

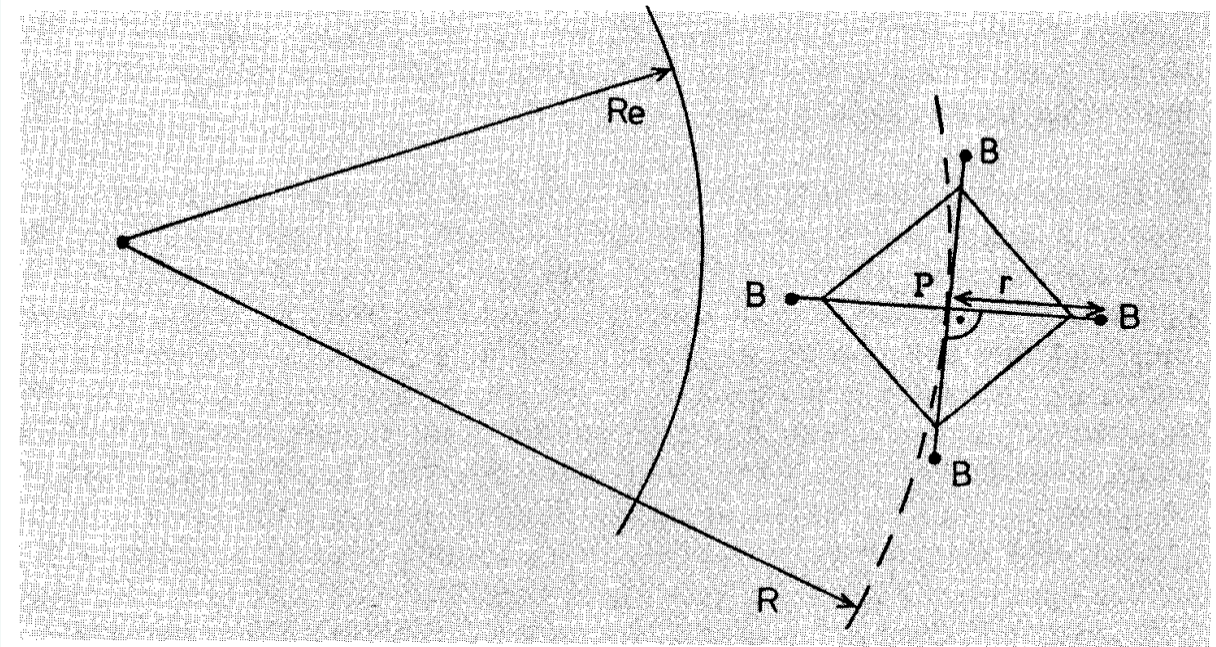
IPhO 1992

Teorik sorular ve çözümler · Espoo (Helsinki), Finlandiya · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1992/

Soru 1: Dönen Bir Uydu

Şekilde, Dünya'nın ekvator düzleminde yaklaşık dairesel bir yörüngede Dünya'nın çevresinde dolanan bir uydu gösterilmektedir. Uydu, kütsüz bir merkezî P cismi ile çevredeki dört küçük B cisiminden oluşmaktadır. Dört B cisminin her birinin kütlesi m' 'dir: bu cisimler, uzunluğu r olan, uzamayan uzun ve ince tellerle P'ye bağlanmıştır. P ve dört B cisiminden oluşan bu beş cismin tümü ekvator düzlemiyle aynı düzlemdedir ve bu düzlem içinde dönebilmektedir. Dört radyal tel, aralarındaki açıları sabit ve 90° tutan başka ince tellerle birbirine bağlanmıştır.



Bağlantı telleri, B cisimlerinin ayrı ayrı salınım hareketi yapmasını önlemek amacıyla sisteme eklenmiştir; aksi hâlde bu salınımlar hareketlerin analizini son derece karmaşık hâle getirirdi. B cisimlerinin tümü, P çevresinde sabit yıldızlara göre ω olan aynı açısal hızla dönmektedir. Dolayısıyla uydu bir katı cisim gibi davranmaktadır.

Aşağıdaki soruları, B cisimlerinin her iki dönme yönü de dâhil olmak üzere olası tüm durumları göz önüne alarak genel durum için inceleyiniz. Ayrıca (1) ve (2) numaralı sorularda bulunan bazı niceliklerin sayısal değerlerini de elde ediniz; istenen nicelikler ve gerekli sayısal veriler sorunun sonunda listelenmiştir.

1) Çizimde uydu, farklı teller için $\mathbf{r}$ 'nin $\mathbf{R}$ 'ye paralel, zıt paralel veya dik olduğu konumda gösterilmektedir. ($\mathbf{r}$ vektörü P cisiminden bir B cisimine yönelir ve uzunluğu r 'dir; $\mathbf{R}$ vektörü Dünya'nın kütle merkezinden P cisimine yönelir.)

Bu dört konumun her birinde, radyal bir telin B cisimlerinden birine uyguladığı kuvveti belirleyiniz. Bu konumlar yaklaşık olarak en büyük ve en küçük kuvvetlere karşılık gelmektedir.

2) Dört B cisminin içinde, güneş enerjisiyle çalışan ve radyal tellere bağlı dört özdeş makine bulunmaktadır. Her makine, teldeki kuvvet en büyük değerine yaklaştığında (önceki soruda belirtildiği gibi), kısa bir süre boyunca teli içeriye, B'ye doğru çeker ve gerilme en küçük değerindeyken aynı uzunlukta teli yeniden dışarı salar. İçeri çekilen ve dışarı salınan tel uzunluğu, radyal telin ortalama uzunluğunun 1%'idir. Ortalama uzunluk zamanla değişmez.

Bir makinenin dönüştürdüğü net gücün, uydunun bir dönüşü boyunca alınan ortalaması nedir?

Net güç $\frac{W_1 - W_2}{T}$ olarak tanımlanmaktadır; burada W_1 , makinenin teli içeri çekerken tel üzerinde yaptığı iş, W_2 , tel dışarı salınırken telin makine üzerinde yaptığı iş ve T dönme periyodudur.

3) Makinelerin çalışmasının uydunun hareketinde yol açtığı değişiklikleri tartışınız. Özellikle, arka sayfadaki tabloda listelenen durumların her birinde meydana gelebilecek değişiklikleri analiz ediniz.

Tabloyu sonuçlarınız ve yorumlarınızla doldurunuz ve teslim etmeyi unutmayınız.

Veriler:

Aşağıdaki durum için sayısal cevaplar istenmektedir:

Merkezî cismin yörüngesinin yarıçapı $R = R_E + 500 \text{ km}$ olarak verilmektedir.

Radyal tellerin ortalama uzunluğu $r = 100 \text{ km}$ 'dir.

Dolayısıyla uydu sisteminin çapı 200 km 'dir.

B cisimlerinin kütleleri $m = 1000 \text{ kg}$ 'dır.

Başlangıçta dört B cismi, yıldızlara göre merkezî P cismi çevresinde saatte 10 devir yapmaktadır.

Tellerin kütleleri ihmal edilebilir ve merkezî P cismi kütsesizdir.

Öneriler:

ω için her iki dönme yönünü de göz önüne alınız.

Tam çözümler beklenmemektedir. 5% doğrulukta sonuçlar tamamen kabul edilebilir.

Ay'ın ve Güneş'in kütleçekim etkisini ihmal ediniz.

