

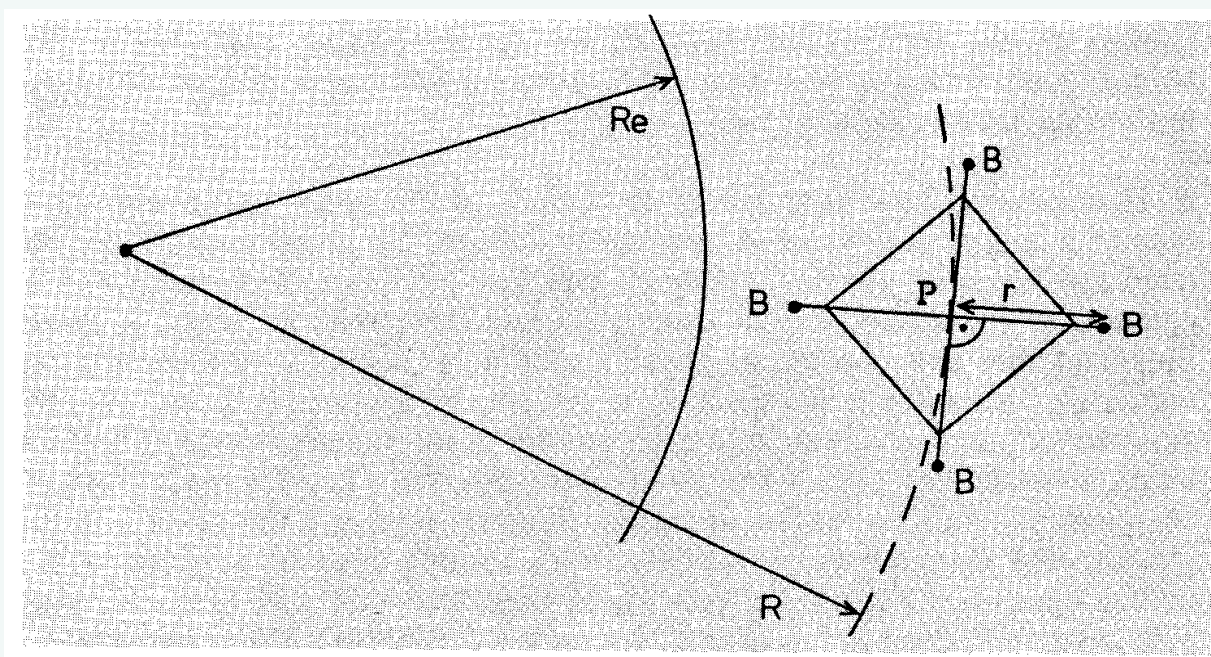
IPhO 1992

理论题与解答 · 芬兰埃斯波（赫尔辛基） · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1992/

题目 1：旋转的卫星

图中所示的卫星在地球赤道平面内沿近似圆形轨道绕地球运行。卫星由一个质量为零的中心物体 P 和四个外围小物体 B 组成。四个物体 B 的质量均为 m ：它们通过长度为 r 的不可伸长的细长绳与 P 相连。这五个物体，即 P 和四个物体 B ，均位于赤道平面内，并可在此平面内转动。四根径向绳之间还用细绳相互连接，使径向绳之间的夹角始终保持为 90° 。



系统中设置这些连接绳是为了防止各个物体 B 发生振荡，否则运动分析将变得极其复杂。所有物体 B 都以相同的角速度绕 P 转动，相对于恒星的角速度为 ω 。因此，卫星的运动如同一个刚体。

请针对一般情形分析以下问题，考虑所有可能的情况，包括物体 B 的两个转动方向。还需对问题 (1) 和 (2) 中求出的某些量给出数值——所要求的量及所需数值数据列在题目末尾。

1) 图中所示的卫星处于这样的位置：对于不同的绳， $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{R}$ 平行同向、平行反向或垂直。（矢量 $\mathbf{r}$ 从物体 P 指向一个物体 B ，长度为 r ；矢量 $\mathbf{R}$ 从地球质心指向物体 P 。）

求在这四个位置中，径向绳分别对相应物体 B 施加的力。这些位置近似对应于力的最大值和最小值。

2) 四个物体 B 内部各装有一台相同的太阳能驱动机器，与径向绳相连。每当绳中的力接近最大值时（如上一问所述），各机器便在短时间内将绳向 B 内收进；当张力最小时，再放出相同长度的绳。收进和放出的绳长为径向绳平均长度的 1%。平均长度不随时间变化。

一台机器转换的净功率在卫星转动一周内的平均值是多少？

净功率定义为 $\frac{W_1 - W_2}{T}$ ，其中 W_1 是机器收绳时对绳所做的功， W_2 是放绳时绳对机器所做的功， T 是转动周期。

3) 讨论机器的作用所引起的卫星运动变化。特别是，分析背面表格中所列各量可能发生的变化。

将你的结果和说明填入表格，并且不要忘记提交。

数据：

请对以下情况给出数值答案：

中心物体的轨道半径为 $R = R_E + 500 \text{ km}$ 。

径向绳的平均长度为 $r = 100 \text{ km}$ 。

因此，卫星系统的直径为 200 km 。

物体 B 的质量为 $m = 1000 \text{ kg}$ 。

初始时，四个物体 B 相对于恒星以每小时 10 周的转速绕中心物体 P 转动。

绳的质量可忽略不计，中心物体 P 的质量为零。

提示：

考虑 ω 的两个转动方向。

不要求精确解。精度为 5% 的结果完全可以接受。

忽略月球和太阳的引力作用。

有用数据：

物理量	数值
地球质量	$M_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
万有引力常量	$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
地球赤道半径	$R_E = 6378 \text{ km}$
将乘积 $M_E G$ 记为 K 。	$K = 3.983 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

