم تتزايد خطياً إلى الصفر عند $T/2$. وتوجد نبضتان متماثلتان في كل دورة.

هنا تمثل q الشحنة على السطح العلوي. ويمكن لمنظومة قطاعين معزولة أن تكتسب هذه الشحنة السطحية بإعادة توزيع شحنتها الموجودة أصلاً.

(5) الجهد عبر دخل المضخم

اعتبر $V = V_M - V_N$ ، مع تأريض N . قبل بدء الدوران، يكون القطاعان محجوبين وتكون المقاومة قد فرّغت المكثف، ومن ثم

$$q(0) = 0, \quad V(0) = 0.$$

بإهمال سعة منظومة القطاعين بالمقارنة مع C ، تكون الشحنة المرتبطة بموصل الدخل المتصل بها هي $q + CV$. تغادر الشحنة الموجبة هذا الموصل عبر المقاومة بمعدل V/R ، ولذلك يعطي حفظ الشحنة

$$\frac{d}{dt}(q + CV) = -\frac{V}{R},$$

أو

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = -\frac{dq}{dt}.$$

عندما ينكشف القطاعان، تكتسب سطوحهما العلوية شحنة سالبة. وهذا يترك شحنة موجبة على اللوح العلوي للمكثف، فيرتفع الجهد في البداية إلى قيم موجبة.

من الجزء 4،

$$-\frac{dq}{dt} = \begin{cases} +I_0, & 0 < t < T/4, \\ -I_0, & T/4 < t < T/2, \\ +I_0, & T/2 < t < 3T/4, \\ -I_0, & 3T/4 < t < T, \end{cases} \quad I_0 = \frac{4Q_m}{T}.$$

إن تَغْذِيَّ الدائرة بتيار ذي موجة مربعة.

لاستكمال العرض، ضع $\tau = RC$ ، و $B = RI_0$ ، و $t_k = kT/4$. في ربع الدورة ذي الرقم $k = 0, 1, 2, 3$ ، يكون الجهد

$$V(t) = (-1)^k B + [V(t_k) - (-1)^k B] e^{-(t-t_k)/\tau}.$$

يحدد هذا التعبير، مع $V(0) = 0$ ، الشكل الموجي المستمر عند بدء التشغيل.

(a) الدوران السريع: $T_a \ll RC$

خلال الدورة الأولى، تتسرب شحنة قليلة عبر R . وفي التقريب الرائد،

$$C \frac{dV}{dt} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

باستخدام الشروط الابتدائية،

$$V(t) \simeq -\frac{q(t)}{C}.$$

لذلك يتكون الجهد من نبضتين مثلثيتين موجبتين:

1	3/4	1/2	1/4	0	t/T_a
0	1	0	1	0	$V/(Q_m/C)$ ، في التقريب الرائد

صل بين القيم المتتالية بخطوط مستقيمة. أكبر جهد يساوي تقريباً

$$V_a \simeq \frac{Q_m}{C}.$$

عندما تكون T_a/RC غير منعدمة، تكون المقاطع منحنية قليلاً، وتصبح القيم الصغرى سالبة قليلاً، وتكون القمة الموجبة الثانية أخفض قليلاً من الأولى. والمثلثان الموجبان أعلاه هما التقريب الرائد **للدورة الأولى** المطلوبة.

(b) الدوران البطيء: $T_b \gg RC$

باستثناء فترات الانتقال القصيرة، يكون تيار المكثف صغيراً، وتكون

$$\frac{V}{R} \simeq -\frac{dq}{dt}.$$

ومن ثم يقترب الجهد من مستويين متناوبين

$$V \simeq \pm V_b, \quad V_b = \frac{4RQ_m}{T_b}.$$

يتسم المخطط بالخصائص الآتية:

- يبدأ من الصفر ويرتفع أسياً نحو $+V_b$ ، بثابت زمن RC .
- بعد $t = T_b/4$ ، ينخفض أسياً نحو $-V_b$.
- بعد $t = T_b/2$ ، يرتفع نحو $+V_b$.
- بعد $t = 3T_b/4$ ، ينخفض نحو $-V_b$.

كل ربع دورة طويل بالمقارنة مع RC ، لذا يكون معظمه مقطعاً شبه أفقي. ويبقى الجهد مستمراً عند أزمدة التبديل. فعلى سبيل المثال، مباشرة بعد التبديل الأول،

$$V(t) \simeq -V_b + 2V_b e^{-(t-T_b/4)/(RC)},$$

ولذلك يعبر الصفر بعد نحو $RC \ln 2$ من ذلك التبديل.

وعليه تكون النسبة المطلوبة

$$\frac{V_a}{V_b} \simeq \frac{Q_m/C}{4RQ_m/T_b} = \frac{T_b}{4RC}.$$

(6) القيمة العددية للجهد

المساحة المنكشفة بالكامل هي

$$A_m = \frac{\pi}{2} (0.07^2 - 0.01^2) = 7.54 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

ومن ثم

$$Q_m = \varepsilon_0 E_0 A_m = (8.85 \times 10^{-12})(150)(7.54 \times 10^{-3}) \simeq 1.00 \times 10^{-11} \text{ C}.$$