Yararlı veriler:

Nicelik	Değer
Dünya'nın kütlesi	$M_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Kütleçekim sabiti	$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Dünya'nın ekvatordaki yarıçapı	$R_E = 6378 \text{ km}$
$M_E G$ çarpımını K ile gösteriniz.	$K = 3.983 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Ülke kodu:

CEVAP TABLOSU

Cevabınızın bir parçası olarak bu tabloyu doldurunuz. Gerekli yerlerde eşitlikler veya eşitsizlikler ve/veya kısa açıklamalar yazınız.

Aşağıda belirtilen nicelik ...	şu koşulda artar: ...	şu koşulda azalır: ...	şu koşulda değişmez: ...	her durumda değişmez.
uydunun yörünge hızı				Evet ☐ Hayır ☐
uydunun yörüngesinin R yarıçapı				Evet ☐ Hayır ☐
uydunun ω açısal hızı				Evet ☐ Hayır ☐
uydunun kütleçekim potansiyel enerjisi				Evet ☐ Hayır ☐

Uydu, makinelerin yaptığı iş sonucunda daha yüksek bir yörüngeye ulaşabilir mi?

Evet ☐

Hayır ☐

Uydu, pratikte Dünya'nın kütleçekim etkisinden çıkacak kadar, istenildiği kadar yüksek bir yörüngeye ulaşabilir mi? Neden?

Cevap:

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Yörüngedeki dolanım yönünü pozitif alalım ve şu tanımları yapalım:

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{R^3}} > 0, \quad \epsilon = \frac{\Delta r}{r} = 0.01.$$

Kendi eksenini etrafındaki dönmenin açısal hızı ω işaretlidir: yörüngedeki dolanım ile aynı yöndeki dönme için pozitif, ters yöndeki dönme için negatiftir.

1. r/R 'nin en düşük mertebesinde, P'ye doğru yönelen tel kuvvetlerinin büyüklükleri

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2)$$

ve

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

Belirtilen dönme yönlerinin her ikisi için de

$$F_{\max} \simeq 30.7 \text{ kN}, \quad F_{\min} \simeq 30.3 \text{ kN}, \quad F_{\max} - F_{\min} \simeq 367 \text{ N}.$$

Bu doğruluk düzeyinde, esnek teller gergin kalırken tam bir dönüşün gerçekleşmesi için $|\omega| \geq \Omega$ gerekir.

2. Bir makinenin sağladığı ortalama net güç

$$\overline{P}_1 = \frac{3\epsilon m r^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|.$$

Sayısal olarak,

$$\overline{P}_1 = 1.91 \text{ kW} \quad (\text{aynı yönde}), \quad \overline{P}_1 = 2.17 \text{ kW} \quad (\text{ters yönde}).$$

Eşzamanlı dönmede, $\omega = \Omega$, tekrarlanan bir pompalama çevrimi yoktur ve ortalama güç sıfırdır.

3. Uzun dönemli değişimleri betimleyen katı cisim modeli için doldurulmuş tablo şöyledir:

Nicelik	Şu koşulda artar	Şu koşulda azalır	Şu koşulda değişmez	Her durumda değişmez mi?
Yörünge sürati v	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	Hayır
Yörünge yarıçapı R	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	Hayır
İşaretli dönme açısal hızı ω	$\omega > \Omega$	$\omega < \Omega$	$\omega = \Omega$	Hayır
Kütleçekim potansiyel enerjisi U	$\omega < \Omega$	$\omega > \Omega$	$\omega = \Omega$	Hayır

Dolayısıyla ters yöndeki dönmenin hız büyüklüğü artar. Biçimsel olarak, $0 < \omega < \Omega$ koşulunu sağlayan aynı yöndeki bir dönme yavaşlar ve ardından yön değiştirir; bu aralıkta esnek tellerle hareketin gerçekleştirilebilirliğine ilişkin sınırlama aşağıda açıklanmıştır.

Daha yüksek yörünge: Evet, yükselen dalda; özellikle yeterince hızlı ters yönde dönme durumunda.

İstenildiği kadar yüksek yörünge: İdeal Newton modelinde evet. Giderek daha negatif olan dönme açısal momentumu, artan yörüngesel açısal momentumu dengeler. Sonlu bir üst yarıçap sınırı yoktur; ancak sonsuza ulaşmak sonsuz zaman ve sınırsız dönme enerjisi gerektirir.

Çözüm

Şu küçük parametreleri kullanıyoruz:

$$\frac{r}{R} = \frac{100}{6878} \simeq 0.0145, \quad \epsilon = 0.01.$$

Kütleçekim gradyanından kaynaklanan kuvvetlerin en düşük mertebeli terimlerini ve küçük tel stroku için işin en düşük mertebeli terimini tutuyoruz. Her pompalama çevriminde yörünge dairesel kabul edilir; yarıçapı ve ortalama dönme açısal hızı yavaşça değişir. Ortalama eylemsizlik momenti

$$I \simeq 4mr^2.$$

1) Dört radyal teldeki kuvvetler

$\mathbf{e}_R$, Dünya'dan P'ye doğru yönelsin ve $\boldsymbol{\rho} = r\mathbf{e}$, çevredeki bir cismin P'ye göre konumunu göstere. Dünya'nın kütleçekim ivmesinin P civarında açılımı

$$\mathbf{g}(\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{g}(\mathbf{R}) \simeq \frac{K}{R^3} [3(\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{e}_R)\mathbf{e}_R - \boldsymbol{\rho}].$$

Bu, gelgit ivmesidir.

Belirtilen dört konumda bu ivme, tutulan mertebede P'ye göre radyaldır. θ , $\mathbf{e}$ ile $\mathbf{e}_R$ arasındaki açı ise ivmenin radyal bileşeni

$$\delta g_r = \Omega^2 r (3 \cos^2 \theta - 1).$$

Çevredeki cismin P'ye göre radyal ivmesinin $-\omega^2 r$ olması gerekir. P'den dışarıya doğru yönü pozitif alırsak Newton'un ikinci yasası

$$-m\omega^2 r = m\delta g_r - F,$$

şeklindedir; burada F , içeriye doğru yönelen tel kuvvetidir. Dolayısıyla

$$F = mr [\omega^2 + \Omega^2 (3 \cos^2 \theta - 1)].$$

Dış ve iç taraftaki cisimler için $\cos^2 \theta = 1$:

$$F_{\parallel} = F_{\text{anti}} \simeq mr(\omega^2 + 2\Omega^2).$$

Dünya'nın farklı konumlarda farklı büyüklükte olan çekimi, bu cisimleri P'den uzaklaştırma eğilimindedir ve gereken gerilmeyi artırır.

Enine doğrultudaki iki cisim için $\cos^2 \theta = 0$:

$$F_{\perp,1} = F_{\perp,2} \simeq mr(\omega^2 - \Omega^2).$$

Burada gelgit kuvveti P'ye doğru yönelir ve merkezci kuvvetin bir kısmını sağlar.

Sonuç olarak,

$$\Delta F = F_{\text{max}} - F_{\text{min}} = 3mr\Omega^2 = \frac{3Kmr}{R^3}.$$

Daha yakın ve daha uzak cisimler arasındaki küçük fark, bu birinci mertebe yaklaşımının kapsamı dışındadır.