国家代码：

答题表

请填写此表，作为答案的一部分。必要时写出等式或不等式，和 / 或简短说明。

下列物理量.....	在何种条件下增大.....	在何种条件下减小.....	在何种条件下保持不变.....	在所有情况下均保持不变。
卫星的轨道速度				是 ☐ 否 ☐
卫星的轨道半径 R				是 ☐ 否 ☐
卫星的角速度 ω				是 ☐ 否 ☐
卫星的引力势能				是 ☐ 否 ☐

机器做功能否使卫星到达更高的轨道？

是 ☐

否 ☐

卫星能否到达任意高的轨道，实际上脱离地球的引力影响？为什么？

答案：.....

题目译自官方英文原文。

答案

取轨道运动方向为正方向，并定义

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{R^3}} > 0, \quad \epsilon = \frac{\Delta r}{r} = 0.01.$$

自转角速度 ω 带有正负号：顺行自转为正，逆行自转为负。

1. 保留 r/R 的最低阶项，绳的力指向 P，其大小为

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2)$$

和

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

对于给定的两个自转方向，均有

$$F_{\max} \simeq 30.7 \text{ kN}, \quad F_{\min} \simeq 30.3 \text{ kN}, \quad F_{\max} - F_{\min} \simeq 367 \text{ N}.$$

在此精度下，要使柔性绳在完整的一周转动中保持绷紧，需满足 $|\omega| \geq \Omega$ 。

2. 一台机器提供的平均净功率为

$$\overline{P}_1 = \frac{3\epsilon mr^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|.$$

数值为

$$\overline{P}_1 = 1.91 \text{ kW} \quad (\text{顺行}), \quad \overline{P}_1 = 2.17 \text{ kW} \quad (\text{逆行}).$$

同步转动时， $\omega = \Omega$ ，不存在反复的收放绳循环，平均功率为零。

3. 对于描述长期演化的刚体模型，填写后的表格为：

物理量	增大的条件	减小的条件	保持不变的条件	是否在所有情况下均不变？
轨道速率 v	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	否
轨道半径 R	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	否
带正负号的自转角速度 ω	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	否
引力势能 U	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	否

因此，逆行自转的角速度大小会增大。形式上，当顺行自转满足 $0 < \omega < \Omega$ 时，自转会减慢，随后反向；下文将说明柔性绳在此区间内的可行性限制。

更高的轨道： 可以，在轨道上升的演化分支上即可，特别是在逆行自转足够快时。

任意高的轨道： 在理想的牛顿力学模型内可以。越来越负的自转角动量补偿了不断增大的轨道角动量。轨道半径没有有限的上限，不过到达无穷远需要无限长的时间和无界增大的自转能量。

解答

我们采用以下小参数：

$$\frac{r}{R} = \frac{100}{6878} \simeq 0.0145, \quad \epsilon = 0.01.$$

我们保留引力梯度力的最低阶项，以及微小收放绳行程所做功的最低阶项。在每个收放绳循环内，将轨道视为圆形，而轨道半径和平均自转角速度缓慢变化。平均转动惯量为

$$I \simeq 4mr^2.$$

1) 四根径向绳中的力

令 $\mathbf{e}_R$ 从地球指向 P，并用 $\boldsymbol{\rho} = r\mathbf{e}$ 表示一个外围物体相对于 P 的位置。将地球的引力加速度在 P 附近展开，得到

$$\mathbf{g}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{g}(\mathbf{R}) \simeq \frac{K}{R^3} [3(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\rho}].$$

这就是潮汐加速度。

在指定的四个位置，保留到上述阶数时，此加速度沿相对于 P 的径向。若 θ 为 $\mathbf{e}$ 与 $\mathbf{e}_R$ 的夹角，则其径向分量为

$$\delta g_r = \Omega^2 r (3 \cos^2 \theta - 1).$$

外围物体相对于 P 所需的径向加速度为 $-\omega^2 r$ 。取从 P 向外为正方向，由牛顿第二定律得到

$$-m\omega^2 r = m\delta g_r - F,$$

其中 F 为绳向内施加的力。因此

$$F = mr [\omega^2 + \Omega^2 (3 \cos^2 \theta - 1)].$$

对于外侧和内侧的物体， $\cos^2 \theta = 1$ ：

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2).$$

地球引力的差异有使这些物体远离 P 的趋势，因此增大了所需的张力。

对于两个横向物体， $\cos^2 \theta = 0$ ：

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

此时潮汐力指向 P，提供了一部分向心力。

因此，

$$\Delta F = F_{\text{max}} - F_{\text{min}} = 3mr\Omega^2 = \frac{3Kmr}{R^3}.$$

近侧和远侧物体之间的微小差异超出了此一阶近似的范围。

利用题给数据，

$$R = 6.878 \times 10^6 \text{ m}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{3.983 \times 10^{14}}{(6.878 \times 10^6)^3}} = 1.1064 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1},$$

以及

$$|\omega| = \frac{10(2\pi)}{3600} = 1.74533 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}.$$

两个力的特征值为

$$mr\omega^2 = 3.04617 \times 10^4 \text{ N}, \quad mr\Omega^2 = 122.412 \text{ N}.$$