الأزمدة ذات الصلة هي

$$T = \frac{1}{50} = 0.020 \text{ s},$$

$$RC = (20 \times 10^6)(0.01 \times 10^{-6}) = 0.20 \text{ s}.$$

وعلى وجه الخصوص، فإن الزمن اللازم لبلوغ القمة الأولى لا يتجاوز

$$\frac{T}{4} = 0.0050 \text{ s} = 0.025 RC.$$

وبناءً على ذلك، يعطي تقريب الدوران السريع

$$V_{\max} \simeq \frac{Q_m}{C} = \frac{1.00 \times 10^{-11}}{1.00 \times 10^{-8}} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ V}.$$

يُستنتج تصحيح المقاومة المحدودة من حل ربع الدورة الأول:

$$V_{\max} = \frac{4RQ_m}{T} \left(1 - e^{-T/(4RC)}\right) = \frac{Q_m}{C} \frac{1 - e^{-0.025}}{0.025} \simeq 0.989 \text{ mV}.$$

تُبلغ هذه القيمة عند $t = T/4 = 5.0 \text{ ms}$ وتكون القمة الموجبة الثانية أصغر.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: قوى الليزر المؤثرة على منشور شفاف

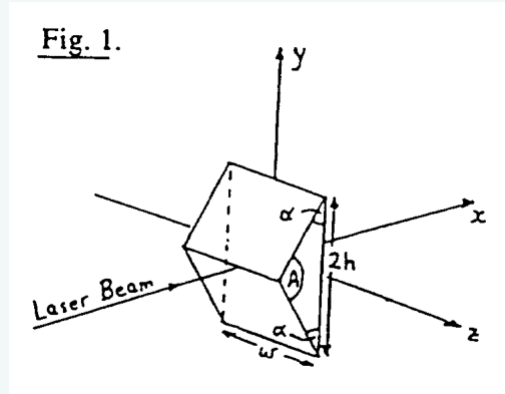
جدول المعلومات العامة

الكمية	الرمز	القيمة
متوسط نصف قطر الأرض	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$
تسارع الجاذبية	g	9.8 m s^{-2}
ثابت الجذب العام لنيوتن	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
سماحية الفراغ	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
نفاذية الفراغ	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ القيمة الصحيحة $8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [كذا في الأصل؛ القيمة الصحيحة $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$]
سرعة الضوء في الفراغ (أو الهواء)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
الشحنة الأولية	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
كتلة الإلكترون	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
كتلة البروتون	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
ثابت بلانك	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
ثابت أفوغادرو	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
ثابت بولتزمان	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
ثابت الغازات المولي	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

قوى الليزر المؤثرة على منشور شفاف

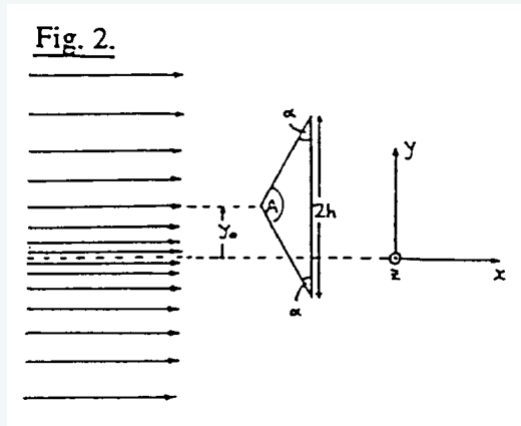
يمكن لحزمة ليزر قوية أن تؤثر، عن طريق الانكسار، بقوى ملحوظة على أجسام شفافة صغيرة. ولتبيين ذلك، اعتبر منشوراً زجاجياً مثلثياً صغيراً زاوية رأسه $A = \pi - 2\alpha$ ، وطول قاعدته $2h$ ، وعرضه w . معامل انكسار المنشور هو n ، وكثافته الكتلية هي ρ .

افترض أن هذا المنشور موضوع في حزمة ليزر تنتشر أفقياً في اتجاه x . (افترض طوال هذه المسألة أن المنشور لا يدور، أي إن رأسه يشير دائماً عكس اتجاه حزمة الليزر، ووجهيه المثلثين موازيان للمستوى xy ، وقاعدته موازية للمستوى yz ، كما هو موضح في الشكل 1.) اعتبر معامل انكسار الهواء المحيط $n_{\text{air}} = 1$. وافترض أن أوجه المنشور مطلية بطبقة مضادة للانعكاس بحيث لا يحدث



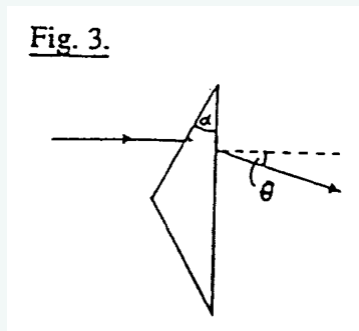
الشكل 1.

شدة حزمة الليزر منتظمة عبر عرضها في اتجاه z ، لكنها تتناقص خطياً مع المسافة y عن المحور x ، بحيث تبلغ قيمتها العظمى I_0 عند $y = 0$ ، وتنخفض إلى الصفر عند $y = \pm 4h$ (الشكل 2). [الشدة هي القدرة لكل وحدة مساحة، ويُعبّر عنها مثلاً بوحدة $[\text{W m}^{-2}]$]



الشكل 2.

(1) اكتب معادلات يمكن منها تحديد الزاوية θ (انظر الشكل 3) (بدلالة α و n) عندما يسقط ضوء الليزر على الوجه العلوي للمنشور.



الشكل 3.