Verilen verileri kullanarak,

$$R = 6.878 \times 10^6 \text{ m}, \quad \Omega = \sqrt{\frac{3.983 \times 10^{14}}{(6.878 \times 10^6)^3}} = 1.1064 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1},$$

ve

$$|\omega| = \frac{10(2\pi)}{3600} = 1.74533 \times 10^{-2} \text{ rad s}^{-1}.$$

İki kuvvet ölçeği şöyledir:

$$mr\omega^2 = 3.04617 \times 10^4 \text{ N}, \quad mr\Omega^2 = 122.412 \text{ N}.$$

Dolayısıyla,

$$F_{\text{max}} \simeq 3.07066 \times 10^4 \text{ N}, \quad F_{\text{min}} \simeq 3.03393 \times 10^4 \text{ N},$$

ve yuvarlatılmış cevaplar 30.7 kN ile 30.3 kN olur.

Bu kuvvetler ω^2 'ye bağlı olduğundan dönme yönü onları etkilemez.

$F_{\text{min}} \geq 0$ koşulundan fiziksel bir kısıtlama elde edilir:

$$|\omega| \geq \Omega.$$

$|\omega| < \Omega$ ise enine konumda basma yönünde bir radyal kuvvet gerekir. Esnek bir tel bu kuvveti sağlayamaz; dolayısıyla varsayılan katı cisim dönmesi tam bir çevrim boyunca sürdürülemez.

2) Bir makinenin net gücü

Strok uzunluğu

$$\Delta r = \epsilon r = 1000 \text{ m.}$$

Bu strokun birinci mertebesinde, bir içeri çekme stroku sırasında sağlanan iş ve ardından gelen dışarı salma stroku sırasında geri kazanılan iş şöyledir:

$$W_{\text{in}} \simeq F_{\text{max}} \Delta r, \quad W_{\text{out}} \simeq F_{\text{min}} \Delta r.$$

Böylece bir içeri çekme–dışarı salma çevriminde sağlanan iş

$$\Delta W = (F_{\text{max}} - F_{\text{min}}) \Delta r = 3\epsilon m r^2 \Omega^2.$$

Bu mertebede merkezkaç katkıları birbirini götürür. Sayısal olarak,

$$\Delta W \simeq 3.67236 \times 10^5 \text{ J.}$$

Dünya–uydu doğrusu, yıldızlara göre Ω açısal hızıyla döner. Bu nedenle telin bu doğruya göre yönelimi şu hızla değişir:

$$\dot{\theta} = \omega - \Omega.$$

Her tel, **her bağlı devirde iki maksimumdan ve iki minimumdan** geçer. Bağlı dönme periyodu

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega - \Omega|},$$

olduğundan, bir makinenin bu periyot boyunca yaptığı net iş $2\Delta W$ 'dir. Dolayısıyla

$$\boxed{\bar{P}_1 = \frac{2\Delta W}{T_{\text{rel}}} = \frac{3\epsilon m r^2 \Omega^2}{\pi} |\omega - \Omega|}.$$

Aynı yönde dönme için $\omega = |\omega|$:

$$T_{\text{rel}} = 384.37 \text{ s}, \quad \bar{P}_1 = \frac{2(3.67236 \times 10^5)}{384.37} \simeq \boxed{1.91 \text{ kW}}.$$

Ters yönde dönme için $\omega = -|\omega|$:

$$T_{\text{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega| + \Omega} = 338.54 \text{ s},$$

$$\bar{P}_1 \simeq \boxed{2.17 \text{ kW}}.$$

$\omega = \Omega$ olduğunda Dünya'ya göre yönelim sabittir. Gerilmenin maksimum ve minimumlarından tekrarlanan geçişler olmadığından, sürekli sağlanan ortalama güç sıfırdır.

3) Uydunun hareketindeki değişiklikler

Uydunun toplam kütesini $M = 4m$ olarak yazalım. Kullanılan doğruluk düzeyinde yörünge sürati, açısal momentumu, mekanik enerjisi ve kütleçekim potansiyel enerjisi şöyledir:

$$v = \sqrt{\frac{K}{R}},$$

$$L = M\sqrt{KR} + I\omega,$$

$$E = -\frac{KM}{2R} + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad U = -\frac{KM}{R}.$$

Her kütleçekim kuvveti Dünya'nın merkezine doğru yönelir ve bu nedenle o merkeze göre tork oluşturmaz. Makinelerin uyguladığı kuvvetler iç kuvvetlerdir. Dolayısıyla, ışınlam basıncı ihmal edildiğinde,

$$\dot{L} = 0.$$

Türev alırsak,

$$\frac{M}{2} \sqrt{\frac{K}{R}} \dot{R} + I\dot{\omega} = 0,$$

veya

$$\dot{R} = -\frac{2I}{MR\Omega} \dot{\omega} = -\frac{2r^2}{R\Omega} \dot{\omega}.$$

Dolayısıyla işaretli dönme açısal momentumunun artması, yörünge yarıçapını azaltır.

Dört makine toplam $P_{\text{tot}} = 4\bar{P}_1$ mekanik gücünü sağlar. Enerjinin türevini alıp açısal momentumun korunumunu yerine koyarsak

$$P_{\text{tot}} = \frac{KM}{2R^2} \dot{R} + I\omega\dot{\omega} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}.$$

Böylece

$$P_{\text{tot}} = I(\omega - \Omega)\dot{\omega}.$$

Çalışan makineler pozitif net güç sağladığından,

$$\text{sgn}(\dot{\omega}) = \text{sgn}(\omega - \Omega).$$

Daha açık olarak, çevrim üzerinden ortalaması alınmış değişim hızları

$$\dot{\omega} = \frac{3\epsilon\Omega^2}{\pi} \text{sgn}(\omega - \Omega)$$

ve

$$\dot{R} = -\frac{6\epsilon r^2 \Omega}{\pi R} \text{sgn}(\omega - \Omega).$$

Bu bağıntılar cevap tablosundaki tüm girdileri belirler:

- **Aynı yönde daha hızlı dönme**, $\omega > \Omega$: dönme açısal hızı artar, yörünge daralır, yörünge sürati artar ve kütleçekim potansiyel enerjisi azalır.
- **Ters yönde dönme**, $\omega < 0$: işaretli dönme açısal hızı azalır, dolayısıyla ters yöndeki dönmenin hız büyüklüğü artar. Yörünge genişler, yörünge sürati azalır ve kütleçekim potansiyel enerjisi artar.
- **Biçimsel olarak**, $0 < \omega < \Omega$: yörünge genişlerken aynı yöndeki dönme yavaşlar. Çalışma sürdürülürse dönme yönü tersine döner. Bu aralık, (1) bölümünde bulunan esnek tel sınırlamasına tabidir.
- **Eşzamanlı dönme**, $\omega = \Omega$: tekrarlanan bir çalıştırma yoktur; dolayısıyla makinelerin yol açtığı uzun dönemli bir değişim de yoktur.

Özellikle, yörünge süratinin ve potansiyel enerjinin değişim işaretleri doğrudan şu bağıntılardan çıkar:

$$\dot{v} = -\frac{v}{2R}\dot{R}, \quad \dot{U} = \frac{KM}{R^2}\dot{R}.$$

Tablonun açısal hız satırı işaretli bir dönme hızı olarak yorumlanırsa: $|\omega|$, hem aynı yönde daha hızlı dönme hem de ters yönde dönme durumunda artar; biçimsel olarak ele alınan aynı yönde daha yavaş dönme durumunda ise dönme yönü tersine dönene kadar azalır.