所以,

$$F_{\max} \simeq 3.07066 \times 10^4 \text{ N}, \quad F_{\min} \simeq 3.03393 \times 10^4 \text{ N},$$

取舍后得到答案 30.7 kN 和 30.3 kN。

转动方向不影响这些力, 因为它们取决于 ω^2 。

由 $F_{\min} \geq 0$ 得到一项物理限制:

$$|\omega| \geq \Omega.$$

若 $|\omega| < \Omega$, 则在横向位置需要一个径向压力。柔性绳无法提供这种力, 因此假定的刚体转动无法维持完整的一个周期。

2) 一台机器的净功率

收放绳的行程为

$$\Delta r = \epsilon r = 1000 \text{ m}.$$

保留此行程的一阶项, 一次收绳行程中提供的功与随后一次放绳行程中回收的功分别为

$$W_{\text{in}} \simeq F_{\max} \Delta r, \quad W_{\text{out}} \simeq F_{\min} \Delta r.$$

因此, 一次收放循环提供的功为

$$\Delta W = (F_{\max} - F_{\min}) \Delta r = 3\epsilon mr^2 \Omega^2.$$

在此阶数下, 离心项的贡献相互抵消。数值为

$$\Delta W \simeq 3.67236 \times 10^5 \text{ J}.$$

地球与卫星的连线相对于恒星以角速度 Ω 转动。因此, 绳相对于该连线的方位角变化率为

$$\dot{\theta} = \omega - \Omega.$$

每根绳在每个相对转动周期内经历两次张力最大值和两次张力最小值。相对转动周期为

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega - \Omega|},$$

因此, 一台机器在该周期内所做的净功为 $2\Delta W$ 。于是

$$\boxed{\bar{P}_1 = \frac{2\Delta W}{T_{\text{rel}}} = \frac{3\epsilon mr^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|}.$$

对于顺行自转, $\omega = |\omega|$:

$$T_{\text{rel}} = 384.37 \text{ s}, \quad \bar{P}_1 = \frac{2(3.67236 \times 10^5)}{384.37} \simeq \boxed{1.91 \text{ kW}}.$$

对于逆行自转, $\omega = -|\omega|$:

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega| + \Omega} = 338.54 \text{ s},$$

$$\overline{P}_1 \simeq \boxed{2.17 \text{ kW}}.$$

当 $\omega = \Omega$ 时，相对于地球的方位固定。绳不会反复经过张力最大值和最小值，因此持续运行的平均功率为零。

3) 卫星运动的变化

将卫星的总质量记为 $M = 4m$ 。在所保留的精度下，其轨道速率、角动量、机械能和引力势能分别为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{K}{R}}, \\ L &= M\sqrt{KR} + I\omega, \\ E &= -\frac{KM}{2R} + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad U = -\frac{KM}{R}. \end{aligned}$$

每个引力都指向地心，因此对地心的力矩为零。机器施加的是内力。因此，忽略辐射压时，

$$\boxed{\dot{L} = 0}.$$

求导得到

$$\frac{M}{2}\sqrt{\frac{K}{R}}\dot{R} + I\dot{\omega} = 0,$$

即

$$\boxed{\dot{R} = -\frac{2I}{MR\Omega}\dot{\omega} = -\frac{2r^2}{R\Omega}\dot{\omega}}.$$

因此，带正负号的自转角动量增大会使轨道半径减小。

四台机器提供的总机械功率为 $P_{\text{tot}} = 4\overline{P}_1$ 。对能量求导，并代入角动量守恒关系，得到

$$P_{\text{tot}} = \frac{KM}{2R^2}\dot{R} + I\omega\dot{\omega} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}.$$

因此

$$\boxed{P_{\text{tot}} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}}.$$

由于运行中的机器提供正的净功率，

$$\text{sgn}(\dot{\omega}) = \text{sgn}(\omega - \Omega).$$

更具体地说，周期平均变化率为

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{3\epsilon\Omega^2}{\pi}\text{sgn}(\omega - \Omega)}$$

和

$$\boxed{\dot{R} = -\frac{6\epsilon r^2\Omega}{\pi R}\text{sgn}(\omega - \Omega)}.$$

这些关系确定了答题表中的所有条目：

- **较快的顺行自转**， $\omega > \Omega$ ：自转加快，轨道收缩，轨道速率增大，引力势能减小。
- **逆行自转**， $\omega < 0$ ：带正负号的自转角速度减小，因此逆行自转的角速度大小增大。轨道扩张，轨道速率减小，引力势能增大。

- **形式上**, $0 < \omega < \Omega$: 顺行自转减慢, 同时轨道扩张。持续运行会使自转反向。此区间受第 (1) 问中所得柔性绳限制的约束。
- **同步转动**, $\omega = \Omega$: 不存在反复的收放绳动作, 因此机器不会引起长期变化。

特别地, 轨道速率和势能变化率的正负号可直接由下式确定:

$$\dot{v} = -\frac{v}{2R}\dot{R}, \quad \dot{U} = \frac{KM}{R^2}\dot{R}.$$

若将表格中的角速度一行理解为不带正负号的转动速率, 则: 对于较快的顺行自转和逆行自转, $|\omega|$ 均增大; 对于形式上的较慢顺行自转情形, 它会减小, 直至自转反向。