(2) عبّر، بدلالة I_0 و θ و h و w و y_0 ، عن مركبتي القوة المحصلة التي يؤثر بها ضوء الليزر على المنشور في اتجاهي x و y ، عندما يُزاح رأس المنشور مسافة y_0 عن المحور x ، حيث $|y_0| \leq 3h$.

ارسم منحنيين لقيمتي المركبتين الأفقية والرأسية للقوة بدلالة الإزاحة الرأسية y_0 .

(3) افترض أن عرض حزمة الليزر في اتجاه z يساوي 1 mm، وأن سمكها (في اتجاه y) يساوي $80 \mu\text{m}$. وللمنشور القيم $\alpha = 30^\circ$ ، و $h = 10 \mu\text{m}$ ، و $n = 1.5$ ، و $w = 1 \text{ mm}$ ، و $\rho = 2.5 \text{ g cm}^{-3}$.

ما قدرة الليزر، بالواط، اللازمة لموازنة قوة الجاذبية المؤثرة على هذا المنشور (في اتجاه $-y$) عندما يكون رأس المنشور على مسافة $y_0 = -h/2$ ($= -5 \mu\text{m}$) أسفل محور حزمة الليزر؟

(4) افترض إجراء هذه التجربة في غياب الجاذبية، باستخدام المنشور نفسه وحزمة ليزر لها الأبعاد نفسها كما في (3)، ولكن بشدة عظمى $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$.

ما الزمن الدوري للاهتزازات التي تحدث عندما يُزاح المنشور ثم يُترك على مسافة $y = h/20$ من الخط المركزي لحزمة الليزر؟

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

1. إذا كانت β زاوية الانكسار عند الوجه العلوي، وكانت γ زاوية السقوط عند القاعدة، فإن

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad \gamma = \alpha - \beta, \quad \sin \theta = n \sin \gamma.$$

وبصورة مكافئة،

$$\theta = \arcsin \left[\sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right) \right].$$

2. نعرف

$$u = \frac{y_0}{h}, \quad C_x = \frac{I_0 wh}{4c} (1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0 wh}{4c} \sin \theta.$$

عندئذٍ

$$F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases}$$

$$F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \text{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}$$

منحنى القوة الأفقية زوجي، وله قمة مركزية على هيئة قطع مكافئ ومقاطع خارجية مستقيمة. ومنحنى القوة الرأسية فردي ويمثل قوة إرجاع، وله مقاطع مركزية تربيعية ومقاطع خارجية ثابتة.

3. القدرة الكلية لليزر المطلوبة هي

$$P \simeq 33 \text{ W}.$$

والشدة العظمى المقابلة هي $I_0 \simeq 8.3 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}$.

4. يعطي تقريب الاهتزازات الصغيرة

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho ch^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}} \simeq 1.12 \times 10^{-2} \text{ s}.$$

وبالإبقاء على اللاخطية الضعيفة عند السعة المحددة $h/20$ ، نحصل على

$$T \simeq 1.13 \times 10^{-2} \text{ s},$$

أي أطول بنحو 1.08%.

الحل

نستخدم البصريات الهندسية، ونهمل الامتصاص بما يلائم المنشور الشفاف، ونطبّق شرط انعدام الانعكاس المنصوص عليه. ونحسب القوى إلى الرتبة الرائدة في نسبة سرعة المنشور إلى c .

(1) الانكسار وزاوية الخروج

يصنع الوجه العلوي زاوية α مع القاعدة الرأسية. ولذلك يتجه العمودي عليه نحو الداخل بزاوية α أسفل الأفقي. وتكون زاوية سقوط الشعاع الأفقي الوارد هي α .

لتكن β زاوية الانكسار المقيسة من هذا العمودي. يعطي قانون سنيل

$$\sin \alpha = n \sin \beta.$$

ومن ثم ينتشر الشعاع داخل المنشور بزاوية

$$\gamma = \alpha - \beta$$

أسفل الأفقي.

العمودي على وجه الخروج أفقي، لذا فإن γ هي أيضاً زاوية السقوط هناك. وبتطبيق قانون سنيل مرة أخرى،

$$n \sin \gamma = \sin \theta.$$

إذن

$$\theta = \arcsin \left[n \sin \left(\alpha - \arcsin \frac{\sin \alpha}{n} \right) \right].$$

نحصل على تعبير مكافئ بتوسيع دالة الجيب:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= n(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

ومن ثم

$$\boxed{\sin \theta = \sin \alpha \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right).}$$

يتطلب مسار الشعاع النافذ الموضح في الشكل 3 تحقق الشرط $n \sin \gamma \leq 1$ ، وهو متحقق للقيم العددية المعطاة في المسألة. وبالتناظر، يخرج الضوء الذي يدخل من الوجه السفلي بزاوية θ أعلى الأفقي.

(2) مركبتا القوة والمنحنيان البيانيان

توزيع الشدة هو

$$I(y) = I_0 \left(1 - \frac{|y|}{4h} \right), \quad |y| \leq 4h.$$

لتكن P_+ و P_- قدرتي الضوء الداخل من الوجهين العلوي والسفلي. عندما يكون الرأس عند y_0 ، تكون الفترتان الناتجتان عن إسقاط هذين الوجهين عمودياً على الحزمة الواردة، على الترتيب،

$$[y_0, y_0 + h], \quad [y_0 - h, y_0].$$

وبالتالي

$$P_+ = w \int_{y_0}^{y_0+h} I(y) dy, \quad P_- = w \int_{y_0-h}^{y_0} I(y) dy.$$

عنصر المساحة هنا هو $w dy$ ، أي المساحة المسقط عمودياً على الضوء الوارد. ولا حاجة إلى عامل إضافي يتعلق بزاوية السقوط.