Daha yüksek ve istenildiği kadar yüksek yörüngelere ulaşma olasılığı

Yeterince hızlı ters yönde dönen bir uydu için $\omega < -\Omega$ olur; dolayısıyla telleri gergin kalır ve $\dot{R} > 0$ olur. Bu nedenle daha yüksek bir yörüngeye ulaşabilir.

Açısal momentumun korunumu, yarıçapa sonlu bir üst sınır getirmez. Başlangıç durumu ile daha sonraki bir dairesel yörünge arasında

$$M\sqrt{KR} + I\omega = M\sqrt{KR_0} + I\omega_0.$$

$I/M = r^2$ olduğundan,

$$\omega(R) = \omega_0 - \frac{\sqrt{K}}{r^2}(\sqrt{R} - \sqrt{R_0}).$$

R büyüdükçe, giderek daha pozitif olan yörüngesel açısal momentum, giderek daha negatif olan dönme açısal momentumu tarafından dengelenir. Güneş enerjisiyle çalışan makineler gereken enerjiyi sağlar.

Yükselme hızı giderek küçülür. Yükselen dalda,

$$\dot{R} = \frac{6\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} R^{-5/2},$$

ve bunun integrali

$$R(t)^{7/2} = R_0^{7/2} + \frac{21\epsilon r^2 \sqrt{K}}{\pi} t.$$

Bu ideal modelde her sonlu hedef yarıçapa sonlu bir sürede ulaşılır; ancak $R \rightarrow \infty$ için $t \rightarrow \infty$ gerekir. Üstelik gereken dönme enerjisi sınırsız biçimde büyür:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \sim \frac{2mK}{r^2}R \quad (R \rightarrow \infty).$$

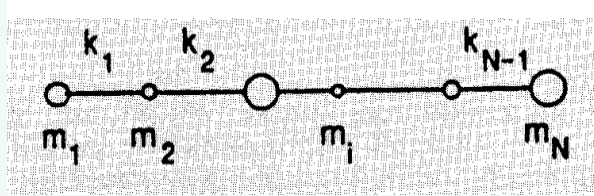
Dolayısıyla **belirtilen idealleştirmeler altında istenildiği kadar yüksek sonlu yörüngeler mümkündür**; sonsuz uzaklığa kaçış ise bu dairesel yörünge pompalama sürecinin yalnızca asimptotik bir limitidir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Doğrusal Bir Molekülün Boyuna Hareketi

Bu soruda doğrusal bir molekülün boyuna hareketini, yani molekül eksenini boyunca hareketini inceleyeceksiniz. Molekülün dönme hareketi ve bükülmesi dikkate alınmamaktadır. Molekülün, kütleleri sırasıyla $m_1, m_2, \dots, m_N$ olan N atomdan oluştuğu varsayılmaktadır. Her atomun

komşularına bir kimyasal bağla bağlı olduğu kabul edilmektedir. Her bağ, Hooke yasasına uyan kütleless bir yayla modellenmektedir; yay sabitleri $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$ değerlerindedir. Molekül Şekil 1'de gösterilmiştir.



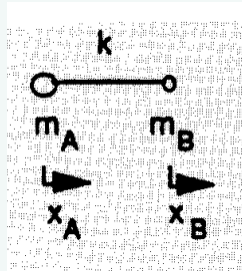
Şekil 1. N atomlu doğrusal bir molekül.

Bu soruyu çözerken şu bilgilerden yararlanın: Doğrusal bir molekülün boyuna titreşim hareketi, normal titreşimler veya normal modlar olarak adlandırılan ayrı titreşim hareketlerinin üst üste binmesinden oluşur. Bir normal modda bütün atomlar aynı frekansta basit harmonik hareket yapar ve denge konumlarından aynı anda geçer.

Sorular

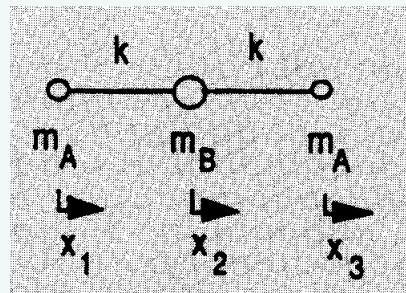
1) x_i , i atomunun denge konumundan yer değiştirmesi olsun. Her atoma etki eden F_i kuvvetini, $x_1, x_2, \dots, x_N$ yer değiştirmelerinin ve $k_1, k_2, \dots, k_{N-1}$ yay sabitlerinin fonksiyonu olarak ifade edin. $F_1, F_2, \dots, F_N$ kuvvetleri arasında nasıl bir bağıntı vardır? Bu bağıntıyı kullanarak $x_1, x_2, \dots, x_N$ yer değiştirmeleri arasında bir bağıntı türetin ve bu bağıntının fiziksel yorumunu yapın.

2) İki atomlu AB molekülünün (Şekil 2) hareketini inceleyin. Yay sabitinin değeri k 'dir. A ve B atomlarına etki eden kuvvetler için bir ifade türetin. Molekülün olası hareket türlerini belirleyin. Bunlara karşılık gelen titreşim frekanslarını belirleyin ve sonucu yorumlayın. Özellikle, kütleleri aynı olmadığı hâlde atomların aynı frekansta titreşmesi nasıl mümkün olur?



Şekil 2. İki atomlu AB molekülü

3) Üç atomlu BA_2 molekülünün (Şekil 3) hareketini inceleyin.



Şekil 3. Üç atomlu BA_2 molekülü.

Her atoma etki eden net kuvveti yalnızca o atomun yer değiştirmesinin fonksiyonu olarak ifade edin. Molekülün olası hareketlerini ve bunlara karşılık gelen titreşim frekanslarını çıkarın.

4) CO₂ molekülünün iki boyuna titreşim modunun frekansları sırasıyla 3.998×10^{13} Hz ve 7.042×10^{13} Hz'dir. CO bağının yay sabiti için sayısal bir değer belirleyin.

Molekülün bağ yapısı için kullanılan bu yaklaşımın, gerçek molekülün titreşim hareketini ne ölçüde iyi betimlediğini düşünüyorsunuz?

Karbon atomunun atom kütlesi = 12 amu ve oksijen atomunun atom kütlesi = 16 amu. Atomik kütle birimi = 1.660×10^{-27} kg.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. Kuvvetler şöyledir:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i(x_{i+1} - x_i) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \\ F_N &= -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}). \end{aligned}$$

Bu kuvvetler $\sum_i F_i = 0$ bağıntısını sağlar; dolayısıyla

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

Kütle merkezi sabit hızla hareket eder. Kütle merkezinin durgun olduğu referans sisteminde ölçülen iç titreşimler için

$$\sum_i m_i x_i = 0.$$

2. AB için

$$F_A = k(x_B - x_A), \quad F_B = k(x_A - x_B).$$

Sıfır frekanslı bir rijit öteleme ve bir iç titreşim modu vardır:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

Bu titreşimde $m_A x_A = -m_B x_B$ olur: atomlar zıt yönlerde, kütleleriyle ters orantılı genliklerle hareket eder.