到达更高及任意高轨道的可能性

一颗逆向自转足够快的卫星满足 $\omega < -\Omega$, 因此其绳始终承受张力, 且 $\dot{R} > 0$ 。所以它能够到达更高的轨道。

角动量守恒并不对轨道半径施加有限的上限。初始状态与之后某一圆轨道状态之间满足

$$M\sqrt{KR} + I\omega = M\sqrt{KR_0} + I\omega_0.$$

由于 $I/M = r^2$,

$$\omega(R) = \omega_0 - \frac{\sqrt{K}}{r^2}(\sqrt{R} - \sqrt{R_0}).$$

随着 R 增大, 越来越大的正轨道角动量由越来越负的自转角动量补偿。太阳能驱动的机器提供所需能量。上升速率逐渐减小。在轨道上升的演化分支上,

$$\dot{R} = \frac{6\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} R^{-5/2},$$

积分得到

$$R(t)^{7/2} = R_0^{7/2} + \frac{21\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} t.$$

在此理想模型中, 任意有限的目标半径都能在有限时间后到达, 但 $R \rightarrow \infty$ 要求 $t \rightarrow \infty$ 。此外, 所需的自转能量会无界增长:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \sim \frac{2mK}{r^2}R \quad (R \rightarrow \infty).$$

因此, 在所述理想化假设下, 可以到达任意高的有限轨道, 而逃逸至无穷远只是这一通过收放绳逐步提升圆轨道的过程的渐近极限。

解答已与官方解答核对。

题目 2: 线性分子的纵向运动

本题将分析线性分子的纵向运动, 即沿分子轴线方向的运动。不考虑分子的转动和弯曲。假设分子由 N 个原子组成, 其质量分别为 $m_1, m_2, \dots, m_N$ 。假设每个原子都通过化学键与相邻原子连接。将每个化学键近似为遵守胡克定律的无质量弹簧, 其劲度系数分别为 $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$ 。该分子如图 1 所示。

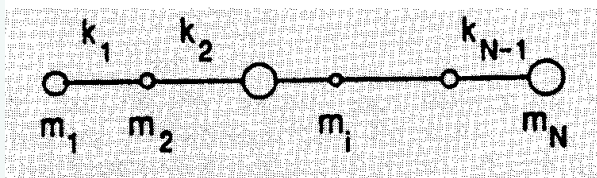


图 1. 由 N 个原子组成的线性分子。

解答本题时，请使用以下事实：线性分子的纵向振动是若干独立振动的叠加，这些独立振动称为简正振动或简正模。在一个简正模中，所有原子都以相同的频率做简谐运动，并同时通过各自的平衡位置。

问题

1) 设 x_i 为原子 i 相对于其平衡位置的位移。将作用于每个原子的力 F_i 表示为位移 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 和劲度系数 $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$ 的函数。各力 $F_1, F_2, \dots, F_N$ 之间存在什么关系？利用这一关系，推导位移 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 之间的关系，并说明这一关系的物理意义。

2) 分析双原子分子 AB 的运动（图 2）。弹簧的劲度系数为 k 。推导作用于原子 A 和 B 的力的表达式。确定该分子可能的运动类型。确定相应的振动频率，并解释所得结果。特别是，为什么两个原子的质量不同，却能以相同的频率振动？

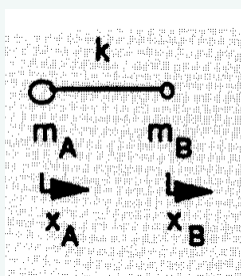


图 2. 双原子分子 AB

3) 分析三原子分子 BA_2 的运动（图 3）

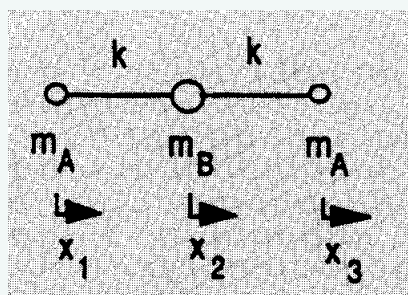


图 3. 三原子分子 BA_2 。

将每个原子所受的合力表示为仅与该原子自身位移有关的函数。推导该分子可能的运动及相应的振动频率。

4) CO_2 分子的两个纵向振动模的频率分别为 3.998×10^{13} Hz 和 7.042×10^{13} Hz。求 CO 键劲度系数的数值。

你认为，这种对分子化学键结构的近似能在多大程度上描述真实分子的振动？

碳原子的原子质量 = 12 amu，氧原子的原子质量 = 16 amu。原子质量单位 = 1.660×10^{-27} kg。

答案

1. 各原子所受的力为

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i(x_{i+1} - x_i) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \\ F_N &= -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}). \end{aligned}$$

它们满足 $\sum_i F_i = 0$, 因此

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

质心做匀速运动。对于在质心静止参考系中描述的内部振动,

$$\sum_i m_i x_i = 0.$$

2. 对于 AB,

$$F_A = k(x_B - x_A), \quad F_B = k(x_A - x_B).$$

存在频率为零的整体平移和一个内部振动模:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

在这一振动中, $m_A x_A = -m_B x_B$: 两原子的运动方向相反, 振幅与各自的质量成反比。

3. 对于 BA_2 , 各简正模为:

运动	位移比 $x_1 : x_2 : x_3$	频率
整体平移	1 : 1 : 1	0
对称伸缩	1 : 0 : -1	$f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}$
反对称伸缩	$1 : -\frac{2m_A}{m_B} : 1$	$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right)}$

在对称伸缩中,

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

在反对称伸缩中,

$$\begin{aligned} F_1 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_1, \\ F_2 &= -k \left(2 + \frac{m_B}{m_A} \right) x_2, \\ F_3 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_3. \end{aligned}$$