يحمل الضوء ذو القدرة P في الهواء زخمًا بمعدل P/c . وبالنسبة إلى الضوء الداخل من الوجه العلوي، يكون اتجاهها الورود والخروج

$$(1, 0), \quad (\cos \theta, -\sin \theta).$$

تساوي القوة المؤثرة على المنشور تدفق الزخم الوارد مطروحاً منه تدفق الزخم الخارج:

$$\mathbf{F}_+ = \frac{P_+}{c}(1 - \cos \theta, \sin \theta).$$

وبالمثل،

$$\mathbf{F}_- = \frac{P_-}{c}(1 - \cos \theta, -\sin \theta).$$

وبالجمع،

$$\boxed{F_x = \frac{1 - \cos \theta}{c}(P_+ + P_-), \quad F_y = \frac{\sin \theta}{c}(P_+ - P_-).}$$

لحساب القدرتين، نضع $u = y_0/h$. إحدى الدوال الأصلية لتوزيع الشدة اللابُعدي هي

$$J(v) = v - \frac{v|v|}{8}, \quad J'(v) = 1 - \frac{|v|}{4}.$$

وعليه،

$$\frac{P_+}{I_0wh} = J(u+1) - J(u), \quad \frac{P_-}{I_0wh} = J(u) - J(u-1).$$

عندما يكون $|u| \leq 1$ ، يمتد المنشور على جانبي محور الحزمة. وبحساب هذين التعبيرين نحصل على

$$P_+ + P_- = \frac{I_0wh}{4}(7 - u^2),$$

$$P_+ - P_- = -\frac{I_0wh}{4}u(2 - |u|).$$

عندما يكون $1 \leq |u| \leq 3$ ، يقع المنشور بأكمله على أحد جانبي المحور، حيث تتغير الشدة خطياً:

$$P_+ + P_- = \frac{I_0wh}{4}(8 - 2|u|),$$

$$P_+ - P_- = -\frac{I_0wh}{4}\text{sgn}(u).$$

إذن، بوضع

$$C_x = \frac{I_0wh}{4c}(1 - \cos \theta), \quad C_y = \frac{I_0wh}{4c}\sin \theta,$$

تكون القوتان المطلوبتان

$$\boxed{F_x = C_x \begin{cases} 7 - u^2, & |u| \leq 1, \\ 8 - 2|u|, & 1 \leq |u| \leq 3, \end{cases} \quad F_y = -C_y \begin{cases} u(2 - |u|), & |u| \leq 1, \\ \text{sgn}(u), & 1 \leq |u| \leq 3. \end{cases}}$$

قيم المنحنين البيانيين هي:

F_y/C_y	F_x/C_x	$u = y_0/h$
1	2	-3
1	4	-2
1	6	-1
0.75	6.75	-1/2
0	7	0
-0.75	6.75	1/2
-1	6	1

F_y/C_y	F_x/C_x	$u = y_0/h$
-1	4	2
-1	2	3

لرسم منحنى القوة الأفقية، ارسم قطعاً مكافئاً مفتوحاً إلى الأسفل بين $u = -1$ و $u = 1$ ، تبلغ قيمته العظمى $7C_x$ عند الأصل. ثم أكمل بمقطعين مستقيمين يصلان إلى $2C_x$ عند $u = \pm 3$. وتبقى القوة موجبة في كامل الفترة المحددة.

لرسم منحنى القوة الرأسية، ارسم القيمة الثابتة $+C_y$ من $u = -3$ إلى -1 ، ثم المقطع التربيعي المتناقص إلى الصفر عند $u = 0$. اعكس هذا المقطع بالنسبة إلى الأصل ليصل إلى $-C_y$ عند $u = 1$ ، ثم واصل أفقياً إلى $u = 3$. وميله عند الأصل هو $-2C_y/h$. وتتصل مقاطع كل من منحنىي القوة بميل متصل عند $u = \pm 1$.

القوة الرأسية قوة إرجاع: فالمنشور الواقع أسفل المحور يتلقى ضوءاً أكثر على وجهه العلوي فيُدفع إلى الأعلى؛ أما فوق المحور فيُدفع إلى الأسفل.

(3) قدرة الليزر اللازمة لموازنة الجاذبية

المسافة من الرأس إلى القاعدة هي

$$d = h \tan \alpha.$$

ومن ثم فإن الحجم والكتلة هما

$$V = \frac{1}{2}(2h)d w = h^2 w \tan \alpha, \quad m = \rho h^2 w \tan \alpha.$$

باستخدام وحدات النظام الدولي،

$$h = 10^{-5} \text{ m}, \quad w = 10^{-3} \text{ m}, \quad \rho = 2.5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

فنحصل على

$$m = 1.4434 \times 10^{-10} \text{ kg}, \quad mg = 1.4145 \times 10^{-9} \text{ N}.$$

عند $\alpha = 30^\circ$ و $n = 1.5$ ،

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\sin 30^\circ}{1.5} \right) = 19.471^\circ,$$

$$\gamma = 10.529^\circ, \quad \theta = 15.908^\circ, \quad \sin \theta = 0.274094.$$