3. BA₂ için normal modlar şunlardır:

Hareket	Yer değiştirme oranları $x_1 : x_2 : x_3$	Frekans
Rijit öteleme	1 : 1 : 1	0
Simetrik gerilme	1 : 0 : -1	$f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}$

Hareket	Yer değiştirme oranları $x_1 : x_2 : x_3$	Frekans
Asimetrik gerilme	$1 : -\frac{2m_A}{m_B} : 1$	$f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right)}$

Simetrik gerilmede

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

Asimetrik gerilmede

$$\begin{aligned} F_1 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_1, \\ F_2 &= -k \left(2 + \frac{m_B}{m_A} \right) x_2, \\ F_3 &= -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) x_3. \end{aligned}$$

Genel hareket, bu iki titreşimin ve sabit hızlı ötelemenin üst üste binmesidir.

4. Ölçülen iki frekans ayrı ayrı řu değerleri verir:

$$k_s = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}, \quad k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Dolayısıyla bağın esneklik sabiti için temsili bir yaklaşık değer $k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}$ 'dir. Tek bir k değeri her iki frekansla da tam olarak uyuşmaz: öngörülen frekans oranı 1.915 iken gözlenen oran 1.761'dir. Model, bu oranda yaklaşık 9%'luk bir sapmayla makul bir yaklaşım sağlar.

Çözüm

1) Kuvvetler ve kütle merkezi

Bütün yer değiştirmeler için molekül ekseni boyunca aynı pozitif yönü seğelim. i ve $i + 1$ atomlarını birleştiren yayın uzunluğundaki değişim

$$\Delta \ell_i = x_{i+1} - x_i.$$

olur. Dolayısıyla Hooke yasasına uyan ideal yayların potansiyel enerjisi

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} k_i (x_{i+1} - x_i)^2.$$

řeklinde dir. $F_i = -\partial U / \partial x_i$ kullanılarak

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_2 - x_1), \\ F_i &= k_i(x_{i+1} - x_i) - k_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq N-1, \end{aligned}$$

ve

$$F_N = -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}).$$

elde edilir.

Her yay, iki ucuna eşit büyüklükte ve zıt yönde kuvvetler uygular. Sonuç olarak

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0.$$

Newton'ın ikinci yasası buradan

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_i m_i x_i \right) = 0,$$

sonucunu verir; dolayısıyla

$$\sum_i m_i x_i = C_0 + C_1 t.$$

$M_{\text{tot}} = \sum_i m_i$ yazılırsa kütle merkezinin yer değiştirmesi

$$X_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M_{\text{tot}}}.$$

olur. Böylece, dış kuvvet etkisinde olmayan yalıtılmış bir sistemden beklendiği gibi, kütle merkezi sabit hıza sahiptir.

Frekans sıfırdan farklı bir normal mod için

$$x_i = a_i \cos(\omega t + \phi).$$

$\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$ olduğundan

$$0 = \sum_i m_i \ddot{x}_i = -\omega^2 \sum_i m_i x_i.$$

Buradan

$$\sum_i m_i x_i = 0 \quad (\omega \neq 0).$$

İç titreşim sırasında kütle merkezi sabit kalır. Sabit hızlı öteleme, bundan bağımsız olarak harekete eklenebilir.

2) İki atomlu AB molekülü

Yayın uzaması $x_B - x_A$ olduğundan

$$m_A \ddot{x}_A = k(x_B - x_A), \quad m_B \ddot{x}_B = -k(x_B - x_A).$$

Kütle merkezinin yer değiştirmesini ve bağıl yer değiştirmeyi tanımlayalım:

$$X = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}, \quad q = x_B - x_A.$$

Hareket denklemleri toplandığında

$$\ddot{X} = 0.$$

elde edilir. İvmaların farkı alındığında

$$\ddot{q} = -k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) q.$$

bulunur. Dolayısıyla

$$X = X_0 + Vt, \quad q = Q \cos(\omega t + \phi),$$

burada

$$\omega^2 = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) = \frac{k}{\mu}, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

Hareketin tamamı şöyledir:

$$\begin{aligned} x_A &= X_0 + Vt - \frac{m_B}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi), \\ x_B &= X_0 + Vt + \frac{m_A}{m_A + m_B} Q \cos(\omega t + \phi). \end{aligned}$$

Birbirinden bağımsız iki hareket türü vardır:

- **Rijit öteleme:** $q = 0$ olduğundan $x_A = x_B = X_0 + Vt$ olur. Yay şekil değiştirmemiştir ve her iki kuvvet de sıfırdır. Bu, sıfır frekanslı moddur.
- **İç titreşim:** kütle merkezinin durgun olduğu referans sisteminde

$$m_A x_A + m_B x_B = 0.$$

Atomlar zıt fazda, şu frekansla salınır:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

Kütlelerin farklı olmasına rağmen frekansların eşit olmasını anlamak için diğer atomun yer değiştirmesini eleayalım:

$$x_B = -\frac{m_A}{m_B} x_A, \quad x_A = -\frac{m_B}{m_A} x_B.$$

O hâlde

$$F_A = -k \left(1 + \frac{m_A}{m_B} \right) x_A, \quad F_B = -k \left(1 + \frac{m_B}{m_A} \right) x_B.$$

Her geri çağırıcı kuvvet katsayısı ilgili kütleye bölündüğünde aynı değer elde edilir:

$$\frac{k(1 + m_A/m_B)}{m_A} = \frac{k(1 + m_B/m_A)}{m_B} = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right).$$

Dolayısıyla her iki atom da aynı açısal frekansa sahiptir. Kütlelerinin farklı olması, genliklerinin farklı olmasıyla dengelenir:

$$\frac{|x_A|_{\max}}{|x_B|_{\max}} = \frac{m_B}{m_A}.$$

Daha ağır atomun hem yer değiştirme genliği hem de ivme genliği daha küçüktür.

3) Üç atomlu BA_2 molekülü

$m = m_A$ ve $M = m_B$ yazalım. Hooke yasası şu denklemleri verir:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - x_1), \\ M\ddot{x}_2 &= k(x_1 + x_3 - 2x_2), \\ m\ddot{x}_3 &= k(x_2 - x_3). \end{aligned}$$

Rijit ötelemede, $x_1 = x_2 = x_3 = X_0 + Vt$ olduğunda, her üç kuvvet de sıfır olur.

İç titreşim için kütle merkezinin durgun olduğu referans sisteminde çalışalım:

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0.$$

Uçlardaki atomların yer değiştirmelerinin ortalamasını ve farklarının yarısını tanımlayalım:

$$s = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad d = \frac{x_1 - x_3}{2}.$$

O hâlde

$$x_1 = s + d, \quad x_3 = s - d, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

Uçlardaki atomların denklemleri toplanıp çıkarıldığında

$$m\ddot{s} = k(x_2 - s) = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)s,$$

$$m\ddot{d} = -kd.$$

elde edilir. Bunlar birbirinden bağımsız iki harmonik osilatördür; dolayısıyla bütün iç normal modları belirlerler.

Simetrik gerilme modu. $s = 0$ alalım. O hâlde

$$x_2 = 0, \quad x_1 = d, \quad x_3 = -d.$$

Ortadaki atom durgun kalırken dıştaki atomlar eşit genliklerle zıt yönlerde hareket eder. Her iki bağ birlikte uzar ve birlikte kısalır.