一般运动是这两种振动与匀速平移的叠加。

4. 两个实测频率分别给出

$$k_s = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}, \quad k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

因此，具有代表性的键劲度系数近似值为 $k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}$ 。不存在一个 k 值能同时精确符合这两个频率：模型预测的频率比为 1.915，而观测到的频率比为 1.761。该模型给出了合理的近似，这一比值的偏差约为 9%。

解答

1) 力与质心

对所有位移，均取沿分子轴线的同一方向为正方向。连接原子 i 和 $i + 1$ 的弹簧的长度变化为

$$\Delta \ell_i = x_{i+1} - x_i.$$

因此，这些遵守胡克定律的理想弹簧的势能为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} k_i (x_{i+1} - x_i)^2.$$

利用 $F_i = -\partial U / \partial x_i$ ，可得

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i(x_{i+1} - x_i) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \end{aligned}$$

以及

$$F_N = -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}).$$

每根弹簧对其两端施加大小相等、方向相反的力。因此，

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0.$$

由牛顿第二定律可得

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i x_i \right) = 0,$$

所以

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

记 $M_{\text{tot}} = \sum_i m_i$ ，则质心位移为

$$X_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M_{\text{tot}}}.$$

因此，质心的速度恒定，这与不受外力的孤立系统所应具有的性质一致。

对于频率非零的简正模，

$$x_i = a_i \cos(\omega t + \phi).$$

由于 $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$,

$$0 = \sum_i m_i \ddot{x}_i = -\omega^2 \sum_i m_i x_i.$$

因此

$$\sum_i m_i x_i = 0 \quad (\omega \neq 0).$$

内部振动使质心保持不动。匀速平移可以独立地叠加在其上。

2) 双原子分子 AB

弹簧的伸长量为 $x_B - x_A$ ，所以

$$m_A \ddot{x}_A = k(x_B - x_A), \quad m_B \ddot{x}_B = -k(x_B - x_A).$$

引入质心位移和相对位移：

$$X = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}, \quad q = x_B - x_A.$$

将运动方程相加，得到

$$\ddot{X} = 0.$$

将两原子的加速度相减，得到

$$\ddot{q} = -k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) q.$$

因此

$$X = X_0 + Vt, \quad q = Q \cos(\omega t + \phi),$$

其中

$$\omega^2 = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) = \frac{k}{\mu}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

完整的运动为

$$\begin{aligned} x_A &= X_0 + Vt - \frac{m_B}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi), \\ x_B &= X_0 + Vt + \frac{m_A}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi). \end{aligned}$$

存在两种独立的运动类型：

- **整体平移：** $q = 0$ ，因此 $x_A = x_B = X_0 + Vt$ 。弹簧没有形变，两个原子所受的力均为零。这是零频率模。
- **内部振动：** 在质心静止参考系中，

$$m_A x_A + m_B x_B = 0.$$

两原子以相反的相位振动，其频率为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

为理解质量不同的两原子为何具有相同频率，消去另一原子的位移：

$$x_B = -\frac{m_A}{m_B}x_A, \quad x_A = -\frac{m_B}{m_A}x_B.$$

于是

$$F_A = -k\left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right)x_A, \quad F_B = -k\left(1 + \frac{m_B}{m_A}\right)x_B.$$

将各回复力系数除以相应的质量，得到相同的值：

$$\frac{k(1 + m_A/m_B)}{m_A} = \frac{k(1 + m_B/m_A)}{m_B} = k\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right).$$

因此，两原子具有相同的角频率。质量的不同对应于振幅的不同：

$$\boxed{\frac{|x_A|_{\max}}{|x_B|_{\max}} = \frac{m_B}{m_A}}.$$

较重的原子，其位移振幅和加速度振幅都较小。

3) 三原子分子 BA_2

记 $m = m_A$ 、 $M = m_B$ 。由胡克定律可得

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1), \\ M\ddot{x}_2 &= k(x_1 + x_3 - 2x_2), \\ m\ddot{x}_3 &= k(x_2 - x_3). \end{aligned}}$$

整体平移 $x_1 = x_2 = x_3 = X_0 + Vt$ 使三个原子所受的力均为零。

对于内部振动，在质心静止参考系中分析：

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0.$$

定义两端原子位移的平均值及差值的一半：

$$s = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad d = \frac{x_1 - x_3}{2}.$$

于是

$$x_1 = s + d, \quad x_3 = s - d, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

将两端原子的运动方程相加和相减，得到

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= k(x_2 - s) = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)s, \\ m\ddot{d} &= -kd. \end{aligned}$$

这对应于两个独立的简谐振子，因此给出了全部内部简正模。

对称伸缩模。 令 $s = 0$ 。于是

$$x_2 = 0, \quad x_1 = d, \quad x_3 = -d.$$

中间原子保持静止，两端原子以相等的振幅沿相反方向运动。两个化学键同时伸长、同时缩短。

用各原子自身的位移表示其所受的力，得到

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

因此

$$\omega_s^2 = \frac{k}{m_A}, \quad f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}.$$

这一频率与中间原子的质量无关，因为在整个运动过程中，作用于它的两个弹簧力始终相互抵消。

反对称伸缩模。 令 $d = 0$ 。于是

$$x_1 = x_3 = s, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

两端原子同向运动，中间原子则沿相反方向运动。一个化学键伸长时，另一个化学键缩短。

对于两端原子，分别有

$$F_1 = k(x_2 - x_1) = -k \left(1 + \frac{2m}{M} \right) x_1,$$

$$F_3 = -k \left(1 + \frac{2m}{M} \right) x_3.$$

对于中间原子，利用 $x_1 + x_3 = -(M/m)x_2$:

$$F_2 = k(x_1 + x_3 - 2x_2) = -k \left(2 + \frac{M}{m} \right) x_2.$$

三个方程均给出

$$\omega_a^2 = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right), \quad f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right)}.$$