عند $y_0 = -h/2$ ، يكون لدينا $u = -1/2$ ، مما يعطي

$$F_y = \frac{3}{4}C_y = \frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c}.$$

يتطلب الاتزان الرأسي

$$\frac{3I_0 w h \sin \theta}{16c} = \rho h^2 w \tan \alpha g.$$

ومن ثم

$$I_0 = \frac{16\rho g h c \tan \alpha}{3 \sin \theta} = 8.2571 \times 10^8 \text{ W m}^{-2}.$$

القدرة المطلوبة هي قدرة الحزمة بأكملها. فسمكها $80 \mu\text{m}$ يساوي $8h$ ، والمساحة تحت منحنى توزيع شدتها المثلاثي تساوي $4hI_0$. إذن

$$P = w \int_{-4h}^{4h} I(y) dy = 4hwI_0.$$

بالتعويض نحصل على

$$P = 4(10^{-5})(10^{-3})(8.2571 \times 10^8) = 33.03 \text{ W}.$$

وبالتالي

$$P \simeq 33 \text{ W.}$$

يوازن ذلك قوة الجاذبية في اتجاه y ، كما هو مطلوب. وتبقى القوة الضوئية الأفقية موجبة.

(4) الزمن الدوري للاهتزاز في غياب الجاذبية

طوال الاهتزاز المذكور، يكون $|y_0| \leq h/20 < h$. ويمكن كتابة تعبير القوة في المنطقة المركزية على الصورة

$$F_y = -\frac{I_0 w \sin \theta}{2c} y_0 \left(1 - \frac{|y_0|}{2h}\right).$$

نعرف

$$K = \frac{I_0 w \sin \theta}{2c}.$$

عند السعة $a = h/20$ ، يختلف العامل اللاخطي عن الواحد بمقدار لا يتجاوز

$$\frac{a}{2h} = \frac{1}{40} = 2.5\%.$$

لذلك يكون التقريب الرائد حركة توافقية بسيطة:

$$m\ddot{y}_0 = -Ky_0, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}.$$

باستخدام الكتلة المحسوبة أعلاه،

$$\omega_0^2 = \frac{I_0 \sin \theta}{2\rho ch^2 \tan \alpha},$$

و

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2\rho ch^2 \tan \alpha}{I_0 \sin \theta}}.$$

عند $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$ ،

$$K = 4.5682 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-1}, \quad \omega_0 = 562.58 \text{ s}^{-1},$$

وبالتالي

$$T_0 = 0.0111685 \text{ s} \approx 11.2 \text{ ms.}$$

يمكن أيضاً حساب التصحيح الناتج عن السعة المحدودة باستخدام التعبير الدقيق للقوة. وباختيار طاقة الوضع مساوية للصفر عند الأصل،

$$U(y_0) = \frac{K}{2} y_0^2 - \frac{K}{6h} |y_0|^3.$$

إذا ترك المنشور من السكون عند $y_0 = a$ ، نحصل على

$$\frac{1}{2} m \dot{y}_0^2 = U(a) - U(y_0).$$

بالتناظر، يساوي الزمن الدوري أربعة أمثال زمن الانتقال من 0 إلى a :

$$T = 4 \sqrt{\frac{m}{K}} \int_0^a \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2 - (a^3 - y^3)/(3h)}}.$$

بوضع $s = y/a$

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2 - \frac{a}{3h}(1 - s^3)}}.$$

عند $a/h = 1/20$ ، يعطي الحساب العددي

$$\frac{T}{T_0} = 1.01079,$$

ومن ثم

$$T = 0.0112890 \text{ s} \approx 11.3 \text{ ms.}$$

إذن يبلغ الزمن الدوري نحو 0.011 s؛ ويكون تقريب الاهتزازات الصغيرة دقيقاً في حدود نحو 1.1% عند السعة المحددة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: حزمة إلكترونات

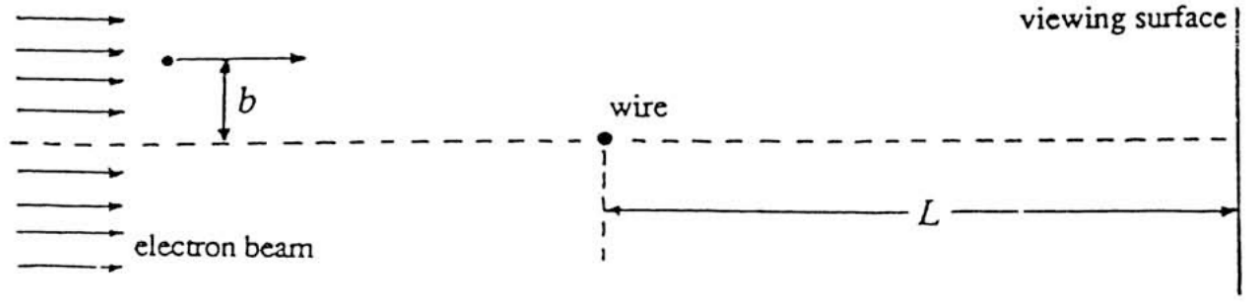
جدول المعلومات العامة

الكمية	الرمز	القيمة
متوسط نصف قطر الأرض	R_E	$6.4 \times 10^6 \text{ m}$
تسارع الجاذبية	g	9.8 m s^{-2}
ثابت الجذب العام لنيوتن	G	$6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
سمحية الفراغ	ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
نفاذية الفراغ	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ القيمة الصحيحة $8.85 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$ [كذا في الأصل؛ القيمة الصحيحة $4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$].
سرعة الضوء في الفراغ (أو الهواء)	c	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
الشحنة الأولية	e	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
كتلة الإلكترون	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
كتلة البروتون	m_p	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
ثابت بلانك	h	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
ثابت أفوغادرو	N_A	$6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
ثابت بولتزمان	k	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
ثابت الغازات المولي	R	$8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