Her atomun kendi yer değiştirmesi cinsinden ifade edilen kuvvetler şöyledir:

$$F_1 = -kx_1, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -kx_3.$$

Dolayısıyla

$$\boxed{\omega_s^2 = \frac{k}{m_A}, \quad f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_A}}.}$$

Merkezdeki atomun kütlesi bu frekansta yer almaz; çünkü ona etki eden iki yay kuvveti hareket boyunca birbirini dengeler.

Asimetrik gerilme modu. $d = 0$ alalım. O hâlde

$$x_1 = x_3 = s, \quad x_2 = -\frac{2m}{M}s.$$

Dıştaki atomlar birlikte hareket ederken ortadaki atom zıt yönde hareket eder. Bağlardan biri uzarken diğeri kısalır.

Dıştaki atomların her biri için

$$F_1 = k(x_2 - x_1) = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)x_1,$$

$$F_3 = -k\left(1 + \frac{2m}{M}\right)x_3.$$

Ortadaki atom için $x_1 + x_3 = -(M/m)x_2$ bağıntısını kullanalım:

$$F_2 = k(x_1 + x_3 - 2x_2) = -k\left(2 + \frac{M}{m}\right)x_2.$$

Her üç denklem de şu sonucu verir:

$$\omega_a^2 = k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right), \quad f_a = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k \left(\frac{1}{m_A} + \frac{2}{m_B} \right)}.$$

Tek bir yer değiştirmeye bağlı bu kuvvet yasaları, belirtilen normal modlar için geçerlidir. Genel bir üst üste binme, başlangıçtaki bağlaşıklık kuvvet denklemlerine uyar.

Hareketin tamamı şöyle yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (X_0 + Vt) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + A_a \cos(\omega_a t + \phi_a) \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_A/m_B \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dolayısıyla iki boyuna titreşim modu ve bir öteleme modu vardır.

4) Bağı esneklik sabitinin sayısal değeri ve modelin değerlendirilmesi

CO₂ için dıştaki atomlar oksijen, merkezdeki atom ise karbondur:

$$m_A = m_O = 16(1.660 \times 10^{-27}) = 2.656 \times 10^{-26} \text{ kg},$$

$$m_B = m_C = 12(1.660 \times 10^{-27}) = 1.992 \times 10^{-26} \text{ kg}.$$

$f_a > f_s$ olduğundan şu eşleştirmeyi yapalım:

$$f_s = 3.998 \times 10^{13} \text{ Hz}, \quad f_a = 7.042 \times 10^{13} \text{ Hz}.$$

Simetrik moddan

$$k_s = m_O(2\pi f_s)^2,$$

dolayısıyla

$$k_s = (2.656 \times 10^{-26}) [2\pi(3.998 \times 10^{13})]^2 = 1.676 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Asimetrik moddan

$$k_a = \frac{(2\pi f_a)^2}{1/m_O + 2/m_C},$$

dolayısıyla

$$k_a = 1.418 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

Bu tahminler, bağı esneklik sabitinin yaklaşık olarak

$$k \approx 1.5 \times 10^3 \text{ N m}^{-1}.$$

olduğunu gösterir. Aralarındaki fark, modelin tek bir yay sabitiyle ölçülen her iki frekansı da veremediğini gösterir.

k 'den bağımsız, doğrudan bir tutarlılık sınaması frekans oranıdır. Modelin öngörüsü şöyledir:

$$\frac{f_a}{f_s} = \sqrt{1 + \frac{2m_O}{m_C}} = \sqrt{1 + \frac{32}{12}} = \sqrt{\frac{11}{3}} = 1.915.$$

Ölçülen oran ise

$$\left(\frac{f_a}{f_s}\right)_{\text{measured}} = \frac{7.042}{3.998} = 1.761.$$

Örneğin, düşük frekansa uyum sağlandığında

$$f_a = 1.91485(3.998 \times 10^{13}) = 7.656 \times 10^{13} \text{ Hz},$$

öngörülür; bu değer, ölçülen yüksek frekansın 8.71% üzerindedir.

Dolayısıyla ideal yay modeli, iki gerilme hareketini ve bunların frekans ölçeğini makul bir yaklaşıklıkla betimler. Nicel doğruluğu sınırlıdır: gerçek moleküler geri çağırıcı kuvvetler, iki bağıın uzamaları arasındaki bağlaşımı ve Hooke yasasından sapmaları içerebilir; bu model bunları dikkate almaz.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Güneş Işığındaki Bir Uyd

Bu soruda bir uzay uydusunun sıcaklığını hesaplayacaksınız. Uydunun, çapı 1 m olan bir küre olduğu varsayılmaktadır. Uydunun her noktası aynı sıcaklıkta kalmaktadır. Uydunun küresel yüzeyinin tamamı aynı tür kaplamayla kaplanmıştır. Uyd, Dünya'nın yakınında bulunmaktadır ancak Dünya'nın gölgesinde değildir.

Güneş'in yüzey sıcaklığı (kara cisim yüzey sıcaklığı) $T_{\text{sun}} = 6000 \text{ K}$, yarıçapı ise $6.96 \times 10^8 \text{ m}$ 'dir. Güneş ile Dünya arasındaki uzaklık $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ 'dir. Güneş ışığı uyduyu, uydunun kara cisim olarak yaydığı ışıının gücünün güneş ışığından soğurulan güce eşit olduğu sıcaklığa kadar ısıtır. Bir kara cismin birim alanından yayılan güç, Stefan-Boltzmann yasası $P = \sigma T^4$ ile verilir; burada σ , $5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ değerindeki evrensel sabittir. İlk yaklaşımda hem Güneş'in hem de uydunun üzerlerine gelen tüm elektromanyetik ışıını soğurduğunu varsayabilirsiniz.

1) Uydunun T sıcaklığı için bir ifade bulunuz. Bu sıcaklığın sayısal değeri nedir?

2) T sıcaklığındaki bir cismin kara cisim ışıının tayfı $u(T, f)$, Planck ışıının yasasına uyar:

$$u(T, f) df = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1}$$

Burada $\eta = hf/kT$ ve $u(T, f)df$, $[f, f + df]$ frekans aralığındaki elektromanyetik ışıının enerjii yoğunluğudur. Denklemden $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$ Planck sabiti, $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ Boltzmann sabiti ve $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ışık hızıdır.

Kara cisim tayfının tüm f frekansları ve yayılma doğrultuları üzerinden integrali alındığında, yukarıda verilen Stefan-Boltzmann yasasında ifade edildiği gibi, birim alandan yayılan toplam güç $P = \sigma T^4$ elde edilir.

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$$

Şekil, normalize edilmiş

$$\frac{c^3 h^3}{8\pi k^4} \frac{u(T, f)}{T^4}$$

tayfını η 'nın bir fonksiyonu olarak göstermektedir.

Birçok uygulamada uydunun olabildiğince soğuk tutulması gerekir. Mühendisler, uyduyu soğutmak için bir kesim frekansının üzerindeki ışığı yansıtan, ancak daha düşük frekanslı ısı ışınımının dışarı çıkmasını engellemeyen yansıtıcı bir kaplama kullanırlar. Bu (keskin) kesim frekansının $hf/k = 1200$ K değerine karşılık geldiğini varsayınız.

Uydunun yeni denge sıcaklığı nedir? Kesin cevap gerekli değildir. Bu nedenle, zahmetli integraller hesaplamayınız; gerektiğinde yaklaşımlar yapınız. Tüm aralık üzerinden alınan integral

$$\int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

olup $\eta^3/(e^\eta - 1)$ ifadesi en büyük değerini $\eta = 2.82$ 'de alır. Küçük η değerleri için üstel fonksiyonu $e^\eta \simeq 1 + \eta$ biçiminde açabilirsiniz.