这些仅含单个原子位移的力的表达式适用于上述相应的简正模。一般的叠加运动遵从原来的耦合力方程。

完整的运动可写为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (X_0 + Vt) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_A/m_B \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此，存在两个纵向振动模和一个平移模。

4) 键劲度系数的数值与模型评估

对于 CO_2 ，两端原子为氧原子，中间原子为碳原子：

$$m_A = m_O = 16(1.660 \times 10^{-27}) = 2.656 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

$$m_B = m_C = 12(1.660 \times 10^{-27}) = 1.992 \times 10^{-26} \text{ kg}.$$

由于 $f_a > f_s$ ，取

$$f_s = 3.998 \times 10^{13} \text{ Hz}, \quad f_a = 7.042 \times 10^{13} \text{ Hz}.$$

由对称模，

$$k_s = m_O(2\pi f_s)^2,$$

所以

$$k_s = (2.656 \times 10^{-26}) [2\pi(3.998 \times 10^{13})]^2 = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

由反对称模,

$$k_a = \frac{(2\pi f_a)^2}{1/m_O + 2/m_C},$$

所以

$$k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

这些估计表明, 键劲度系数约为

$$k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

两者的差异说明, 该模型无法用单一劲度系数同时重现实测的两个频率。

频率比提供了一种与 k 无关的直接一致性检验。模型预测

$$\frac{f_a}{f_s} = \sqrt{1 + \frac{2m_O}{m_C}} = \sqrt{1 + \frac{32}{12}} = \sqrt{\frac{11}{3}} = 1.915.$$

实测的比值为

$$\left(\frac{f_a}{f_s}\right)_{\text{measured}} = \frac{7.042}{3.998} = 1.761.$$

例如, 拟合较低的频率后, 预测得到

$$f_a = 1.91485(3.998 \times 10^{13}) = 7.656 \times 10^{13} \text{ Hz},$$

这比实测的较高频率高出 8.71%。

因此, 理想弹簧模型能够合理地近似描述这两种伸缩运动及其频率的量级。但其定量精度有限: 真实分子的回复力可能包含两个化学键伸长量之间的耦合, 也可能偏离胡克定律, 而该模型忽略了这些因素。

解答已与官方解答核对。

题目 3: 阳光下的卫星

在本题中, 你将计算一颗空间卫星的温度。假设卫星是一个直径为 1 m 的球体。卫星各处始终保持相同的温度。卫星的整个球面都涂有同一种涂层。卫星位于地球附近, 但不在地球的阴影中。

太阳的表面温度 (其黑体表面温度) 为 $T_{\text{sun}} = 6000 \text{ K}$, 半径为 $6.96 \times 10^8 \text{ m}$ 。太阳与地球之间的距离为 $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ 。阳光使卫星升温, 直到卫星的黑体辐射功率等于它从阳光中吸收的功率。黑体单位面积的辐射功率由斯特藩-玻尔兹曼定律 $P = \sigma T^4$ 给出, 其中 σ 是普适常量, 数值为 $5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ 。作为第一步近似, 可以假设太阳和卫星都吸收照射到它们上的全部电磁辐射。

- 1) 求卫星温度 T 的表达式。这个温度的数值是多少?
- 2) 温度为 T 的物体, 其黑体辐射谱 $u(T, f)$ 遵循普朗克辐射定律

$$u(T, f) df = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1}$$

其中 $\eta = hf/kT$ ，而 $u(T, f)df$ 是频率区间 $[f, f + df]$ 内电磁辐射的能量密度。式中， $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$ 是普朗克常量， $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ 是玻尔兹曼常量， $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ 是光速。

将黑体辐射谱对所有频率 f 和辐射方向积分，就得到单位面积的总辐射功率 $P = \sigma T^4$ ，即上述斯特藩-玻尔兹曼定律所给出的结果。

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$$

图中给出了归一化谱

$$\frac{c^3 h^3}{8\pi k^4} \frac{u(T, f)}{T^4}$$

随 η 的变化关系。

在许多应用中，需要使卫星的温度尽可能低。为了冷却卫星，工程师使用一种反射涂层，它能反射频率高于某一截止频率的光，但不妨碍较低频率的热辐射逸出。假设这一（突变的）截止频率对应于 $hf/k = 1200 \text{ K}$ 。

卫星新的平衡温度是多少？不需要给出精确答案。因此，不要进行繁琐的积分；在必要时作出近似。对整个范围的积分为

$$\int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

而 $\eta^3/(e^\eta - 1)$ 在 $\eta = 2.82$ 处取得最大值。当 η 很小时，可以将指数函数展开为 $e^\eta \simeq 1 + \eta$ 。