المسألة النظرية 3

حزمة إلكترونات

يُنتج جهد تسريع V_0 حزمة منتظمة ومتوازية من الإلكترونات عالية الطاقة. تمر الإلكترونات بجوار سلك نحاسي رفيع وطويل وموجب الشحنة، مشدود عمودياً على الاتجاه الأصلي للحزمة، كما هو موضح في الشكل. يرمز b إلى المسافة التي كان الإلكترون سيمر عندها بجوار السلك لو كان السلك غير مشحون. ثم تواصل الإلكترونات حركتها نحو شاشة (سطح مشاهدة) تقع على مسافة L ($b \gg$) بعد السلك، كما هو موضح. تمتد الحزمة في البداية إلى المسافتين $\pm b_{\max}$ بالنسبة إلى محور السلك. ويمكن اعتبار كل من عرض الحزمة وطول السلك لا نهائياً في الاتجاه العمودي على الورقة.



يمتد السلك المشحون عمودياً على مستوى الورقة. الرسم التخطيطي ليس بمقياس رسم.

ترد هنا بعض المعطيات العددية؛ وستجد معطيات عديدة أخرى في الجدول في مقدمة ورقة الامتحان:

10^{-6} m	$= r_0 =$	نصف قطر السلك
10^{-4} m	$= b_{\text{max}} =$	القيمة العظمى لـ b
$4.4 \times 10^{-11} \text{ C m}^{-1}$	$= q_{\text{linear}} =$	الشحنة الكهربائية لكل وحدة طول من السلك
$2 \times 10^4 \text{ V}$	$= V_0 =$	جهد التسريع
0.3 m	$= L =$	المسافة من السلك إلى شاشة الرصد

ملاحظة: في الأجزاء 2 - 4، استخدم تقريبات معقولة تؤدي إلى حلول تحليلية وعددية.

- احسب المجال الكهربائي $\mathbf{E}$ الذي يولده السلك. ارسم مخططاً لمقدار E بدلالة المسافة من محور السلك.
- استخدم الفيزياء الكلاسيكية لحساب الانحراف الزاوي للإلكترون. أجز ذلك لقيم المعامل b التي لا يصطدم عندها الإلكترون بالسلك. لتكن θ_{final} الزاوية (الصغيرة) بين السرعة الابتدائية للإلكترون وسرعته عند وصوله إلى سطح المشاهدة. ومن ثم احسب θ_{final} .
- احسب وارسم نمط مواضع اصطدام الإلكترونات (أي توزيع الشدة) على شاشة المشاهدة وفق تنبؤ الفيزياء الكلاسيكية.
- تنبأ فيزياء الكم باختلاف كبير في توزيع الشدة (مقارنة بما تنبأ به الفيزياء الكلاسيكية). ارسم النمط الذي يتنبأ به الوصف الكمي، وقدم تفاصيل كمية.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

ليكن y الإحداثي المستعرض ذا الإشارة على الشاشة، بحيث يقع $y = 0$ مقابل السلك مباشرة، ولتكن I_0 شدة الحزمة الساقطة.

1. يتجه المجال شعاعياً نحو الخارج:

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} 0, & r < r_0, \\ \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}, & r > r_0. \end{cases}$$

يقفز مقداره من الصفر إلى $7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}$ عند السطح، ثم يتناقص وفق $1/r$.

2. تنحرف الإلكترونات المارة على أي من الجانبين نحو المحور بزاوية متساوية تقريباً:

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0} = 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad.}$$

3. مع أخذ نصف قطر السلك المحدود في الحسبان، يكون النمط الكلاسيكي

$$I_{cl}(y) \simeq \begin{cases} 2I_0, & |y| < 17.6 \mu\text{m}, \\ I_0, & 17.6 \mu\text{m} < |y| < 81.4 \mu\text{m}, \\ 0, & |y| > 81.4 \mu\text{m}. \end{cases}$$

وهكذا يبلغ عرض الشريط المركزي ذي الشدة المضاعفة نحو $35 \mu\text{m}$ ، ويبلغ عرض المنطقة المضاءة بأكملها نحو $163 \mu\text{m}$.

4. للإلكترونات المترابطة، تحتوي منطقة التراكب المركزية على أهداف تداخل:

$$\lambda_{dB} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}, \quad d \simeq \frac{\lambda_{dB}}{2\theta_{final}} = 7.0 \times 10^{-8} \text{ m} = 70 \text{ nm}.$$

بعيداً عن حواف الغلاف،

$$I_q(y) \simeq 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right)$$

في منطقة التراكب. يكون المركز مضيئاً؛ وتبلغ القيم العظمى المتتالية $4I_0$ ، بينما تبلغ القيم الصغرى الصفر. ويوجد نحو 5.1×10^2 دورة هدية عبر منطقة التراكب. وتبقى شدة الجناحين عند I_0 تقريباً.