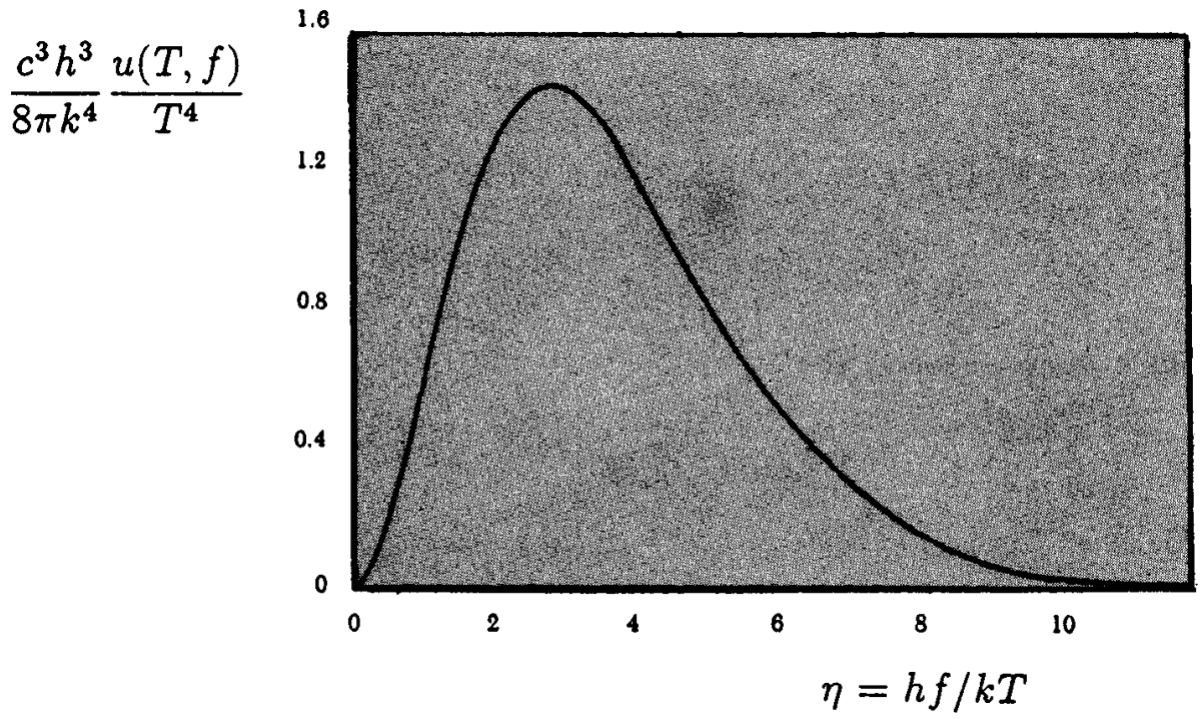
3) Şimdi, elektrik üreten ve dışarı doğru uzanan güneş panellerine sahip gerçek bir uyduyu ele alırsak, uydu içindeki elektronik devrelerde açığa çıkan ısı ek bir ısı kaynağı görevi görür. İç ısı kaynağının gücünün 1 kW olduğunu varsayarak, yukarıdaki 2. durumda uydunun denge sıcaklığı nedir?

4) Bir üretici, özel bir boyanın reklamını şöyle yapmaktadır:

"Bu boya, üzerine gelen tüm ışınımın (hem görünür ışığın hem de kızılötesinin) %90'ından fazlasını yansıtacak, ancak tüm frekanslarda (görünür ışık ve kızılötesi) bir kara cisim gibi ışınım yayarak uydudan çok miktarda ısı uzaklaştıracaktır. Böylece boya, uydunun olabildiğince soğuk tutulmasına yardımcı olacaktır."

Böyle bir boya var olabilir mi? Neden olabilir ya da neden olamaz?

5) Burada ele alınan uyduya benzer küresel bir cismin sıcaklığını 1)'de hesaplanan sıcaklığın üzerine çıkarmak için bir kaplama hangi özelliklere sahip olmalıdır?



Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

1. Güneş'in yarıçapı $R_\odot$ ve Güneş-uydu uzaklığı D olmak üzere,

$$T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_\odot}{2D}} \simeq 289 \text{ K.}$$

2. Belirtilen küçük η yaklaşımı kullanıldığında,

$$T_2 \simeq T_1 \left[\frac{5}{\pi^4} \left(\frac{1200 \text{ K}}{T_{\text{sun}}} \right)^3 \right]^{1/4} \simeq 41 \text{ K.}$$

3. Kaplamanın yüksek frekanslı ısı ışıma yayımını bastırması hesaba katıldığında, \[

$$\boxed{T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K} \quad \text{(yaklaşık 317 K).} \]$$

4. **Hayır.** Kirchhoff yasası, her frekansta soğurma ve yayma katsayılarının eşit olmasını gerektirir. 90%'dan fazlasını yansıtan bir yüzey, aynı anda bu frekanslarda kara cisim gibi ışıma yayamaz.

5. Kaplama, **güneş ışımasını güçlü biçimde soğurmalı ve ısı kızıltötesi ışımasını zayıf biçimde yaymalıdır**: güneş ışımasının frekanslarında yüksek soğurma katsayısına, uydunun daha düşük ısı ışıma frekanslarında ise yüksek yansıtma katsayısına sahip olmalıdır.

Çözüm

Uydunun yarıçapı $a = 0.50 \text{ m}$, Güneş'in yarıçapı $R_\odot$ ve Güneş-uydu uzaklığı D olsun. Dünya'dan gelen ışıma ve diğer ısı alışverişlerini ihmal ederek belirtilen ışıma dengesi modelini kullanıyoruz.

1) Kara cisim uydu

Güneş'in toplam ışınlam gücü

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\text{sun}}^4.$$

Dolayısıyla uydunun bulunduğu yerde birim alana düşen güneş ışınlamı gücü

$$S = \frac{L_{\odot}}{4\pi D^2} = \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2.$$

Uydu, güneş ışığını izdüşüm alanı πa^2 üzerinden alırken, tüm yüzeyi $4\pi a^2$ ışınlam yayar. Bu nedenle ısı denge için

$$\pi a^2 S = 4\pi a^2 \sigma T_1^4.$$

Böylece

$$T_1^4 = \frac{1}{4} T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2, \quad \boxed{T_1 = T_{\text{sun}} \sqrt{\frac{R_{\odot}}{2D}}}.$$

Sayısal olarak,

$$T_1 = 6000 \sqrt{\frac{6.96 \times 10^8}{2(1.5 \times 10^{11})}} \text{ K} = \boxed{289 \text{ K}}.$$

Hem soğurulan hem de yayılan güç a^2 ile orantılı olduğundan uydunun yarıçapı sadeleşir.

2) Frekans seçici kaplamaya sahip uydu

Şöyle yazalım:

$$\Theta = \frac{hf_c}{k} = 1200 \text{ K},$$

burada f_c kesim frekansıdır. İdeal kaplamalı uydu, f_c 'nin altında kara cisim gibi soğurur ve ışınlam yayar; f_c 'nin üzerinde ise yansıma hem soğurmaya hem de yayımı bastırır. Tayfsal soğurma ve yayma katsayılarının bu eşitliği Kirchhoff yasasıdır.