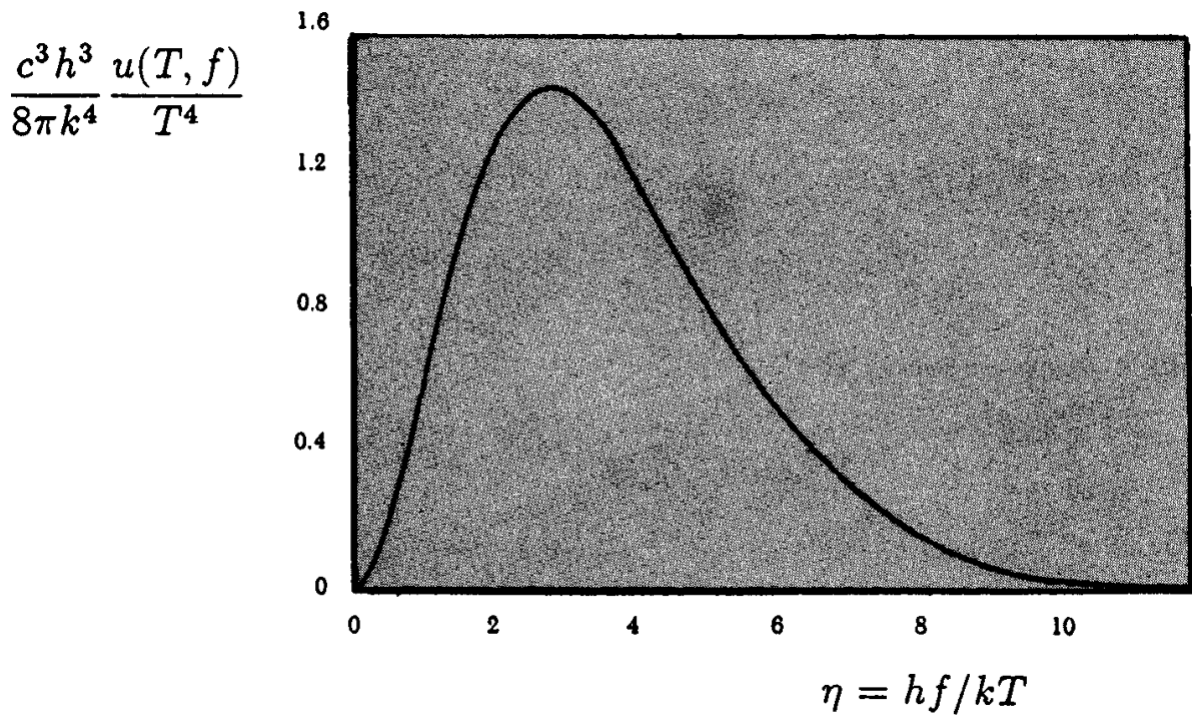
3) 现在考虑一颗真实的卫星，它带有向外伸展的太阳能电池板，用于发电。卫星内部电子设备耗散的热量构成一个额外的热源。假设内部热源的功率为 1 kW ，在上述第 2) 问的情况下，卫星的平衡温度是多少？

4) 某制造商以如下方式宣传一种特殊涂料：

“这种涂料能反射全部入射辐射（包括可见光和红外线）的 90% 以上，同时却能像黑体一样在所有频率（可见光和红外线）上辐射，从而带走卫星的大量热量。因此，这种涂料有助于使卫星的温度尽可能低。”

这样的涂料可能存在吗？为什么？

5) 为了使一个与本题所考虑的卫星类似的球形物体的温度高于第 1) 问中计算出的温度，涂层应具有哪些性质？



题目译自官方英文原文。

答案

1. 设太阳半径为 $R_{\odot}$ ，太阳与卫星之间的距离为 D ，则

$$T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{2D}} \simeq 289 \text{ K.}$$

2. 使用题目给出的小 η 近似，

$$T_2 \simeq T_1 \left[\frac{5}{\pi^4} \left(\frac{1200 \text{ K}}{T_{\text{sun}}} \right)^3 \right]^{1/4} \simeq 41 \text{ K.}$$

3. 考虑涂层对高频热辐射的抑制作用， $T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K}$ (约为 317 K)。
4. **不可能**。基尔霍夫定律要求每个频率上的吸收率与发射率相等。一个反射率超过 90% 的表面，不可能同时在这些频率上像黑体一样辐射。
5. 涂层应当**强烈吸收太阳辐射**，而仅**微弱地发射热红外辐射**：在太阳辐射的频率范围内具有高吸收率，在卫星自身较低的热辐射频率范围内具有高反射率。

解答

设卫星半径为 $a = 0.50 \text{ m}$ ，太阳半径为 $R_{\odot}$ ，太阳与卫星之间的距离为 D 。我们采用题目给出的辐射平衡模型，忽略来自地球的辐射及其他热交换。

1) 黑体卫星

太阳的光度为

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\text{sun}}^4.$$

因此，卫星所在位置的太阳辐照度为

$$S = \frac{L_{\odot}}{4\pi D^2} = \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2.$$

卫星以其投影面积 πa^2 截获阳光，而其整个表面 $4\pi a^2$ 都向外辐射。因此，热平衡要求

$$\pi a^2 S = 4\pi a^2 \sigma T_1^4.$$

于是

$$T_1^4 = \frac{1}{4} T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2, \quad \boxed{T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{2D}}}.$$

代入数值得

$$T_1 = 6000 \sqrt{\frac{6.96 \times 10^8}{2(1.5 \times 10^{11})}} \text{ K} = \boxed{289 \text{ K}}.$$

由于吸收功率和辐射功率都与 a^2 成正比，卫星半径在计算中被约去。

2) 带有频率选择性涂层的卫星

记

$$\Theta = \frac{hf_c}{k} = 1200 \text{ K},$$

其中 f_c 为截止频率。理想的带涂层卫星在低于 f_c 的频率上像黑体一样吸收和发射，而在高于 f_c 的频率上，反射同时抑制了吸收和发射。光谱吸收率与光谱发射率相等的这一关系就是基尔霍夫定律。