الحل

(1) المجال الكهربائي

النحاس موصل، لذا ينعدم مجاله الكهروستاتيكي داخل السلك. وخارج سلك يمكن اعتباره لا نهائياً الطول، يقتضي التناظر الأسطواني أن يكون المجال شعاعياً وألا يعتمد إلا على المسافة r من محوره.

نطبق قانون غاوس على سطح أسطواني متحد المحور مع السلك، نصف قطره $r_0 > r$ وطوله ℓ :

$$E(r)(2\pi r\ell) = \frac{q_{linear}\ell}{\epsilon_0}.$$

إذن،

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q_{linear}}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}.$$

يتجه المجال نحو الخارج لأن السلك موجب الشحنة.

عددياً،

$$\frac{q_{linear}}{2\pi\epsilon_0} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{2\pi(8.85 \times 10^{-12})} = 0.791 \text{ V},$$

ومن ثم

$$E(r_0^+) = \frac{0.791}{10^{-6}} \simeq 7.9 \times 10^5 \text{ V m}^{-1}.$$

ينطبق الرسم البياني المطلوب على المحور الأفقي عندما $0 \leq r < r_0$ ، ويقفز إلى أعلى عند $r = r_0$ ، ثم يتبع منحنى متناقصاً وفق $1/r$ ، مقترباً من الصفر تقاربياً. فعلى سبيل المثال،

$$E(10r_0) = 7.9 \times 10^4 \text{ V m}^{-1}, \quad E(100r_0) = 7.9 \times 10^3 \text{ V m}^{-1}.$$

(2) الانحراف الزاوي

نختار المحور x في اتجاه الحزمة الساقطة والمحور y عمودياً عليه في مستوى الشكل. يمر السلك بالنقطة $x = y = 0$.

نستخدم علاقة الطاقة غير النسبية:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV_0, \quad v = \sqrt{\frac{2eV_0}{m_e}} \simeq 8.4 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

هنا $eV_0/(m_e c^2) \simeq 0.039$ ، لذا تُعد المعالجة غير النسبية تقريباً معقولاً لهذه المسألة.

نحسب الدفع المستعرض الصغير على طول المسار غير المنحرف $y = b$ ، مع اعتبار v ثابتة. ويتفق ذلك مع ضعف جهد السلك: ففرق الجهد بين r_0 و L لا يتجاوز

$$\Phi(r_0) - \Phi(L) = \frac{q_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{L}{r_0}\right) \simeq 10 \text{ V},$$

وهو أصغر بكثير من $V_0 = 2 \times 10^4 \text{ V}$.

بالنسبة إلى إلكترون يمر فوق السلك، حيث $b > 0$ ، تكون القوة المستعرضة

$$F_y = -eE_y = -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0} \frac{b}{x^2 + b^2}.$$

بما أن $dt = dx/v$ ، فإن التغير في الزخم المستعرض حتى وصول الإلكترون إلى $x = L$ يساوي تقريباً

$$\begin{aligned} \Delta p_y &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^L F_y dx \\ &= -\frac{eq_{\text{linear}}}{2\pi\epsilon_0 v} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{L}{b}\right) \right]. \end{aligned}$$

يفترض حد التكامل في جهة قدوم الحزمة أن الحزمة الابتدائية محددة على مسافة من السلك كبيرة بما يكفي مقارنة بـ b . لانحراف صغير،

$$\theta_{\text{final}} \simeq \frac{|\Delta p_y|}{m_e v}.$$

وباستخدام $m_e v^2 = 2eV_0$ ،

$$\theta_{\text{final}}(b) \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\pi\epsilon_0 V_0} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{L}{b}\right) \right].$$

ولأن $b \gg L$ ، فإن المقدار بين القوسين يساوي π تقريباً، فنحصل على

$$\boxed{\theta_{\text{final}} \simeq \frac{q_{\text{linear}}}{4\epsilon_0 V_0}.$$

إذن، ضمن هذه الدقة، لا يعتمد الانحراف على معامل التصادم:

$$\theta_{\text{final}} = \frac{4.4 \times 10^{-11}}{4(8.85 \times 10^{-12})(2 \times 10^4)} \simeq 6.2 \times 10^{-5} \text{ rad}.$$

حتى عند $b = b_{\text{max}}$ ، لا يتجاوز المقدار النسبي للتصحيح الناتج عن وقوع الشاشة على مسافة محدودة في المقدار بين القوسين نحو 10^{-4} .

ينحرف النصف العلوي من الحزمة إلى أسفل، وينحرف نصفها السفلي إلى أعلى. وضمن التقريب نفسه، تحقق الإلكترونات النافذة $b > r_0$. ويُهمل التغير الصغير في الحد الفاصل للتصادم الناجم عن التجاذب.

(3) توزيع الشدة الكلاسيكي

نكتب

$$\alpha = \theta_{\text{final}}, \quad a = L\alpha \simeq 18.6 \text{ } \mu\text{m}.$$

بما أن $L \gg b_{\text{max}}$ ، يمكن اعتبار الانحراف واقعاً قرب السلك. ولذلك يصل إلكترون ساقط على مسافة b فوق المحور إلى

$$y = b - a,$$

بينما يصل إلكترون ساقط على المسافة نفسها أسفل المحور إلى

$$y = -b + a.$$

لا تنفذ إلا الإلكترونات التي تحقق $r_0 < b < b_{\max}$. ونتيجة لذلك، يشغل الجزءان النافذان المجالين التاليين على الشاشة:

$$\text{الجزء الساقط العلوي: } r_0 - a < y < b_{\max} - a,$$

$$\text{الجزء الساقط السفلي: } -b_{\max} + a < y < a - r_0.$$

عدياً، هذان المجالان هما

$$-17.6 < y < 81.4 \mu\text{m}$$

و

$$-81.4 < y < 17.6 \mu\text{m},$$

على الترتيب.