Kara cisim gücünün boyutsuz bir x kesim değerinin altında kalan oranını şöyle tanımlayalım:

$$F(x) = \frac{15}{\pi^4} \int_0^x \frac{\eta^3}{e^{\eta} - 1} d\eta.$$

T sıcaklığındaki bir cisim için ilgili kesim değeri $x = \Theta/T$ 'dir. Dolayısıyla denge denklemi

$$\pi a^2 \sigma T_{\text{sun}}^4 \left(\frac{R_{\odot}}{D} \right)^2 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}} \right) = 4\pi a^2 \sigma T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2} \right).$$

1. kısımdan yararlanarak,

$$T_2^4 F\left(\frac{\Theta}{T_2} \right) = T_1^4 F\left(\frac{\Theta}{T_{\text{sun}}} \right).$$

Güneş ışığı için,

$$x_{\odot} = \frac{1200}{6000} = 0.20.$$

Bu küçük aralığın tamamında $e^{\eta} - 1 \simeq \eta$ olduğundan,

$$F(0.20) \simeq \frac{15}{\pi^4} \int_0^{0.20} \eta^2 d\eta = \frac{5(0.20)^3}{\pi^4} \simeq 4.11 \times 10^{-4}.$$

Dolayısıyla gelen güneş ışınımı gücünün yalnızca yaklaşık 0.041%'i soğurulur.

Başlangıçta, soğutulmuş uydunun ısı ışınımının neredeyse tamamını kesim frekansının altında yaydığını varsayıyoruz; dolayısıyla $F(\Theta/T_2) \simeq 1$. Bu durumda

$$T_2 \simeq T_1 [F(0.20)]^{1/4} = 289(4.11 \times 10^{-4})^{1/4} \text{ K},$$

buradan

$$T_2 \simeq 41 \text{ K}.$$

Bu varsayım kendi içinde tutarlıdır: uydunun kesim değeri

$$\frac{\Theta}{T_2} \simeq \frac{1200}{41} \simeq 29,$$

olup tayfın $\eta = 2.82$ 'deki maksimumunun çok ötesindedir. Dışarıda kalan yüksek frekanslı ısı ışınım kuyruğu ihmal edilebilir.

3) 1 kW gücünde bir iç ısı kaynağının eklenmesi

Artık ışınım yayan alanın açıkça kullanılması gerekir:

$$A = 4\pi a^2 = \pi \text{ m}^2.$$

Kaplama uygulanmadan önce soğurulan güneş ışınımı gücü

$$Q_{\odot,0} = A\sigma T_1^4 \simeq 1.24 \times 10^3 \text{ W}.$$

Kaplamayla birlikte bu güç

$$Q_{\odot} = Q_{\odot,0} F(0.20) \simeq (1.24 \times 10^3)(4.11 \times 10^{-4}) \simeq 0.51 \text{ W}.$$

Bu değer, $Q_{\text{int}} = 1000 \text{ W}$ gücündeki iç ısı kaynağına kıyasla ihmal edilebilir. Denge denklemi

$$A\sigma T_3^4 F\left(\frac{1200 \text{ K}}{T_3}\right) = 1000 \text{ W} + Q_{\odot}.$$

Burada $F = 1$ alamayız. Işınımına herhangi bir kısıtlama getirilmeyen bir kara cismin bile

$$\left(\frac{1000 \text{ W}}{A\sigma}\right)^{1/4} \simeq 274 \text{ K},$$

sıcaklığında olması gerekir; bu sıcaklıkta bile kesim değeri $\eta_c \simeq 4.38$ olurdu. Isı ışınım tayfının önemli bir bölümü bu kesim değerinin üzerindedir; bu nedenle kaplamalı uydu daha sıcak olmalıdır.

Gerekli oranı doğrudan verilen grafikten tahmin edebiliriz. $\eta_c = 3.8$ yakınında, eğrinin altında kalan alan yaklaşık olarak

$$\int_0^{3.8} \frac{\eta^3}{e^{\eta} - 1} d\eta \simeq 3.6.$$

Toplam alan $\pi^4/15 \simeq 6.49$ olduğundan,

$$F(3.8) \simeq \frac{3.6}{6.49} \simeq 0.55.$$

Yerine koyduğumuzda

$$T_3 \simeq \left[\frac{1000.5 \text{ W}}{(\pi \text{ m}^2)(5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4})(3.6/6.49)} \right]^{1/4} \simeq 317 \text{ K}.$$

Buna karşılık gelen kesim değeri $1200/317 \simeq 3.79$ olup grafik üzerinden yapılan tahmini doğrular. Dolayısıyla,

$$T_3 \simeq 3.2 \times 10^2 \text{ K}.$$

4) Reklamı yapılan boya

Kirchhoff'un ısı ışınım yasasına göre, belirli bir frekansta ve karşılık gelen doğrultularda,

$$\epsilon_f = \alpha_f,$$

burada ϵ_f yayma katsayısı, α_f ise soğurma katsayısıdır.

Enerjinin korunumu gereği

$$\alpha_f + \rho_f + \tau_f = 1,$$

burada ρ_f ve τ_f sırasıyla yansıtma ve geçirme katsayılarıdır. Dolayısıyla, $\rho_f > 0.90$ ise,

$$\alpha_f < 0.10 \implies \epsilon_f < 0.10.$$

Oysa kara cisim gibi ışınım yaymak için $\epsilon_f = 1$ olması gerekir.

Bu nedenle, aynı frekanslarda hem yüksek yansıtma hem de kara cisim gibi ısı ışınım yayma özelliklerinin bir arada bulunduğu iddiası pasif bir boya için olanaksızdır. Bu, Kirchhoff yasasını ve ayrıntılı ısı dengesi ihlal ederdi.

5) Sıcaklığı artıran bir kaplama

Kaplama, 2. kısımdakinin tersi bir tayfsal seçiciliğe sahip olmalıdır:

- Güneş ışınımının büyük bölümünü taşıyan görece yüksek frekanslarda güçlü soğurma.
- Uydunun ısı ışınımının büyük bölümünü taşıyan daha düşük kızılötesi frekanslarda zayıf yayım ve buna karşılık güçlü yansıtma.

$\bar{\alpha}_\odot$, güneş tayfı üzerinden ortalaması alınmış soğurma katsayısı; $\bar{\epsilon}_T$ ise uydunun T sıcaklığındaki kara cisim tayfı üzerinden ortalaması alınmış yayma katsayısı olsun. İç ısıtma olmadığında denge denklemi

$$\pi a^2 \bar{\alpha}_\odot S = 4\pi a^2 \bar{\epsilon}_T \sigma T^4.$$

Böylece

$$T = T_1 \left(\frac{\bar{\alpha}_\odot}{\bar{\epsilon}_T} \right)^{1/4}.$$

Denge sıcaklığı, şu koşulda T_1 'i aşar:

$$\bar{\alpha}_\odot > \bar{\epsilon}_T.$$

Bu durum Kirchhoff yasasıyla uyumludur; çünkü iki ortalama, farklı frekans aralıklarını ağırlıklandırır. Frekanstan bağımsız gri bir kaplamanın soğurma ve yayma katsayıları eşit olur ve denge sıcaklığını değiştirmezdi.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.