将无量纲截止值 x 以下的黑体辐射功率所占比例定义为

$$F(x) = \frac{15}{\pi^4} \int_0^x \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta.$$

对于温度为 T 的物体，相应的截止值为 $x = \Theta/T$ 。因此，平衡方程为

$$\pi a^2 \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}}\right) = 4\pi a^2 \sigma T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2}\right).$$

利用第 1 问的结果，

$$T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2}\right) = T_1^4 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}}\right).$$

对于阳光，

$$x_{\odot} = \frac{1200}{6000} = 0.20.$$

在这一很小的区间内，始终有 $e^\eta - 1 \simeq \eta$ ，所以

$$F(0.20) \simeq \frac{15}{\pi^4} \int_0^{0.20} \eta^2 d\eta = \frac{5(0.20)^3}{\pi^4} \simeq 4.11 \times 10^{-4}.$$

因此，入射太阳辐射功率中只有约 0.041% 被吸收。

我们先假设冷却后的卫星几乎全部热辐射的频率都低于截止频率，即 $F(\Theta/T_2) \simeq 1$ 。于是

$$T_2 \simeq T_1 [F(0.20)]^{1/4} = 289(4.11 \times 10^{-4})^{1/4} \text{ K},$$

得到

$$T_2 \simeq 41 \text{ K}.$$

这一假设是自洽的：卫星的截止值为

$$\frac{\Theta}{T_2} \simeq \frac{1200}{41} \simeq 29,$$

远高于光谱峰值所在的 $\eta = 2.82$ 。被排除的高频热辐射尾部可以忽略。

3) 加入一个 1 kW 的内部热源

现在需要明确用到辐射面积：

$$A = 4\pi a^2 = \pi \text{ m}^2.$$

施加涂层之前，吸收的太阳辐射功率为

$$Q_{\odot,0} = A\sigma T_1^4 \simeq 1.24 \times 10^3 \text{ W}.$$

施加涂层之后，它变为

$$Q_{\odot} = Q_{\odot,0} F(0.20) \simeq (1.24 \times 10^3)(4.11 \times 10^{-4}) \simeq 0.51 \text{ W}.$$

与内部热源 $Q_{\text{int}} = 1000 \text{ W}$ 相比，这一功率可以忽略。平衡关系为

$$A\sigma T_3^4 F\left(\frac{1200 \text{ K}}{T_3}\right) = 1000 \text{ W} + Q_{\odot}.$$

这里不能取 $F = 1$ 。即使是辐射不受频率限制的黑体，也需要达到温度

$$\left(\frac{1000 \text{ W}}{A\sigma}\right)^{1/4} \simeq 274 \text{ K},$$

此时截止值就已位于 $\eta_c \simeq 4.38$ 。热辐射谱中有相当一部分位于这一截止值以上，因此带涂层的卫星必须达到更高的温度。

我们可以直接根据题目所给的图估计所需的比例。在 $\eta_c = 3.8$ 附近，曲线下的面积约为

$$\int_0^{3.8} \frac{\eta^3}{e^\eta - 1} d\eta \simeq 3.6.$$

由于总面积为 $\pi^4/15 \simeq 6.49$,

$$F(3.8) \simeq \frac{3.6}{6.49} \simeq 0.55.$$

代入得

$$T_3 \simeq \left[\frac{1000.5 \text{ W}}{(\pi \text{ m}^2)(5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4})(3.6/6.49)} \right]^{1/4} \simeq 317 \text{ K}.$$

其对应的截止值为 $1200/317 \simeq 3.79$ ，证实了图解估计的合理性。因此，

$$T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K}.$$

4) 广告中的涂料

基尔霍夫热辐射定律指出，在给定频率和相应方向上，

$$\epsilon_f = \alpha_f,$$

其中 ϵ_f 为发射率， α_f 为吸收率。

由能量守恒可得

$$\alpha_f + \rho_f + \tau_f = 1,$$

其中 ρ_f 和 τ_f 分别为反射率和透射率。因此，若 $\rho_f > 0.90$ ，则

$$\alpha_f < 0.10 \implies \epsilon_f < 0.10.$$

而黑体辐射要求 $\epsilon_f = 1$ 。

因此，对于被动涂料，所宣称的在相同频率上同时具有高反射率和黑体热辐射能力是不可能的。这会违反基尔霍夫定律和热辐射的细致平衡。

5) 使温度升高的涂层

这种涂层应具有与第 2 问中的涂层相反的光谱选择性：

- 在承载大部分太阳辐射的较高频率范围内具有强吸收能力。
- 在承载卫星大部分热辐射的较低红外频率范围内，发射能力弱，相应地反射能力强。

设 $\bar{\alpha}_\odot$ 为对太阳光谱取平均的吸收率， $\bar{\epsilon}_T$ 为对卫星在温度 T 下的黑体辐射谱取平均的发射率。没有内部加热时，平衡关系为

$$\pi a^2 \bar{\alpha}_\odot S = 4\pi a^2 \bar{\epsilon}_T \sigma T^4.$$

因此

$$T = T_1 \left(\frac{\bar{\alpha}_\odot}{\bar{\epsilon}_T} \right)^{1/4}.$$

平衡温度高于 T_1 的条件为

$$\bar{\alpha}_\odot > \bar{\epsilon}_T.$$

这与基尔霍夫定律相容，因为这两个平均值对不同的频率范围赋予了不同的权重。性质与频率无关的灰体涂层具有相等的吸收率和发射率，因此不会改变平衡温度。

解答已与官方解答核对。