لكل جزء، تحقق علاقة التحويل $|dy/db| = 1$. ولذلك يعطي انحفاظ تدفق الإلكترونات شدة I_0 حيث يصل جزء واحد، وشدة $2I_0$ حيث يصل كلا الجزأين.

نعرف

$$w = a - r_0 \simeq 17.6 \mu\text{m}, \quad Y = b_{\max} - a \simeq 81.4 \mu\text{m}.$$

عندئذ

$$I_{\text{cl}}(y) = \begin{cases} 2I_0, & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

يكون الرسم متناظراً حول $y = 0$. بدءاً من اليسار، تقفز الشدة من الصفر إلى I_0 عند $-81.4 \mu\text{m}$ ، وترتفع إلى $2I_0$ عند $-17.6 \mu\text{m}$ ، وتهبط إلى I_0 عند $+17.6 \mu\text{m}$ ، ثم تعود إلى الصفر عند $+81.4 \mu\text{m}$. وتمتد الأشرطة بانتظام موازيةً للسلك.

وتكون عروضها

$$\text{عرض منطقة التراكب المركزية} = 2(a - r_0) \simeq 35.3 \mu\text{m},$$

$$\text{عرض كل جناح} = b_{\max} - 2a + r_0 \simeq 63.7 \mu\text{m}.$$

لا يوجد ظل هندسي مركزي: فالجزآن المنحرفان يتراكبان.

للتحقق من التدفق،

$$\int I_{\text{cl}}(y) dy = 2I_0(b_{\max} - r_0),$$

وهو بالضبط التدفق الساقط بعد استبعاد الإلكترونات التي يعترضها السلك في هذا التقريب.

(4) توزيع الشدة الكمي

في حالة حزمة ساقطة مثالية أحادية الطاقة ومتراصة، يتداخل الجزءان الماران على جانبي السلك المتقابلين حيث يتراكبان.

طول موجة دي برولي للإلكترون هو

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eV_0}},$$

ومن ثم

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31})(1.60 \times 10^{-19})(2 \times 10^4)}} \simeq 8.7 \times 10^{-12} \text{ m}.$$

داخل منطقة التراكب، تنتشر الموجتان المستويتان تقريباً بزاويتين α و $-\alpha$ بالنسبة إلى الاتجاه الأصلي. ولذلك تكون المركبتان المستعرضتان لمتجهي الموجة هما $+k \sin \alpha$ و $-k \sin \alpha$ ، حيث

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{dB}}.$$

يجعل التناظر الانعكاسي طوريهما متساويين عند $y = 0$. ويكون فرق الطور بينهما عند الإحداثي y على الشاشة

$$\Delta\phi(y) = 2ky \sin \alpha.$$

تسهم كل موجة على حدة بشدة I_0 ، لذا

$$\begin{aligned} I_q(y) &= I_0 + I_0 + 2I_0 \cos \Delta\phi \\ &= 4I_0 \cos^2(ky \sin \alpha). \end{aligned}$$

وعليه، فإن المسافة بين الأهداب هي

$$d = \frac{\lambda_{dB}}{2 \sin \alpha} \simeq \frac{\lambda_{dB}}{2\alpha},$$

مما يعطي

$$d \simeq 6.99 \times 10^{-8} \text{ m} \simeq 70 \text{ nm}.$$

ضمن دقة تقريب الغلاف الهندسي،

$$I_q(y) \simeq \begin{cases} 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi y}{d}\right), & |y| < w, \\ I_0, & w < |y| < Y, \\ 0, & |y| > Y. \end{cases}$$

للرسم المطلوب الغلاف العام نفسه للنمط الكلاسيكي، لكن الهضبة المركزية تُستبدل بأهداب متقاربة:

- تظهر الأهداب المضيئة عند $y = nd$ ، بشدة $4I_0$ ؛ حيث n عدد صحيح.
- تظهر الأهداب المظلمة عند $y = (n + \frac{1}{2})d$ ، بشدة تساوي الصفر.
- الهدب المركزي عند $y = 0$ مضيء.
- الأهداب مستقيمة وموازية للسلك.
- متوسط شدتها هو $2I_0$ ، وهو يساوي الشدة المركزية الكلاسيكية.

العدد التقريبي للدورات الهدبية عبر منطقة التراكب هو

$$N \simeq \frac{2w}{d} = \frac{35.3 \times 10^{-6}}{6.99 \times 10^{-8}} \simeq 5.1 \times 10^2.$$

يجعل الحيود حدود الغلاف ملساء، لذا يُقصد بالتعبير المعرف على أجزاء وصف التوزيع بعيداً عن تلك الحواف. ويكون مقياس الحيود المستعرض ذي الصلة من رتبة

$$\sqrt{\lambda_{dB} L} \simeq 1.6 \text{ } \mu\text{m}.$$

يقيس الكاشف الذي لا يستطيع تمييز الأهداب المتباعدة بمقدار 70 nm متوسط شدتها، فيستعيد التوزيع الكلاسيكي تقريباً.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.